Instituto Politécnico do Porto

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Electrotécnica

INTRODUÇÃO À ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

Circuitos Lineares de Corrente Contínua

Maria Isabel Abreu

Setembro de 2002

Índice

1. LEIS GERAIS DA ELECTRICIDADE

1.1. Introdução. Noções gerais sobre a estrutura da matéria.

Sabe-se da Física que qualquer substância é constituída por partículas atómicas carregadas, rodeadas por um Campo Electromagnético.

Uma das propriedades das partículas atómicas é a chamada carga eléctrica.

A carga eléctrica é uma grandeza que se manifesta por forças de atracção ou repulsão entre partículas.

Através da experiência somos levados a concluir que há duas espécies de cargas eléctricas – cargas positivas e cargas negativas; e ainda que, cargas do mesmo sinal se repelem e cargas de sinal contrário se atraem.

Passaremos então a poder resumir de uma forma sistemática os factos observados experimentalmente e a poder adoptar um modelo simples para a sua representação.

O modelo utilizado obedece às três “regras” referidas anteriormente:

- existência de duas espécies de cargas (positivas e negativas)
- repulsão entre cargas do mesmo sinal
- atracção entre cargas de sinal contrário.

Assim, além das forças gravitacionais de atracção que actuam sobre todas as partículas atómicas, existem também as forças repulsivas e atractivas de origem eléctrica.

Contudo, na maioria das situações que iremos considerar, as forças gravitacionais podem ser desprezadas em função das forças eléctricas existentes.

Verifica-se então que, qualquer corpo pode ou não estar electricamente carregado, ou seja, possuir uma determinada quantidade de carga eléctrica, pois a carga eléctrica é uma grandeza quantificável.

Relembre-se também que, a carga eléctrica pode ser facilmente transferida de um corpo para outro, uma vez que a carga eléctrica é uma grandeza que se conserva.

Resumindo, a carga eléctrica de uma partícula atómica é a propriedade que explica a "ligação" entre essa partícula e o Campo Electromagnético por ela criado.

Constituição do átomo

O modelo atómico proposto por BOHR no início do século, embora actualmente não seja considerado inteiramente correcto é contudo útil para a visualização da estrutura atómica.

Assim, Bohr considerou o átomo constituído por um núcleo central cuja carga eléctrica se convencionou ser positiva. Gravitando à volta desse núcleo, em órbitas definidas, existem partículas cuja carga eléctrica se considerou negativa, chamada electrões.

A massa do átomo encontra-se praticamente toda concentrada no núcleo; os electrões têm massa aproximadamente desprezável relativamente à massa do núcleo.

O núcleo é essencialmente constituído por duas espécies de partículas : os protões cuja carga é positiva e os neutrões que são partículas sem carga eléctrica.

No estado normal o átomo é constituído por igual número de protões e electrões e como a carga eléctrica do protão é numericamente igual à do electrão (embora uma seja positiva e outra negativa), resulta que no conjunto o átomo não tem carga eléctrica, isto é , é electricamente neutro.

Todavia, os átomos podem ganhar ou perder um ou mais electrões tornando-se electricamente carregados e recebem o nome de iões (positivos ou negativos).

Chamam-se electrões livres, os electrões que devido à sua fraca ligação ao núcleo, se "libertam" e circulam livremente pela estrutura atómica do material.

Refira-se que, como os protões do núcleo são cargas todas positivas, exercem entre si forças eléctricas de repulsão; contudo, o núcleo mantêm-se coeso devido às forças nucleares que actuam em oposição às anteriores.

As cargas eléctricas (em repouso ou em movimento) criam um campo eléctrico em toda a região do espaço que as circunda. E esse campo actua sobre qualquer outra carga eléctrica que se coloque na sua presença, com uma força de origem eléctrica (dada pela lei de Coulomb).

Tudo se passa como se o campo eléctrico desempenhasse o papel de transmissor da interacção entre as cargas.

Diz-se, portanto, que num dado ponto do espaço existe um campo eléctrico, quando uma força de origem eléctrica se exerce sobre uma dada carga colocada nesse ponto.

1.2. Noção de material condutor, material isolante, corrente eléctrica e resistência de um material

Como já vimos, qualquer corpo pode possuir no seu interior um determinado número de electrões livres. Esses electrões livres podem existir em grande quantidade ou serem em número muito reduzido, dependendo do tipo de material que constitui o corpo. Esses electrões movem-se desordenadamente no interior do material, como veremos em seguida.

Quando se aplica um Campo Eléctrico exterior a um dado corpo, as forças do Campo Eléctrico vão actuar sobre os electrões livres desse corpo, deslocando-os todos no mesmo sentido e então dois casos podem ocorrer:

- ou temos um **material (corpo) condutor**, que é um material no interior do qual há electrões livres que se movem contínua e ordenadamente por acção de um Campo Eléctrico exterior. Exemplos: prata, cobre, alumínio, etc.

- ou temos um **material (corpo) isolante**, que é um material no interior do qual ou não existem electrões livres ou existem em muito pequena quantidade; portanto, quando se aplica a esse material um Campo Eléctrico exterior muito poucas cargas se podem movimentar. Exemplos: mica, certos plásticos, certas resinas, etc.

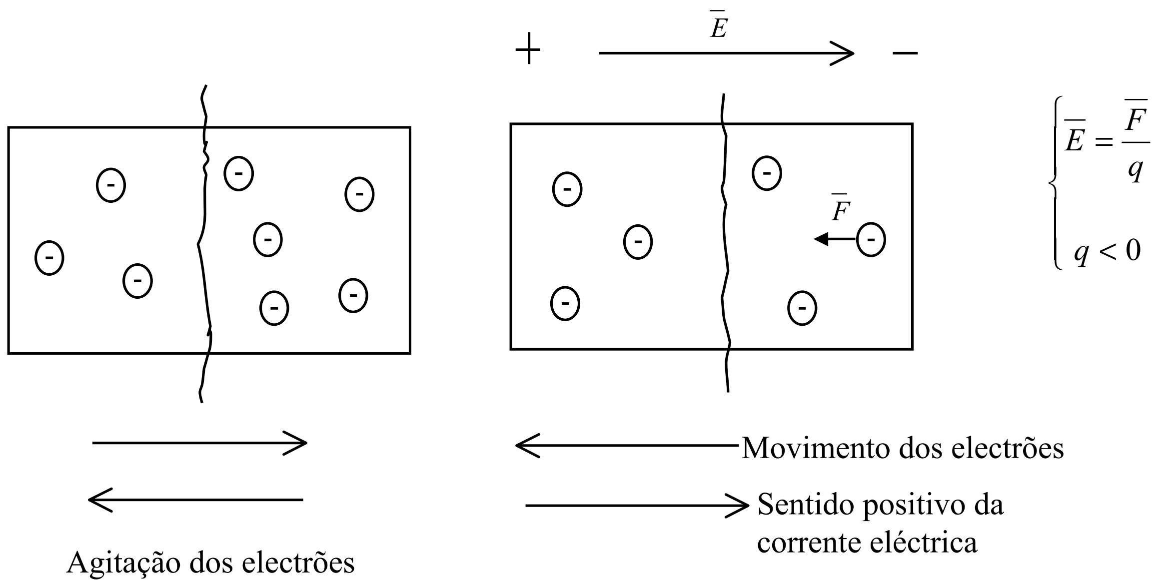
Um qualquer isolante pode passar a comportar-se como condutor, se a intensidade de Campo Eléctrico a que estiver sujeito, ultrapassar certos limites, dá-se então a perfuração do isolante. Haverá electrões que deixam de estar ligados ao núcleo e que passam a comportar-se como electrões livres.

Rigidez dieléctrica – é o máximo valor da intensidade de Campo Eléctrico a que um isolante pode estar sujeito sem perder as suas propriedades de isolante.

Quando num material há movimento ordenado, contínuo e estável de electrões livres, por acção de um Campo Eléctrico exterior, diz-se que existe corrente eléctrica nesse material.

A corrente eléctrica é portanto um movimento ordenado, contínuo e estável de electrões livres, sob o efeito de um Campo Eléctrico exterior aplicado a um material condutor. A corrente cessará quando deixar de actuar o Campo Eléctrico exterior que a originou.

Vejamos o que se passa nos condutores sólidos do «tipo» dos METAIS. À temperatura ambiente, os electrões livres existentes numa dada porção de metal movem-se desordenadamente no seu interior, isto é, há uma agitação de electrões livres no interior do metal. Se considerarmos uma qualquer secção de uma porção de metal, pode dizer-se que o número de electrões livres que atravessam essa secção para um e para outro lado é, em média, igual. Não se pode portanto, considerar a existência de qualquer corrente eléctrica. Aplicando um Campo Eléctrico exterior a essa porção de metal, sobrepor-se–à ao movimento de agitação dos electrões livres, um movimento constante, orientado e ordenado desses electrões livres a que chamamos corrente eléctrica.



Arbitrou-se que o sentido positivo da corrente eléctrica é o sentido oposto ao do movimento dos electrões livres; a corrente eléctrica tem portanto o sentido dos potenciais decrescentes.

Esses electrões livres ao moverem-se vão chocar com as outras partículas estacionárias que formam a rede cristalina do metal (protões, neutrões e electrões não livres); essas colisões são a causa da <u>resistência</u> oferecida pelo material condutor à passagem da corrente.

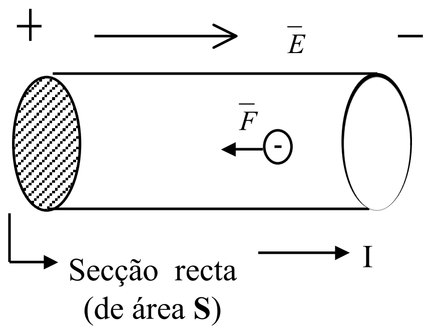
Quando se dá a colisão, o electrão perde parte da energia cinética que o Campo Eléctrico lhe tinha fornecido (porque perde velocidade); essa energia libertada é transmitida ao metal e vai aumentar a energia térmica dos iões e portanto aumentar a temperatura do material condutor (efeito de Joule). Portanto, a passagem da corrente eléctrica provoca um aumento da temperatura do material.

Notar também que o aumento da temperatura faz aumentar a agitação térmica (movimento desordenado) dos electrões livres, logo aumenta o número de colisões entre esses electrões livres e as partículas estacionárias que formam a rede cristalina do metal. Assim, aumenta a resistência do condutor metálico quando aumenta a temperatura, como veremos em seguida.

