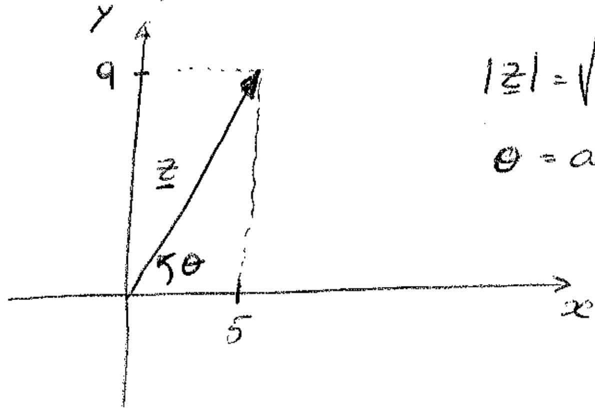
NÚMEROS COMPLEXOS E GRANDEZAS SINUSOIDAIS

EXERCÍCIOS

A - Números Complexos

1. Somas

a) $(2+5j)+(3+4j) = (2+3)+(5j+4j) = 5+9j \simeq 10{,}3\, e^{j61}$



$|z| = \sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106} \simeq 10{,}3$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{9}{5}\right) \simeq \underbrace{61^\circ \simeq 1{,}064\text{ rad}}$

$\pi \longleftrightarrow 180^\circ$
$x \longleftrightarrow 61^\circ$

b) $j+(2-5j) = 2-4j \simeq \underbrace{4{,}47}_{\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}}\, e^{-j63}$ $\}\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{2}\right)$

2. Subtracções

2. a) $(2+5j)-(3+4j) = (2-3)+(5j-4j) = -1+j \simeq 1{,}41\, e^{j135}$

b) $(1+j)-(1-j) = (1-1)+(j+j) = 2j = 2\, e^{j90}$

3. Produtos

a) $\underbrace{(2+3j)}_{3{,}6e^{j56}} \times \underbrace{(3-2j)}_{3{,}6e^{-j34}} = 2\times(3-2j)+3j\times(3-2j) = 6-4j+9j-\overbrace{6j^2}^{-6}$

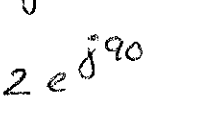
$= 12+5j \simeq 13\, e^{j23}$

b) $\underbrace{(1+3j)}_{3{,}16e^{j72}} \times \underbrace{(1+j)}_{1{,}41e^{j45}} = 1\times(1+j)+3j\times(1+j) = 1+j+3j+\overbrace{3j^2}^{-3}$

$= -2+4j \simeq 4{,}47\, e^{j117}$

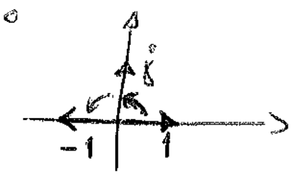
Nota 1: na notação polar é só multiplicar as amplitudes e somar os ângulos.

Nota 2: multiplicar por j é rodar $+90^\circ$ (ou $\frac{\pi}{2}$) $\longrightarrow$



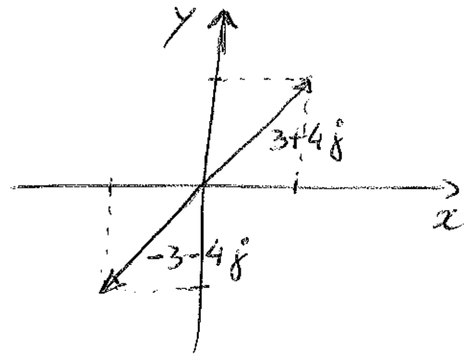
$1\times j = j$

portanto, j^2 é rodar $90^\circ+90^\circ = 180^\circ$ $\longrightarrow$



4. Simétricos

a) $\underbrace{3+4j}_{5e^{j53}} \longrightarrow -(3+4j) = \underbrace{-3-4j}_{5e^{-j127}}$



Nota: o simétrico é o mesmo que rodar 180° (ou π)

$53° + 180° = 233° \to 233° - 360° = -127°$

b) $-3+j \longrightarrow -(-3+j) = 3-j$

c) $1-j \longrightarrow -(1-j) = -1+j$

d) $-2-5j \longrightarrow -(-2-5j) = 2+5j$

5. Conjugados

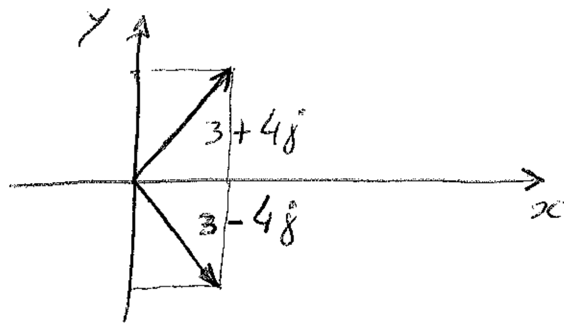
a) $3+4j \longrightarrow 3-4j$

b) $1-j \longrightarrow 1+j$

c) $-3+j \longrightarrow -3-j$

d) $-2-5j \longrightarrow -2+5j$

Nota: o conjugado é o mesmo que espelhar o vector segundo o eixo dos xx, e.g. a)



6. Divisões

Técnica 1: representar os complexos na notação polar, multiplicar as amplitudes e subtrair os ângulos