Após cada colisão os electrões livres são novamente acelerados, pois ficam novamente sujeitos às forças do Campo Eléctrico. O movimento dos electrões livres é portanto uma sucessão de acelerações (provocadas pelas forças do Campo Eléctrico) e desacelerações (provocadas pelos choques) e tudo se passa como se os electrões livres se deslocassem com uma velocidade média constante resultante das diversas acelerações e desacelerações.

1.3. A intensidade de corrente eléctrica

Consideremos um condutor, com a seguinte forma, sob a acção de um campo eléctrico exterior.



$$\begin{cases} \overline{E} = \dfrac{\overline{F}}{q} \\ q < 0 \end{cases}$$

O valor da intensidade de corrente eléctrica depende da "quantidade" de electrões livres que atravessam uma secção recta do condutor, por unidade de tempo.

Suponhamos que **n** electrões atravessam a secção recta de área **S** do condutor, num dado sentido, no intervalo de tempo **t**.

Sendo a carga de cada electrão $\mathbf{q_0}$ então <u>a carga total que atravessa a secção recta **S** do condutor no intervalo de tempo **t**</u>, será

$$\mathbf{Q = n \cdot q_0} \qquad \mathbf{q_0 = -1{,}6 * 10^{-19}\ C}$$

Como veremos mais tarde, a unidade de carga eléctrica é o coulomb (**C**).

A intensidade de corrente eléctrica será a carga total que passa num determinado sentido na secção recta do condutor, na unidade de tempo

$$\boxed{\mathbf{I = \frac{Q}{t}}}$$ Intensidade de corrente eléctrica (I constante)

A intensidade de corrente eléctrica tem como unidade no Sistema Internacional, o **ampere** (**A**).

1.4. Resistência e condutância de um condutor; Resistividade e condutividade de um material

A noção de resistência de um condutor já foi explicada anteriormente no texto. Vamos agora quantificar essa grandeza em função do material usado, do comprimento e secção do condutor em estudo.

Seja **R** a resistência do condutor de comprimento **l** e secção recta **S**; a resistividade (ρ) caracteriza o material usado.

Então teremos que

$$\boxed{\mathbf{R = \rho\ \frac{l}{S}}}$$

$$\text{Unidades no S I}\ \begin{cases} R \rightarrow & \text{ohm } (\ \Omega\ ) \\ \rho \rightarrow & \text{ohm} \times \text{metro } (\ \Omega \times \text{m}\ ) \\ l \rightarrow & \text{metro } (\ \text{m}\ ) \\ S \rightarrow & \text{metro quadrado } (\ \text{m}^2\ ) \end{cases}$$

A grandeza que representa o inverso da resistência (**R**) de um condutor chama-se condutância (**G**); logo teremos $\mathbf{G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l}}$ e se ao inverso da resistividade (ρ) se chamar condutividade (σ), podemos escrever

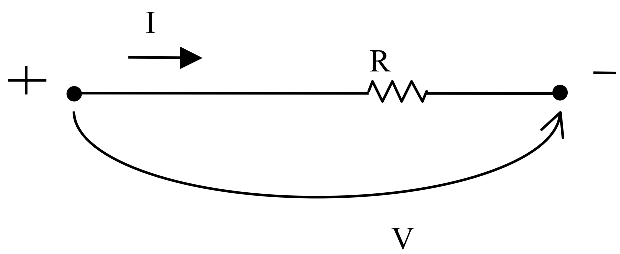
$$\boxed{\mathbf{G = \sigma \frac{S}{l}}}$$

$$\text{Unidades no S I} \begin{cases} G \rightarrow \text{ inverso do ohm } (\Omega^{-1}) \text{ ou siemens (S)} \\ \sigma \rightarrow (\Omega \times m)^{-1} \\ l \rightarrow \text{ metro (m)} \\ S \rightarrow \text{ metro quadrado } (m^2) \end{cases}$$

1.5. Lei de Ohm

A lei de Ohm estabelece a relação entre, a queda de tensão ou diferença de potencial (**V**) aplicada aos terminais do condutor em estudo, a sua resistência (**R**) e a intensidade de corrente (**I**) que então o percorrerá.

Assim, consideremos um dado condutor representado pela sua resistência **R**, aos terminais do qual é aplicada a diferença de potencial ou queda de tensão **V.**



Nessa condições, o condutor será percorrido por uma corrente de intensidade **I**, com o sentido indicado na figura (sentido dos potenciais decrescentes).

A expressão matemática que traduz a lei de Ohm é

$$\boxed{\mathbf{V = R\,I}}$$

E como já vimos, **V** exprime-se em volts, **I** em amperes e **R** em ohms.

1.6. Variação da resistência de um condutor com a temperatura

Consideremos um condutor de resistividade ρ e resistência **R**. Para variações relativamente pequenas da temperatura (por exemplo, variações de 10º C), a lei de variação da resistividade e da resistência com a temperatura são, respectivamente:

$$\boxed{\rho = \rho_0\,[\,1 + \alpha\,(\,\theta - \theta_0\,)\,]}$$

e

$$\boxed{R = R_0\,[\,1 + \alpha\,(\,\theta - \theta_0\,)\,]}$$

Em que

$\theta \rightarrow$ Temperatura mais alta

$\theta_0 \rightarrow$ Temperatura mais baixa

$\rho \rightarrow$ Resistividade à temperatura mais alta (θ)

$\rho_0 \rightarrow$ Resistividade à temperatura mais baixa (θ_0)

$R \rightarrow$ Resistência à temperatura mais alta (θ)

$R_0 \rightarrow$ Resistência à temperatura mais baixa (θ_0)

$\alpha \rightarrow$ Coeficiente de temperatura

As unidades, no SI, de **R** e ρ já são conhecidas; a de θ e θ_0 é o grau celsius e a de α é o inverso do grau celsius (º C)$^{-1}$.

As expressões que caracterizam as leis de variação de resistividade com a temperatura e de resistência com a temperatura são idênticas, uma vez que a resistência de um condutor é proporcional à sua resistividade ($\mathbf{R} = \rho \dfrac{\mathbf{l}}{\mathbf{S}}$)

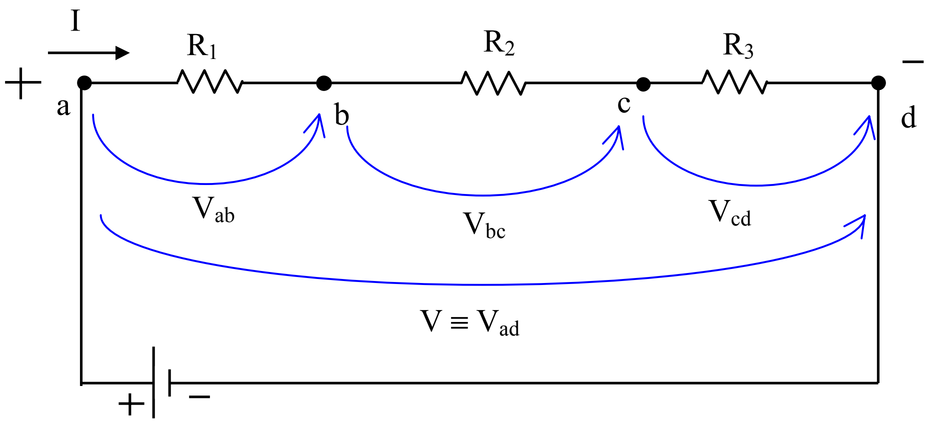
Há substâncias para as quais α é positivo, isto é, a resistividade e portanto a resistência aumentam com a temperatura (é o caso dos metais); para outras substâncias α é negativo e então a resistividade e a resistência diminuem quando a temperatura aumenta (é o que acontece com os líquidos e gases condutores).

Como já se disse anteriormente, nos metais (em que $\alpha > 0$), a agitação térmica caótica dos electrões livres aumenta quando a temperatura aumenta, o que origina um maior número de colisões entre partículas. Deste efeito resulta portanto um aumento da resistência (e da resistividade) nos metais, quando a temperatura aumenta.

1.7. Associação de Resistências

a) Em SÉRIE

Consideremos a seguinte associação de resistências



Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff, podemos escrever:

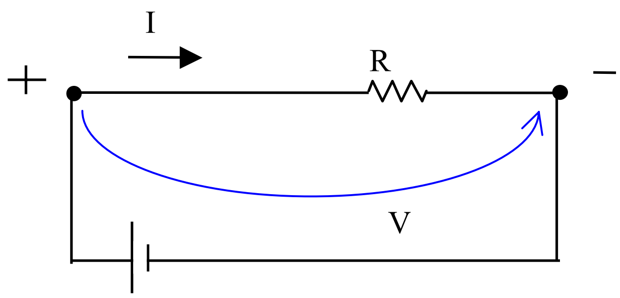
$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_d) = V_a - V_d$$

Todas as resistências (ligadas em série) são percorridas pela mesma corrente **I**; a diferença de potencial ou queda de tensão nos terminais de cada uma das resistências é

$$\mathbf{V_{ab} = R_1\, I} \qquad \mathbf{V_{bc} = R_2\, I} \qquad \mathbf{V_{cd} = R_3\, I}$$

<u>Circuito equivalente</u>

Podemos substituir o conjunto das três resistências $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ e $\mathbf{R_3}$ (em série) por uma só resistência, desde que, quando ambos os circuitos estiverem a ser percorridos pela mesma corrente **I**, tenhamos nos seus terminais a mesma d.d.p. ou queda de tensão **V**. Então teremos



Neste circuito **V = R I**, onde **R** é a <u>resistência equivalente</u> à série de resistências $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$.

Vejamos, agora como relacionar as várias resistências. No primeiro circuito a queda de tensão **V** será igual à soma das várias quedas de tensão entre os terminais das resistências $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$

$$\mathbf{V = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = V_{ad}}$$

e como $\mathbf{V = RI}$ e $\mathbf{V_{ab} = R_1\, I}$ e $\mathbf{V_{bc} = R_2\, I}$ e $\mathbf{V_{cd} = R_3\, I}$

vem que

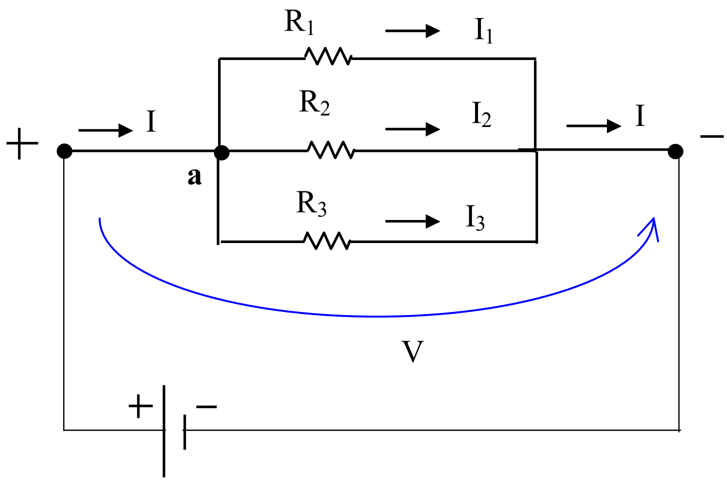
$$\mathbf{R\,I = R_1\,I + R_2\,I + R_3\,I = (\,R_1 + R_2 + R_3\,)\,I}$$

ou seja

$$\boxed{\mathbf{R = R_1 + R_2 + R_3}}$$

b) Em PARALELO

Consideremos a seguinte associação de resistências



Todas as resistências (ligadas em paralelo) apresentam nos seus terminais a mesma queda de tensão **V**. Logo

$$\mathbf{V = R_1\,I_1} \qquad \mathbf{V = R_2\,I_2} \qquad \mathbf{V = R_3\,I_3}$$

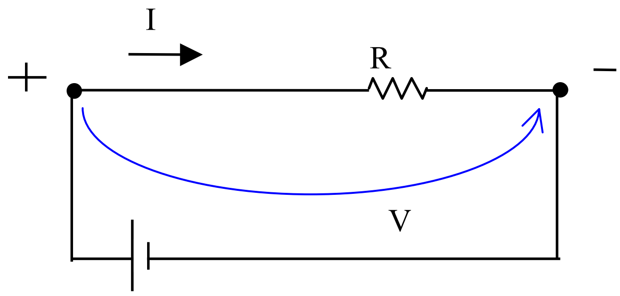
ou seja

$$\mathbf{I_1 = \frac{V}{R_1}} \qquad \mathbf{I_2 = \frac{V}{R_2}} \qquad \mathbf{I_3 = \frac{V}{R_3}}$$

Circuito equivalente

Podemos substituir o conjunto das três resistências $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ e $\mathbf{R_3}$ (em paralelo) por uma só resistência, desde que, quando ambos os circuitos estiverem a ser percorridos pela mesma corrente **I**, tenhamos nos seus terminais a mesma d.d.p. ou queda de tensão **V**.

Então teremos



Neste circuito $\mathbf{V = R\,I}$, logo $\mathbf{I = \frac{V}{R}}$, onde **R** é a resistência equivalente ao paralelo de resistências $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$.

Vejamos, agora como relacionar as várias resistências. A corrente **I** será igual à soma das correntes que percorrem as três resistências $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ (lei dos nós de Kirchhoff)

$$\mathbf{I = I_1 + I_2 + I_3}$$

Caso assim não fosse, era porque haveria acumulação de cargas no ponto **a**, o que não é admissível.

Como $\mathbf{I = \frac{V}{R}}$, $\mathbf{I_1 = \frac{V}{R_1}}$, $\mathbf{I_2 = \frac{V}{R_2}}$ e $\mathbf{I_3 = \frac{V}{R_3}}$

vem que

$$\mathbf{\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V}$$

ou seja

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

NOTA: Caso se esteja a considerar apenas 2 resistências em paralelo, teremos

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \, R_2} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{R = \frac{R_1 \, R_2}{R_1 + R_2}}$$

1.8. Amperímetros e Voltímetros

Os amperímetros são instrumentos de muito baixa resistência interna; os voltímetros, pelo contrário, tem elevada resistência interna.

Sendo assim, num circuito, o modo de ligação, de um amperímetro ou de um voltímetro tem de ser diferente. Os amperímetros ligam-se em série e os voltímetros em paralelo.

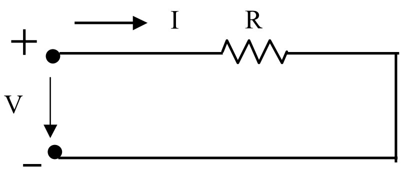
1.9. Lei de Joule. Potência e energia.

Sabe-se já que, quando um condutor é percorrido por corrente, ou seja, quando os electrões livres que nele existem se movimentam por acção de um campo eléctrico exterior, ocorrem choques dos electrões livres com as partículas estacionárias que formam o material.

Então, sempre que há um choque, a energia cinética que o campo eléctrico tinha fornecido aos electrões livres para eles se moverem, anula-se sendo convertida em calor, fazendo aumentar a temperatura do condutor. Há portanto uma transformação da energia do campo eléctrico em calor.

Pode então exprimir-se a quantidade de calor libertada por um condutor, em termos da queda de tensão entre os seus extremos e da corrente que nele circula.

Seja **V** a queda de tensão ou a d.d.p. entre os extremos do condutor e seja **Q** a carga movendo-se através do condutor ($\mathbf{Q = I\,t}$).



Por definição de d.d.p., sabe-se que $\mathbf{V = \frac{W}{Q}}$, isto é, o trabalho realizado pelas forças do campo eléctrico para mover os electrões livres no interior do condutor é

$$\mathbf{W = V\,Q = V\,I\,t}$$

Este trabalho (ou energia), como já se disse, transforma-se em calor sempre que há choques dos electrões livres com as partículas estacionárias do condutor.

Então o calor ou energia de Joule (W_{Joule}) desenvolvida no condutor será

$$\mathbf{W_{Joule} = V\,I\,t}$$

e como $\mathbf{V = R\,I}$ pode escrever-se que

$$\mathbf{W_{Joule} = R\,I^2\,t = \frac{V^2}{R}\,t}$$

$\boxed{\mathbf{W_{Joule} = R\,I^2\,t}}$ Expressão matemática da **Lei de Joule**

A energia eléctrica convertida em calor no tempo **t** num condutor é proporcional ao quadrado de corrente que o percorre.

E a energia eléctrica dissipada por unidade de tempo, ou seja, a <u>potência eléctrica dissipada</u> será $\mathbf{P_{Joule}}$

$$\boxed{\mathbf{P_{Joule}} = \frac{\mathbf{W_{Joule}}}{\mathbf{t}} = \mathbf{V\,I} = \mathbf{R\,I^2} = \frac{\mathbf{V^2}}{\mathbf{R}}}$$

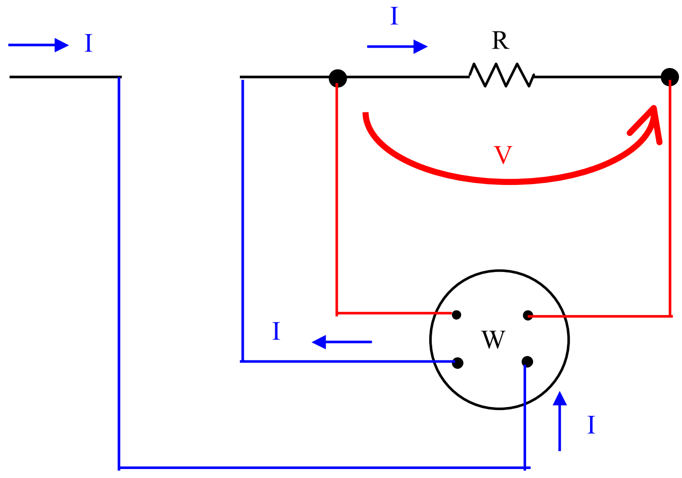
No Sistema Internacional a unidade de <u>potência</u> é o **watt** (**W**) e a unidade de <u>energia eléctrica</u> é o (**W · s**) ou o (**kWh**).

<u>**Aplicações**</u> : A produção de calor em condutores devido à passagem de corrente eléctrica é largamente usada em aplicações práticas. <u>Exemplos</u>: ferro eléctrico; fogão; aquecedores domésticos e industriais ; lâmpadas; etc.

1.10. Wattímetros e contadores de energia

Estes dispositivos também serão estudados na cadeira de Medidas Eléctricas, pelo que só se lhes fará referência.

O <u>wattímetro</u> é um aparelho que permite que se façam directamente leituras de potências eléctricas; a leitura é feita em **watt** ou **kilowatt**



O contador de energia é um aparelho que possibilita a leitura directa da energia eléctrica; a leitura é feita em **kilowatt hora**.

1.11. Geradores e Receptores. Força electromotriz e força contraelectromotriz.

A energia eléctrica é produzida por **geradores**, que são unidades capazes de transformar outras formas de energia em energia eléctrica.

Por exemplo, os alternadores e os dínamos são máquinas geradoras que transformam a energia mecânica em eléctrica; as pilhas e os acumuladores são geradores que transformam energia química em eléctrica; etc.

Por outro lado, a utilização de energia é feita por **receptores**, como por exemplo, os motores que transformam a energia eléctrica em energia mecânica; os acumuladores que transformam a energia eléctrica em energia química; as resistências que transformam a energia eléctrica em energia calorífica; as lâmpadas que transformam a energia eléctrica em energia calorífica e luminosa; etc.

A energia eléctrica pode também ser produzida a partir de outras fontes de energia, tais como : energia nuclear, energia eólica, energia solar, energia das marés etc.

As transformações de energia referidas, podem ser agrupadas em dois conjuntos. O grupo das transformações reversíveis, isto é, passa-se da energia **A** para a energia **B** e posteriormente da energia **B** para a energia **A** (ver o caso do alternador e do motor). E o grupo das transformações irreversíveis em que se passa da energia **A** para energia calorífica (como se sabe, o calor que se liberta para a atmosfera é uma forma de energia irrecuperável depois de produzida).

Nas situações a que se podem associar as transformações reversíveis de energia, é possível definir duas novas grandezas. No caso dos geradores define-se a **força electromotriz (f.e.m.)** e no caso dos receptores define-se a força **contraelectromotriz (f.c.e.m.)**, como veremos de seguida.

Noção de força electromotriz (f.e.m.)

Como se viu a energia eléctrica pode ser originada por diversos processos (conversão de energia mecânica, química, etc.); de qualquer modo o resultado final desse fenómeno é sempre o aparecimento de uma força electromotriz (**E**) que caracteriza a fonte de energia eléctrica e que garante uma determinada diferença de potencial entre os terminais dessa fonte.

Assim, a f.e.m. de um gerador (**E**) pode definir-se como sendo a energia transformada de não eléctrica em eléctrica, por unidade de carga

$$\mathbf{E = \frac{W}{Q}}$$

No Sistema Internacional, a unidade de f.e.m. é o volt (**V**).