Técnica 2: usar o conjugado (do denominador)

$$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)\cdot(c-jd)}{(c+jd)\cdot(c-jd)} \to c^2 + \cancel{jcd} - \cancel{jcd} - j^2d^2 =$$

$$= c^2+d^2 \text{ (real)}$$

a) $\dfrac{(-10+15j)}{(2-j)} \simeq \dfrac{18{,}03\, e^{j123{,}7}}{2{,}236\, e^{-j26{,}57}} \simeq 8{,}062\, e^{j150{,}3} \simeq -7+4j$ //

ou

$\dfrac{(-10+15j)\cdot(2+j)}{4+1} = \dfrac{-20-10j+30j+15j^2}{5} = \dfrac{-35+j20}{5} = -7+4j$ //

b) $\dfrac{(1+3j)}{(1+j)} = \dfrac{(1+3j)\cdot(1-j)}{2} = \dfrac{1-j+3j-3j^2}{2} = \dfrac{4+j2}{2} = 2+j$ //

ou

$\dfrac{3{,}162\, e^{j71{,}57}}{1{,}414\, e^{j45}} \simeq 2{,}236\, e^{j26{,}57} \simeq 2+j$ //

7. Quadrado

a) $(1+j)^2 = (1+j)\cdot(1+j) = \cancel{1}+j+j+\cancel{j^2} = 2j$ //

Nota: em notação polar, eleva-se ao quadrado a amplitude e multiplica-se o ângulo por 2.

$(1+j)^2 \simeq (1{,}414\, e^{j45})^2 = 2\, e^{j90} = 2j$ //

b) $(-2+j)^2 = (-2+j)\cdot(-2+j) = -4-2j-2j+j^2 = 3-4j$ //

ou

$(2{,}236\, e^{j153{,}4})^2 = (2{,}236)^2 \cdot e^{2\times j153{,}4} \simeq 5\, e^{j306{,}9} \simeq 3-4j$ //

8.

$5z+z = 12+6j \Leftrightarrow 6z = 12+6j \Leftrightarrow z = 2+j$

9. Para que um número complexo seja real, a sua parte complexa tem de ser nula.

$(a+j).(3-2j) = 3a - 2aj + 3j + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a+2+\underbrace{(3-2a)}_{=0}.j \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ //

10. $a = -4+3j \quad b = -4+3j \quad c = 4-3j$

$a.c+b = (-4+3j).(4-3j)+(-4+3j) =$

$= -16+12j+12j-9j^2-4+3j = -11+27j$ //

B. <u>Grandezas Sinusoidais</u> $(u(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t+\varphi))$

1. "passa por zero em t=0" $\Rightarrow \varphi = 0$

"e a cada 3,93 ms" $\Rightarrow T = 3{,}93\ ms$ // $\rightarrow f = \frac{1}{T} = 127{,}2\ Hz$ // $\rightarrow \omega = 2\pi . f \simeq 799\ rad/s$ //

$u(t)\Big|_{t=3{,}12\ ms} = 30\ V \rightarrow 30 = U_{max} \cdot \sin(799{,}4 \times 3{,}12\times10^{-3}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U_{max} \simeq \frac{30}{0{,}603} \simeq 49{,}73\ V$ //

2. $\varphi = -26^\circ = 0{,}454\ rad$

$T = 4{,}19\ ms = 4{,}19\times10^{-3}\ s \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4{,}19\times10^{-3}} = 1500\ rad/s$

$i(t)\Big|_{t=0{,}826\ ms} = 1{,}41\ mA \rightarrow 1{,}41\times10^{-3} = I_{max} \cdot \cos(1500\times0{,}826\times10^{-3} - 0{,}454) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}41\times10^{-3} = I_{max} \cdot \cos(1{,}239 - 0{,}454) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}41\times10^{-3} = I_{max} \cdot \cos(0{,}785) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_{max} = \frac{1{,}41}{0{,}707} \times 10^{-3} \simeq 2\times10^{-3} = 2\ mA$

$i(t) = 2\times10^{-3} \cdot \cos(1500 . t - 0{,}454)$ //

3. $u(t) = 2 \cdot \cos(628{,}3t + 45^\circ)$ → (deveria aparecer em radianos, mas para este exercício é irrelevante)

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}\ V$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 628{,}3 \Leftrightarrow f = \frac{628{,}3}{2\pi} = 100\ Hz$$

4. $\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $U = 4\ V$, $f = 2000\ Hz$

$$u(t) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(4000 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

5. $U_{max} = 2\ \cancel{Div} \times 5\ V/\cancel{Div} = 10\ V$

$$U = \frac{10}{\sqrt{2}} \simeq 7\ V$$

$$T = 6\ \cancel{Div} \times 4\ ms/\cancel{Div} = 24\ ms \qquad f = \frac{1}{T} \simeq 41{,}7\ Hz$$

6. $T = 10\ ms$, $U = 10\ V$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10 \times 10^{-3}} = 100\ Hz \qquad U_p = U_{max} = 10 \cdot \sqrt{2} \simeq 14{,}1\ V$$

$$U_{pp} = 2 \cdot U_{max} \simeq 28{,}2\ V$$

7. $u(t) = U_{DC} + U_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$$U_{DC} = 1\ \cancel{Div} \times 2\ V/\cancel{Div} = 2\ V$$

$$U_{max} = 2\ \cancel{Div} \times 2\ V/\cancel{Div} = 4\ V$$

$$T = 6\ \cancel{Div} \times 2\ ms/\cancel{Div} = 12\ ms \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12 \times 10^{-3}} \simeq 523{,}6\ rad/s$$

$$u(t) \simeq 2 + 4 \cdot \sin(523{,}6 \cdot t)$$

28/ABR/2009