Da equação anterior vem que

$$W = E\,Q = E\,I\,t$$

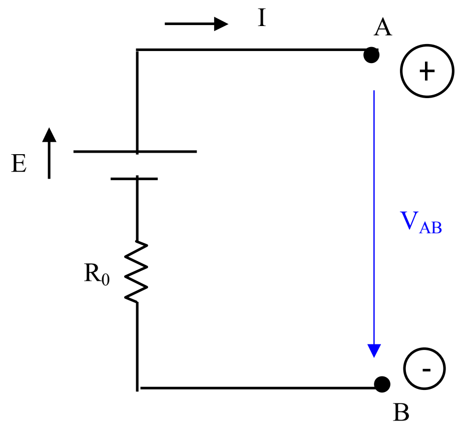
Esta é a energia eléctrica produzida pelo gerador, no tempo t

$$\boxed{\mathbf{W_{produzida\ pelo\ gerador} = E\,I\,t}}$$

E a correspondente potência eléctrica produzida pelo gerador será

$$\boxed{P_{\text{produzida pelo gerador}} = \mathbf{E\ I}}$$

Esquematicamente, um gerador pode ser representado do seguinte modo



$$\mathbf{E = V_{AB} + R_0\ I}$$

$$\mathbf{V_{AB} = E - R_0\ I}$$

logo $\mathbf{V_{AB} < E}$

A tensão ($\mathbf{V_{AB}}$) fornecida pelo gerador para o exterior é menor do que a f.e.m. (**E**) produzida, devido à queda de tensão no interior do próprio gerador ($\mathbf{R_0\ I}$).

Notar que, no <u>interior do gerador</u> o sentido positivo de f.e.m. (**E**) coincide com o sentido positivo de corrente (**I**).

E em termos de potências pode escrever-se que (sendo $\mathbf{E = V_{AB} + R_0\ I}$)

$$\mathbf{E\ I = V_{AB}\ I + R_0\ I^2}$$

onde

$$P_{\text{produzida pelo gerador}} = \mathbf{E\ I}$$

$$P_{\text{fornecida pelo gerador para o exterior}} = \mathbf{V_{AB}\ I}$$

$$P_{\text{perdas no gerador}} = \mathbf{R_0\ I^2}$$

Noção de força contraelecromotriz (f.c.e.m.)

A f.c.e.m. (**E'**) de um receptor (por exemplo, de um motor) pode definir-se como sendo a energia transformada de eléctrica em não eléctrica, por unidade de carga

$$\mathbf{E' = \frac{W}{Q}}$$

No Sistema Internacional, a unidade de f.c.e.m. é o Volt (**V**).

Da equação anterior vem que

$$W = E'\,Q = E'\,I\,t$$

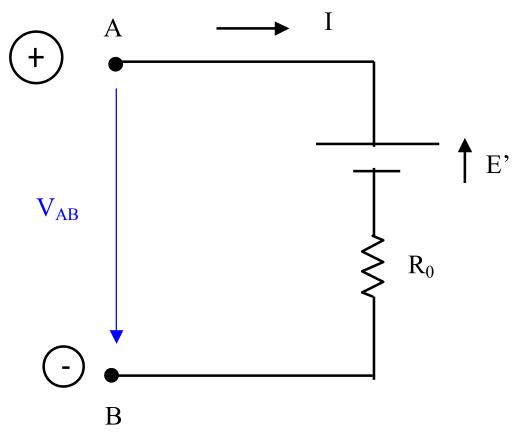
Esta é a energia consumida pelo receptor, no tempo t

$$\boxed{\mathbf{W_{\text{consumida pelo receptor}} = E'\,I\,t}}$$

E a correspondente potência será

$$\boxed{\mathbf{P_{\text{consumida pelo receptor}} = E'\,I}}$$

Esquematicamente, um motor pode ser representado da seguinte forma



$$\mathbf{E' = V_{AB} - R_0\,I}$$

$$\mathbf{V_{AB} = E' + R_0\,I}$$

logo $\mathbf{V_{AB} > E'}$

A tensão ($\mathbf{V_{AB}}$) fornecida do exterior ao receptor é maior do que a f.c.e.m. (**E'**) .

Notar que, no <u>interior do receptor</u> o sentido positivo de f.c.e.m. (**E'**) é oposto ao sentido positivo de corrente (**I**).

E em termos de potência pode escrever-se que (sendo $\mathbf{V_{AB} = E' + R_0\, I}$)

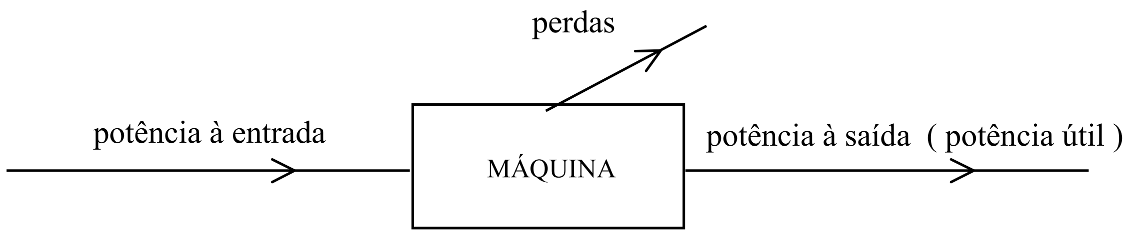
$$\mathbf{V_{AB}\, I = E'\, I + R_0\, I^2}$$

onde

$$\mathbf{P_{\text{recebida pelo receptor do exterior}} = V_{AB}\, I}$$
$$\mathbf{P_{\text{consumida pelo receptor}} = E'\, I}$$
$$\mathbf{P_{\text{perdas}} = R_0\, I^2}$$

<u>Noção de rendimento de uma máquina</u>

Considerada uma máquina qualquer (gerador ou receptor), define-se o rendimento da máquina (η) pelo quociente entre a potência à saída e a potência à entrada da mesma.



$$\eta_{\text{máquina}} = \frac{\textbf{potência à saída (potência útil)}}{\textbf{potência à entrada}}$$

Como

potência à entrada = potência à saída + perdas

obtém-se sempre $\eta < 1$; o rendimento é uma grandeza adimensional e exprime-se em percentagem.

1.12. Leis de Kirchhoff

São as leis fundamentais dos circuitos eléctricos e baseiam-se na lei da conservação de energia.

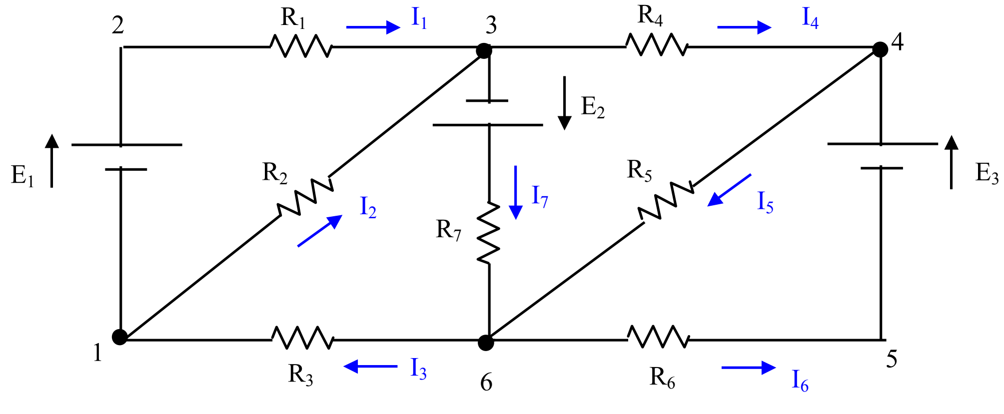
Ramo → é uma parte de um circuito constituída por um elemento ou conjunto de elementos ligados em série e onde portanto a intensidade de corrente é a mesma.

- Ramo activo – se contem força electromotriz
- Ramo passivo – se não contem força electromotriz

Nó → é um ponto do circuito onde concorrem 3 ou mais ramos.

Malha → anel fechado formado por vários ramos.

Exemplo:



O circuito tem 4 nós (1, 3, 4, 6); (2 e 5) são pontos do circuito, mas não são nós

Exemplo de ramo (3 – 4); Exemplo de malha (4 – 5 – 6 - 4)

1ª lei ou **lei dos nós**

$$\boxed{\mathbf{\Sigma\, I = 0}}$$

A soma algébrica das correntes que convergem num nó é nula.

A equação anterior pode também escrever-se

$$\boxed{\mathbf{\Sigma\, I'_{chegam\ ao\ nó} = \Sigma\ \ I''_{saiem\ do\ nó}}}$$

Nota : As correntes que chegam ao nó podem ser consideradas, por exemplo, positivas e as que saem negativas; ou o inverso

2ª lei ou **lei das malhas**

$$\boxed{\mathbf{\Sigma\, E = \Sigma\, R\, I + \Sigma\, V}}$$

A soma algébrica das forças electromotrizes existentes na malha é igual à soma algébrica de todas as quedas de tensão.

A aplicação das leis de Kirchhoff na determinação das correntes de ramo ($I_1 \ldots I_7$) é feita do seguinte modo.

Num circuito com **n** nós podem escrever-se **n-1** equações de nós independentes.

As equações de nós são independentes se em cada nova equação que se escreva existir pelo menos uma corrente que não entrava em nenhuma outra equação anterior.

As equações de malha são independentes se em cada nova equação que se escreva entrar pelo menos um ramo que não existia em nenhuma outra equação anterior.

No exemplo considerado temos 7 correntes de ramo (portanto 7 incógnitas), teremos de escrever 7 equações independentes:

- como há 4 nós, teremos 3 equações de nós independentes.
- faltam então 4 equações, que serão 4 equações de malha independentes.

nó 1 : $I_1 + I_2 = I_3$

nó 3 : $I_1 + I_2 = I_4 + I_7$

nó 4 : $I_4 + I_6 = I_5$

malha 1231 : $E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2$

malha 1361 : $E_2 = R_2 I_2 + R_7 I_7 + R_3 I_3$

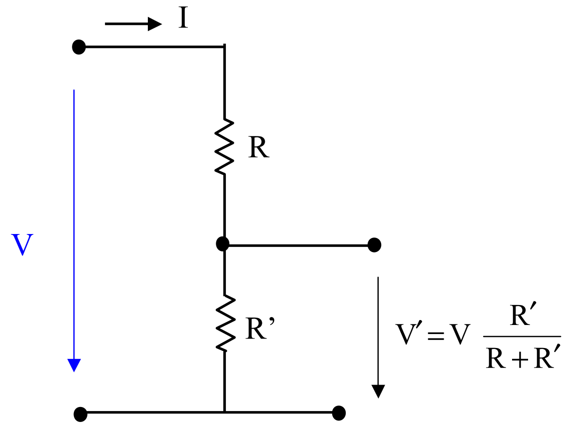
malha 6346 : $- E_2 = R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_7 I_7$

malha 6456 : $- E_3 = - R_6 I_6 - R_5 I_5$

1.13. Divisor de tensão e divisor de corrente

Divisor de tensão

Consideremos o seguinte circuito; dados R, R’ e V, determinar **V’**.



$$\mathbf{V = (R + R')\,I}$$

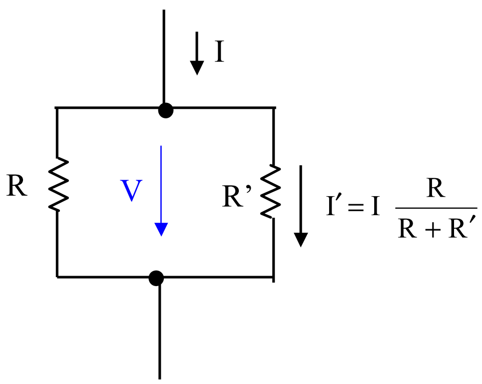
$$\mathbf{I = \frac{V}{R + R'}}$$

$$\mathbf{V' = R'\,I = R'\,\frac{V}{R + R'}}$$

$$\mathbf{V' = V\,\frac{R'}{R + R'}}$$

Divisor de corrente

Consideremos o seguinte circuito; dados R, R’ e I, determinar **I’**.



$$\mathbf{V = R'\,I'}$$

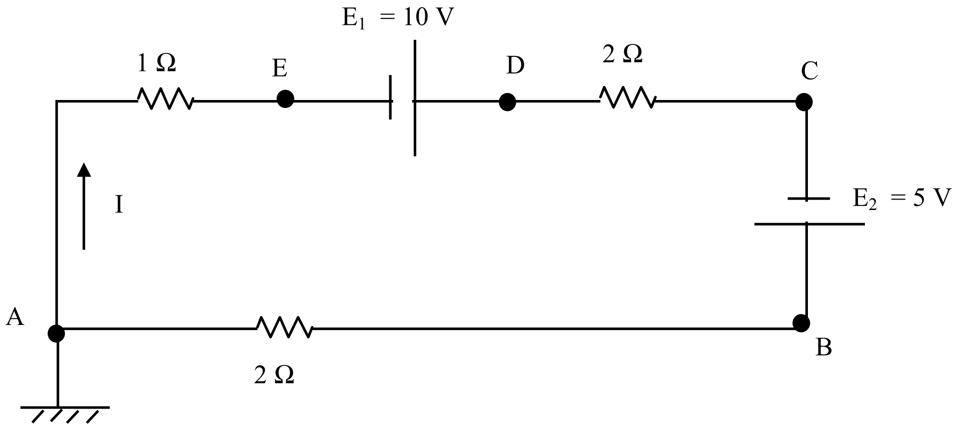
$$\mathbf{V = \left(\frac{R \cdot R'}{R + R'}\right) I}$$

$$\mathbf{R'\,I' = \frac{R \cdot R'}{R + R'}\,I}$$

$$\mathbf{I' = I\,\frac{R}{R + R'}}$$

1.14. Potencial ao longo de um circuito

Considere-se o seguinte circuito



$$E_1 + E_2 = (\ 1 + 2 + 2\ )\ I \qquad \rightarrow \quad I = \frac{15}{5} = 3\ A$$

Como a variação do potencial ao longo de um circuito fechado é nula, pode escrever-se

$$V_{AE} + V_{ED} + V_{DC} + V_{CB} + V_{BA} = (V_A - V_E) + (V_E - V_D) + (V_D - V_C) + (V_C - V_B) +$$
$$+ (V_B - V_A) = 0$$

Então, no nosso exemplo fica

$V_A = 0\ V$ (dado que o ponto A está ligado à terra)

$V_{AE} = V_A - V_E$

$V_E = V_A - V_{AE} = 0 - 3 \times 1 = -3\ V$

$V_{ED} = V_E - V_D$

$V_D = V_E - V_{ED} = -3 - (-10) = 7\ V$

$V_{DC} = V_D - V_C$

$V_C = V_D - V_{DC} = 7 - 2 \times 3 = 1$ V

$V_{CB} = V_C - V_B$

$V_B = V_C - V_{CB} = 1 - (-5) = 6$ V

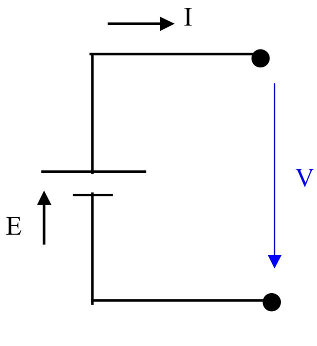
$V_{BA} = V_B - V_A$

$V_A = V_B - V_{BA} = 6 - 3 \times 2 = 0$ V (como queríamos verificar)

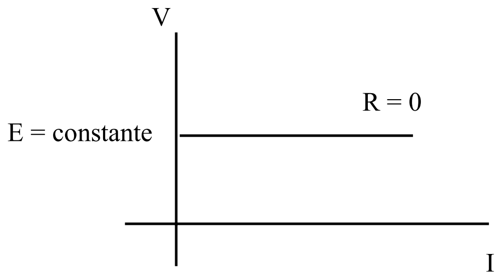
1.15. Fontes de tensão e fontes de corrente

Fontes ideais de tensão

Estas fontes têm tensão **V** constante nos seus terminais, qualquer que seja a corrente **I** fornecida ao exterior.



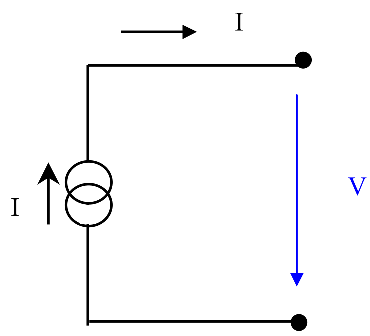
E = V

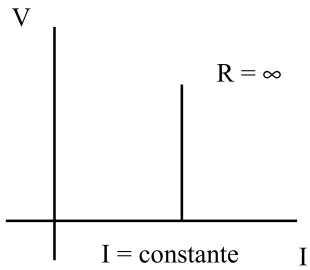


Potência fornecida ao exterior ⇒ $\boxed{\mathbf{P = V\ I}}$

Fontes ideais de corrente

Estas fontes têm corrente **I** constante nos seus terminais, qualquer que seja a tensão **V** fornecida ao exterior.

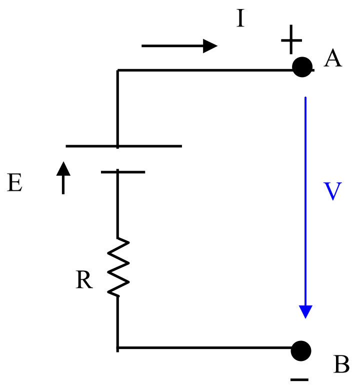




Potência fornecida ao exterior ⇒ $\boxed{\mathbf{P = V\,I}}$

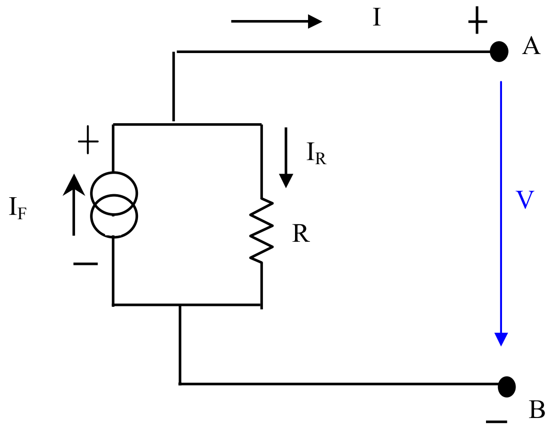
<u>Fontes de tensão e fontes de corrente reais</u>

(1) Fonte de tensão



$$\mathbf{E = V + R\,I}$$

(2) Fonte de corrente



$$\mathbf{I = I_F - I_R}$$

Transformação de uma <u>fonte de tensão</u> em uma <u>fonte de corrente</u> equivalente e vice-versa. Notar que para o exterior dos pontos A e B as duas fontes são equivalentes, isto é, **V** e **I** são iguais nos dois circuitos, ou seja a potência fornecida para o exterior é igual nos dois circuitos.

Passar de **fonte de tensão** para **fonte de corrente**

(1) : $E = V + R\,I \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{E}{R} - \dfrac{V}{R}$

(2) : $\begin{cases} V = R\,I_R \\ I = I_F - I_R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I = I_F - \dfrac{V}{R}$

Para os dois circuitos serem equivalentes, quando se lhes aplica a mesma tensão **V**, as correntes **I** devem ser iguais nos dois circuitos , logo

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{V}{R}\right) = \left(I_F - \frac{V}{R}\right)$$

e portanto

$$\boxed{\mathbf{I_F = \frac{E}{R}}}$$

Passar de **fonte de corrente** para **fonte de tensão**

(2) : $\begin{cases} I = I_F - I_R \\ V = R\,I_R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_R = I_F - I$

$V = R\,I_F - RI$

(1) : $E = V + R\,I \quad \Rightarrow \quad V = E - R\,I$

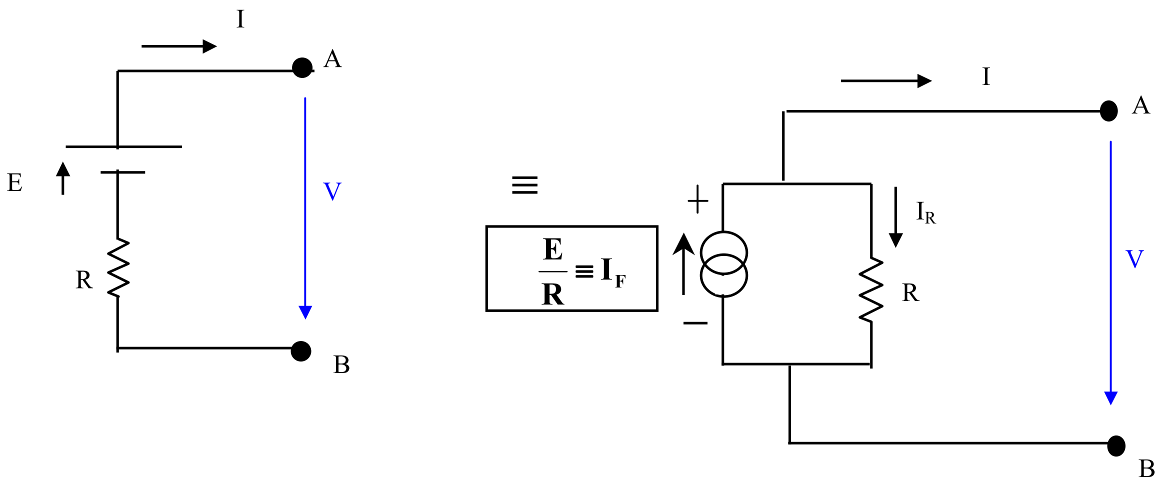
Para os dois circuitos serem equivalentes, quando são percorridos pela mesma corrente **I**, as tensões **V** devem ser iguais nos dois circuitos , logo

$$(R I_F - RI) = (E - RI)$$

e portanto

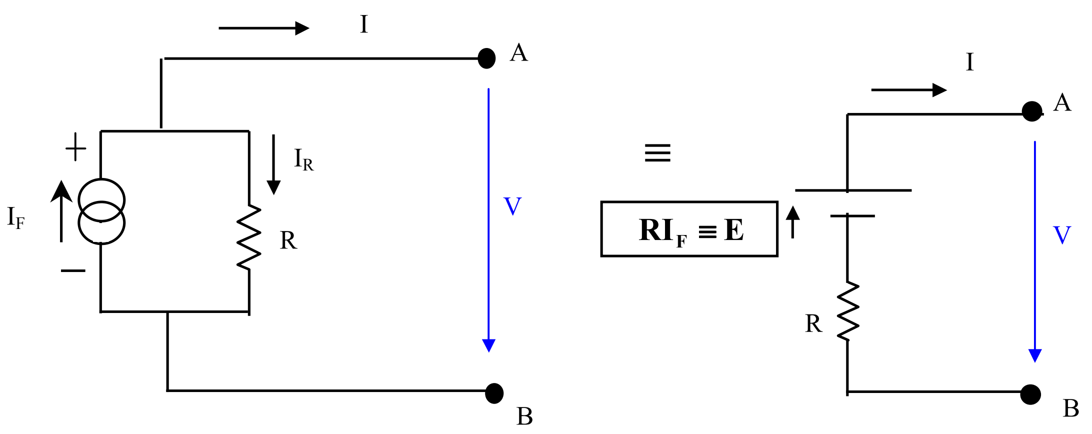
$$\boxed{\mathbf{E = R\, I_F}}$$

<u>Transformação de uma fonte de tensão na fonte de corrente equivalente</u>



Para o exterior de A e B as <u>fontes são equivalentes</u>, isto é, **V** e **I** são iguais nos dois circuitos.

Transformação de uma fonte de corrente na fonte de tensão equivalente



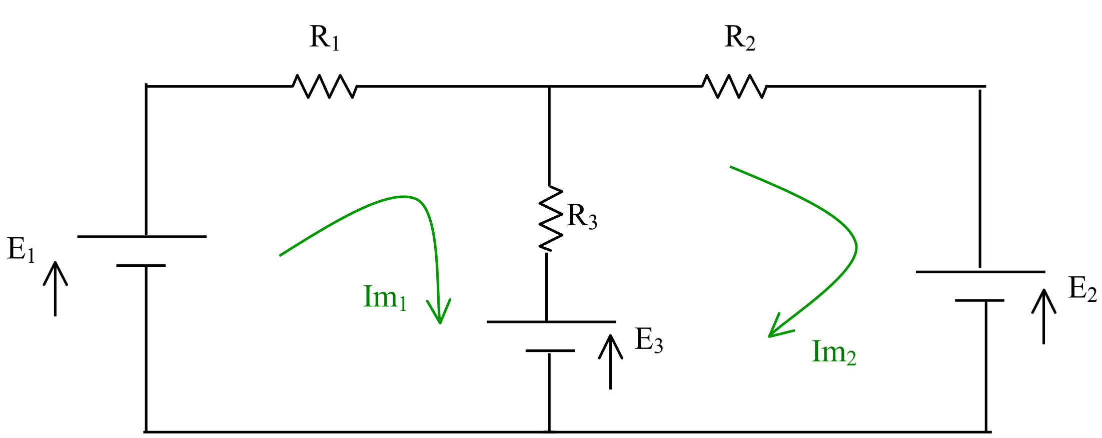
Para o exterior de A e B as fontes são equivalentes, isto é, **V** e **I** são iguais nos dois circuitos.

2. ANÁLISE DE CIRCUITOS LINEARES DE CORRENTE CONTÍNUA

2.1. Método das correntes de malhas independentes

Determinação das correntes de malha

Caso 1 Circuito só com fontes de tensão



Para cada malha do circuito define-se uma corrente, chamada corrente de malha. Haverá ramos percorridos por uma só corrente de malha e outros percorridos por mais do que uma. Aplicando-se a cada malha a 2ª lei de Kirchhoff (leis das malhas) obter-se-á,

$$\begin{array}{l} \text{malha1} \\ \text{malha2} \end{array} \begin{cases} E_1 - E_3 = R_1\, Im_1 + R_3 (Im_1 - Im_2) \\ E_3 - E_2 = R_2\, Im_2 + R_3 (Im_2 - Im_1) \end{cases}$$

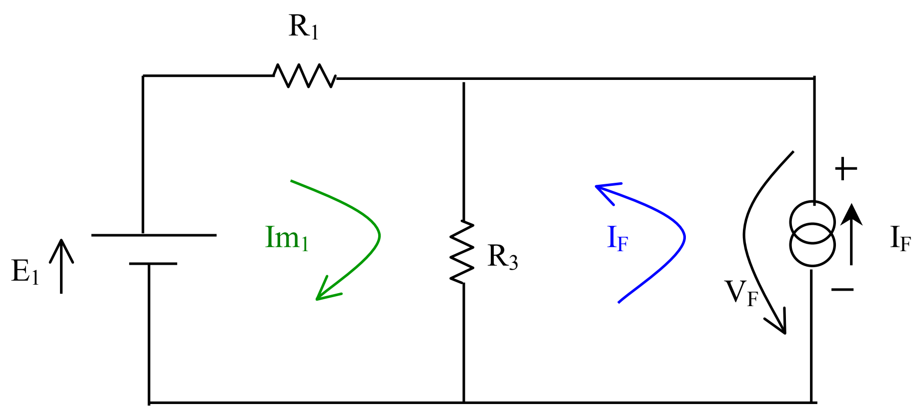
$$\begin{cases} E_1 - E_3 = (R_1 + R_3)\, Im_1 - R_3\, Im_2 \\ E_3 - E_2 = -R_3\, Im_1 + (R_2 + R_3)\, Im_2 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{vmatrix} E_1 - E_3 \\ E_3 - E_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Im_1 \\ Im_2 \end{vmatrix}$$

e daqui calcula-se Im_1 e Im_2 .

Caso 2 Circuito com fontes de tensão e fontes de corrente



Notar que na malha da direita a corrente já é conhecida (I_F). Temos, portanto, só uma incógnita (Im_1).

$$\text{malha } 1 \rightarrow E_1 = R_1 Im_1 + R_3\,(Im_1 + I_F)$$

$$E_1 = (R_1 + R_3)\,Im_1 + \underbrace{R_3\,I_F}_{\text{já conhecido}}$$

e daqui obtém-se o valor de Im_1.

Da 2ª malha pode calcular-se V_F

$$R_3\,(Im_1 + I_F) - V_F = 0$$

$$V_F = R_3\,(Im_1 + I_F)$$

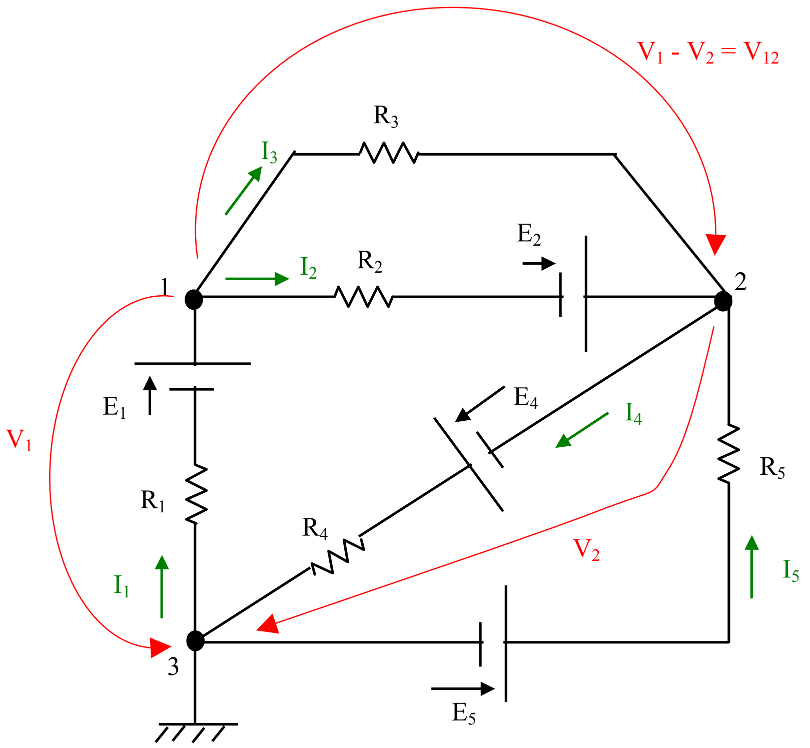
<u>Importante</u> – Numa fonte de corrente, apenas pode passar uma corrente de malha, pois só assim a corrente de malha pode ficar completamente identificada.

2.2. Método das tensões nos nós

Determinação de todas as correntes nos ramos de um dado circuito.

a) Definir os nós do circuito, numerá-los e ligar um nó à terra
b) Definir as quedas de tensão ao longo do circuito
c) Arbitrar correntes nos ramos
d) Escrever as equações de nós do circuito
e) Escrever as equações que definem as correntes nos ramos do circuito, utilizando as equações de malhas de Kirchhoff
f) Substituir essas correntes de ramo nas equações de nós obtidas em d)
g) Resolver o sistema assim obtido em ordem às quedas de tensão **V**
h) Determinar as correntes nos ramos utilizando as quedas de tensão **V**

Como exemplo, considere-se o seguinte circuito



equações de nós

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (\text{nó } 1) \quad \rightarrow \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0 \quad (\text{nó } 2)$$

equações de malhas de Kirchhoff

$$E_1 = V_1 + R_1 I_1$$

$$E_2 = -V_{12} + R_2 I_2 = -(V_1 - V_2) + R_2 I_2$$

$$0 = V_{12} - R_3 I_3 = (V_1 - V_2) - R_3 I_3$$

$$E_4 = -V_2 + R_4 I_4$$

$$E_5 = V_2 + R_5 I_5$$

Das equações de malhas obtêm-se os valores das correntes

$$\left|\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{V_1}{R_1} = G_1E_1 - G_1V_1 \\[2ex] I_2 = \dfrac{E_2}{R_2} + \dfrac{V_1}{R_2} - \dfrac{V_2}{R_2} = G_2E_2 + G_2V_1 - G_2V_2 \\[2ex] I_3 = \dfrac{V_1}{R_3} - \dfrac{V_2}{R_3} = G_3V_1 - G_3V_2 \\[2ex] I_4 = \dfrac{E_4}{R_4} + \dfrac{V_2}{R_4} = G_4E_4 + G_4V_2 \\[2ex] I_5 = \dfrac{E_5}{R_5} - \dfrac{V_2}{R_5} = G_5E_5 - G_5V_2 \end{array}\right.$$

Substituem-se estas correntes nas equações de nós

equações de nós $\left|\begin{array}{l} I_1 = I_2 + I_3 \;\rightarrow\; I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0 \end{array}\right.$

logo

$$\begin{cases} (G_1E_1 - G_1V_1) - (G_2E_2 + G_2V_1 - G_2V_2) - (G_3V_1 - G_3V_2) = 0 \\ (G_2E_2 + G_2V_1 - G_2V_2) + (G_3V_1 - G_3V_2) - (G_4E_4 + G_4V_2) + (G_5E_5 - G_5V_2) = 0 \end{cases}$$

e então ordenando o sistema em função das incógnitas V, obtém-se

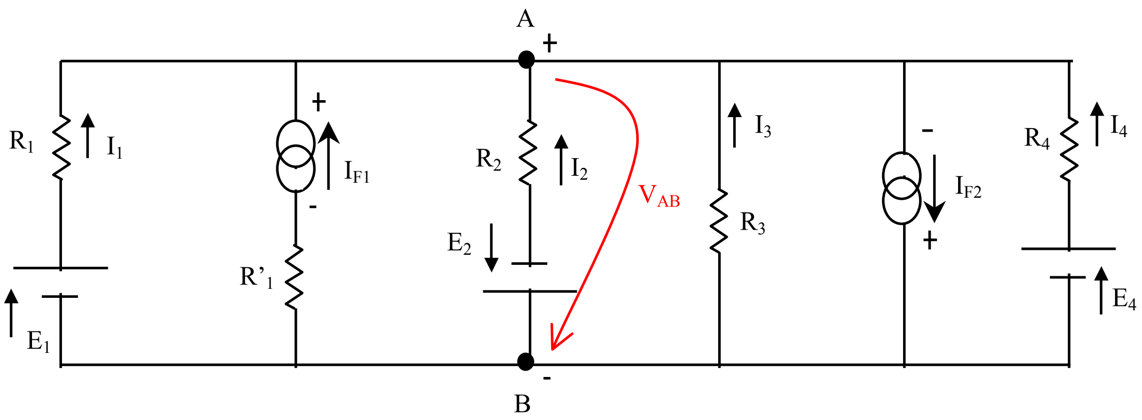
$$\begin{cases} G_1E_1 - G_2E_2 = (G_1 + G_2 + G_3)\,V_1 - (G_2 + G_3)\,V_2 \\ G_2E_2 - G_4E_4 + G_5E_5 = -(G_2 + G_3)\,V_1 + (G_2 + G_3 + G_4 + G_5)\,V_2 \end{cases}$$

Deste sistema determina-se V_1 e V_2 ; seguidamente usando o sistema anterior encontra-se facilmente o valor de I_1, I_2 ,$\cdots$, I_5.

2.3. Método da tensão entre um par de nós

Determinação de todas as correntes nos ramos de um dado circuito.

Considere-se o seguinte circuito; notar que todos os ramos estão ligados em paralelo.



a) nó A $\rightarrow I_1 + I_{F1} + I_2 + I_3 - I_{F2} + I_4 = 0$

b)

Equações de malha de Kirchhoff

$$
\begin{cases}
E_1 = V_{AB} + R_1 I_1 & \longrightarrow \quad I_1 = \dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{V_{AB}}{R_1} = G_1 E_1 - G_1 V_{AB} \\[2ex]
-E_2 = V_{AB} + R_2 I_2 & \longrightarrow \quad I_2 = \dfrac{-E_2}{R_2} - \dfrac{V_{AB}}{R_2} = -G_2 E_2 - G_2 V_{AB} \\[2ex]
0 = V_{AB} + R_3 I_3 & \longrightarrow \quad I_3 = -\dfrac{V_{AB}}{R_3} = -G_3 V_{AB} \\[2ex]
E_4 = V_{AB} + R_4 I_4 & \longrightarrow \quad I_4 = \dfrac{E_4}{R_4} - \dfrac{V_{AB}}{R_4} = G_4 E_4 - G_4 V_{AB}
\end{cases}
$$

c) Substituindo as correntes I_1, I_2, I_3, I_4 na equação do nó A, obtém-se:

$$(G_1E_1 - G_1V_{AB}) + I_{F1} + (- G_2E_2 - G_2V_{AB}) + (- G_3V_{AB}) - I_{F2} + (G_4E_4 - G_4V_{AB}) = 0$$

logo

$$\underbrace{(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)}_{\sum G_K} V_{AB} = \underbrace{(G_1E_1 - G_2E_2 + G_4E_4)}_{\sum G_K E_K} + \underbrace{(I_{F1} - I_{F2})}_{\sum I_{Fk}}$$

$$\mathbf{V_{AB} = \frac{\sum E_K G_K + \sum I_{Fk}}{\sum G_K}}$$

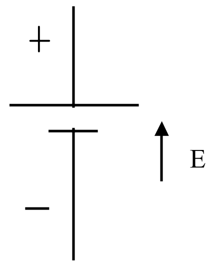
As parcelas do numerador serão positivas, se escrevendo a lei das malhas de Kirchhoff, para V_{AB} positivo se encontrar E_K ou I_{Fk} positivo; serão negativas se para V_{AB} positivo se encontrar E_K ou I_{Fk} negativo.

2.4. Fontes controladas

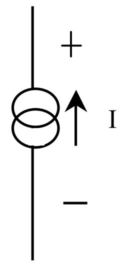
Nos parágrafos anteriores tem-se referido apenas fontes de tensão ou fontes de correntes, ditas <u>independentes</u>. Essas fontes produzem tensões ou correntes que são independentes de quaisquer outras tensões ou correntes existentes noutros pontos do circuito.

Recordem-se os símbolos dessas fontes.

Fonte de tensão



Fonte de corrente

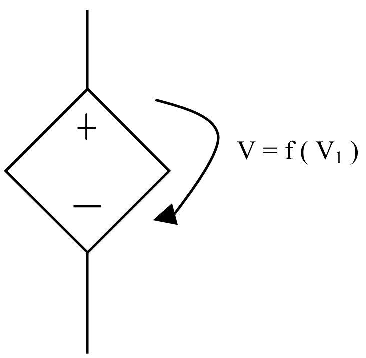


Em contraste, as fontes controladas ou dependentes produzem tensões ou correntes que dependem de outras tensões ou correntes existentes em quaisquer outros pontos do circuito em estudo.

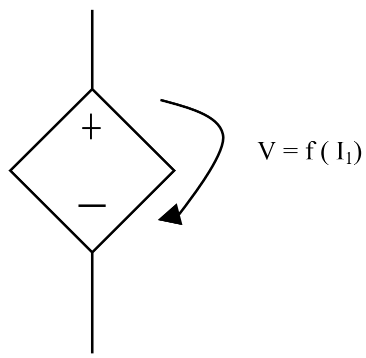
Simbolicamente essas fontes podem representar-se dos seguintes modos

Fontes de tensão

a) controlada por tensão

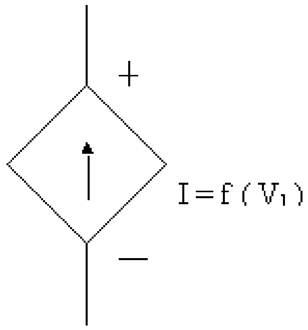


b) controlada por corrente

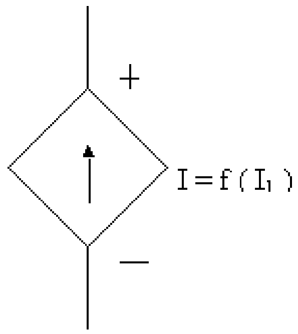


Fontes de corrente

a) controlada por tensão



b) controlada por corrente



2.5. Teorema de sobreposição

Num circuito, qualquer tensão (ou corrente) pode ser calculada como o resultado da soma algébrica das diversas tensões (ou correntes) produzidas individualmente por cada fonte independente do circuito, quando todas as outras fontes independentes existentes no circuito são colocadas em repouso.

Uma fonte de tensão está em repouso se está curto-circuitada (0 volts) e uma fonte de corrente está em repouso se está em circuito aberto (0 amperes).

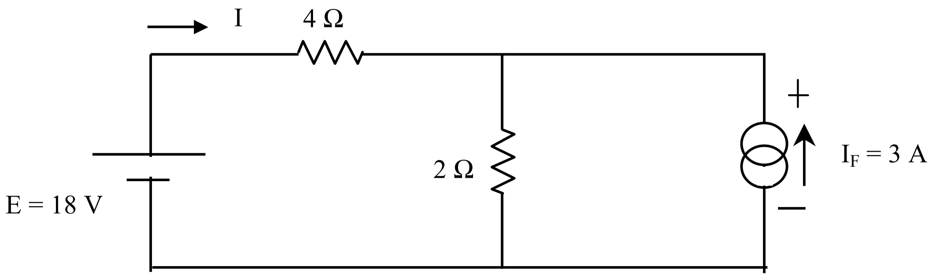
NOTAS:

1 - este teorema apenas se aplica a fontes independentes; as fontes dependentes não são colocadas em repouso.

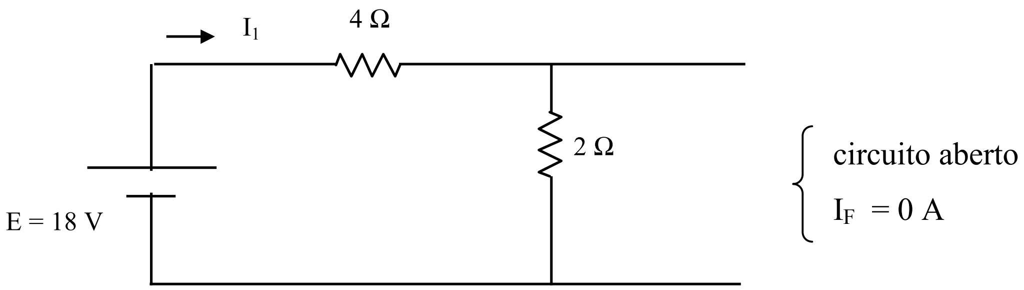
2 – este teorema é sobretudo útil em corrente alternada, onde por vezes é o único método possível de resolução dos problemas

Exemplo :

Determinar a corrente **I** pelo método da sobreposição

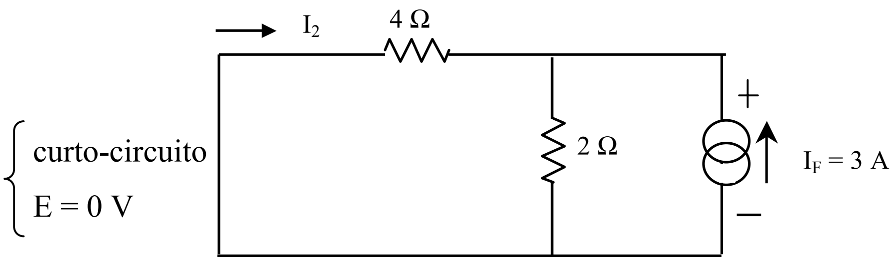


1)



$$E = (4 + 2)\, I_1 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{18}{6} = 3\ \text{A}$$

2)



Divisor de corrente $\rightarrow$ $I_2 = -\, I_F \dfrac{2}{4+2} = -1\ \text{A}$

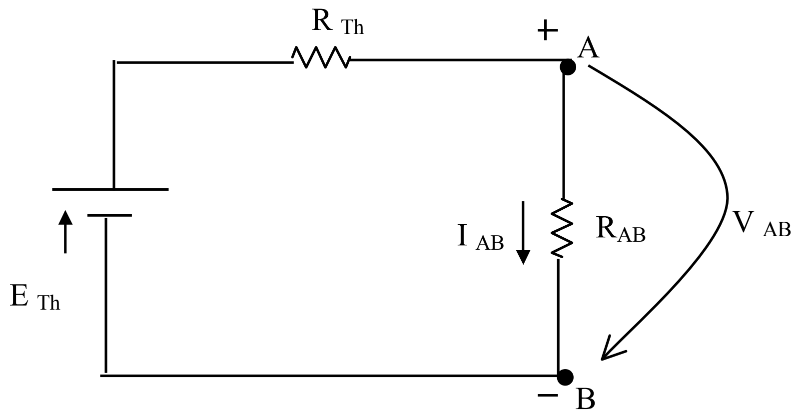
logo

$$I = I_1 + I_2 = 3 - 1 = 2\ A$$

2.6. Teorema de Thèvenin e teorema de Norton

Teorema de Thèvenin

Suponha-se que, dado um circuito qualquer, se pretende calcular apenas a corrente $\mathbf{I_{AB}}$ que passa na resistência $\mathbf{R_{AB}}$. Então pode substituir-se todo o circuito em estudo por uma resistência equivalente em série com uma fonte de tensão equivalente, isto é, substitui-se o circuito inicial pelo seu equivalente de Thèvenin, mantendo entre os pontos A e B o elemento inicial (R_{AB}).



R_{Th} → Resistência equivalente do circuito entre os pontos A e B, quando se curto-circuitam todas as fontes de tensão (independentes) e se abrem todas as fontes de corrente (independentes) do circuito.

E_{Th} → Tensão entre os pontos A e B (V_{AB}) em circuito aberto, isto é, calculada retirando-se R_{AB} do circuito.

$E_{Th} = (V_{AB})_{c.a.}$

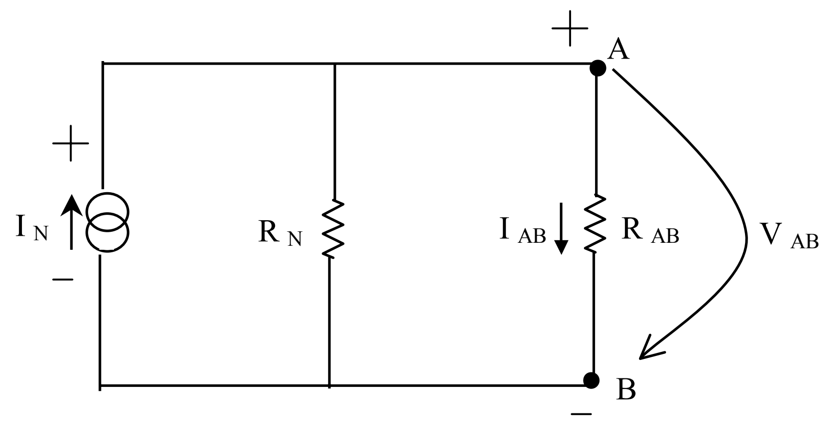
Então, a corrente I_{AB} calcula-se muito facilmente neste circuito simplificado

$$E_{Th} = (R_{Th} + R_{AB}) I_{AB}$$

$$\boxed{I_{AB} = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_{AB}}}$$

Teorema de Norton

Suponha-se que, dado um circuito qualquer, se pretende calcular apenas a corrente $\mathbf{I_{AB}}$ que passa na resistência $\mathbf{R_{AB}}$. Então pode substituir-se todo o circuito em estudo por uma resistência equivalente em paralelo com uma fonte de corrente equivalente, isto é, substitui-se o circuito inicial pelo seu equivalente de Norton, mantendo entre os pontos A e B o elemento inicial (R_{AB}).



R_N → Resistência equivalente do circuito entre os pontos A e B, quando se curto-circuitam todas as fontes de tensão (independentes) e se abrem todas as fontes de corrente (independentes) do circuito.

I_N → Corrente no ramo AB quando os pontos A e B estão curto-circuitados.

$I_N = (I_{AB})_{c.c.}$

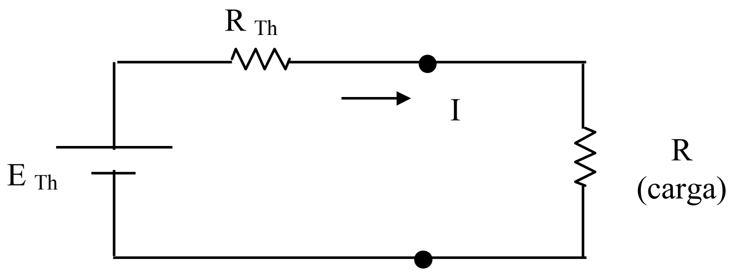
Então, a corrente I_{AB} calcula-se facilmente neste circuito simplificado usando o divisor de corrente

$$\boxed{I_{AB} = I_N \frac{R_N}{R_N + R_{AB}}}$$

2.7. Teorema da máxima transferência de potência

Por vezes é necessário ligar-se um dado circuito a uma carga resistiva variável, de modo a que a carga receba do circuito a máxima potência. Por exemplo, o caso do amplificador e das colunas referido nas aulas.

Deve começar por se representar o circuito em estudo pelo seu equivalente de Thèvenin. Então, pode provar-se que se se escolher a resistência da carga (R) igual à resistência equivalente de Thèvenin (R_{Th}), o circuito transfere para a carga a máxima potência.



A potência transmitida à carga é, como se sabe, R I^2 ; é essa potência que se pretende seja máxima

$$\begin{cases} P_r = R\, I^2 \\ I = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th} + R} \end{cases}$$

Então, fazendo $\mathbf{R = R_{Th}}$, obtém-se a potência máxima

$$\mathbf{P_{R\ (máx)} = R_{Th} \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_{Th}} \right)^2 = \frac{E_{Th}^2}{4\,R_{Th}}}$$

2.8. Noções fundamentais a reter sobre estes capítulos:

- A importância e as consequências do movimento dos electrões livres nos materiais condutores.
- Resistência de um material condutor.
- Intensidade de corrente eléctrica.
- Lei de Ohm.
- Leis de Kirchhoff.
- Potência eléctrica (lei de Joule).
- Força electromotriz e força contraelectromotriz.

2.9. Grandezas e respectivas unidades no SI

GRANDEZAS	UNIDADES
I – Intensidade de corrente	ampere (**A**)
J – Densidade de corrente	ampere/metro^2 (**A/m^2**)
V – Tensão	volt (**V**)
R – Resistência	ohm (**Ω**)
G – Condutância	ohm^{-1} (**Ω**)$^{-1}$
ρ – Resistividade	ohm x metro **(Ω x m**)
σ – Condutividade	(ohm x metro)$^{-1}$ **(Ω x m**)$^{-1}$
E – Força electromotriz	volt (**V**)
E' – Força contra-electromotriz	volt (**V**)
W – Energia eléctrica	watt x segundo (**W x s**)
P – Potência	watt (**W**)
Q – Carga eléctrica	Coulomb (**C**)

2.10. BIBLIOGRAFIA

- FÍSICA - Volume 3
  Sears e Zemansky
  Livros Técnicos e Científicos Editora, SA

- ELECTRICIDADE APLICADA PARA ENGENHEIROS
  L. Bessonov
  Edições Lopes da Silva

- ELECTROTECNIA PARA ENGENHEIROS
  Foullié
  Aguilar

- FUNDAMENTALS OF ELECTRICITY
  F. Evdokimov
  Publicações Mir

- ANÁLISE DE CIRCUITOS
  John O' Malley
  McGraw-Hill

- CIRCUITOS ELÉCTRICOS
  Joseph A. Edminister
  McGraw-Hill

- ANÁLISE DE CIRCUITOS DE ENGENHARIA
  William H. Hayt, Jr. e Jack E. Kemmerly
  McGraw-Hill