

Isabel Maria de Sousa de Jesus

# **Sistemas Dinâmicos de Ordem Fraccionária**



UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO  
VILA REAL, 2007



**Isabel Maria de Sousa de Jesus**

*Aos meus pais*

# **Sistemas Dinâmicos de Ordem Fraccionária**

Tese de candidatura ao grau de doutor em Ciências Exactas Naturais e Tecnológicas - Engenharia Electrotécnica, de acordo com o disposto no n.º 1 do art. 107 do Decreto-Lei n.º 216/92 de 13 de Outubro.



**UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO  
VILA REAL, 2007**



*Aos meus pais*



Tese realizada sob a orientação do  
Professor Doutor José António Tenreiro Machado,  
do Departamento de Engenharia Electrotécnica  
do Instituto Superior de Engenharia do Porto

e co-orientação do  
Professor Doutor José Boaventura Ribeiro da Cunha  
do Departamento de Engenharias  
da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro







Os trabalhos de Investigação apresentados nesta Tese de Doutoramento foram parcialmente financiados por uma bolsa do Programa PRODEP III - Medida 05 - Acção 03 referente ao concurso 2/2003 - Doutoramentos, projecto nº. 05.03/N/00186.021/03.



# Resumo

---

O Cálculo Fraccionário (CF) é o ramo da matemática que generaliza os conhecidos operadores diferencial e integral para ordens não inteiras, podendo estas serem reais ou mesmo complexas. O conceito matemático de derivadas fraccionárias iniciou-se no século XVII e, desde então, foi alvo do interesse de numerosos investigadores. De facto, ao longo dos anos, têm sido várias as publicações que relatam a aplicação do CF em muitas áreas da ciência. Mais ainda, com o objectivo de se estabelecer uma clara relação entre as geometrias fractais e o CF, a comunidade científica tem vindo a desenvolver um considerável número de estudos nestas áreas. Por outro lado, ao nível da teoria dos sistemas e do controlo são várias as aplicações dos controladores de ordem fraccionária  $PI^{\alpha}D^{\beta}$  que têm vindo a ser implementados em aplicações da engenharia.

Tendo por base estas ideias, nesta tese são estudados, sob o ponto de vista do CF, certos fenómenos em várias áreas científicas. Assim, este trabalho apresenta os fundamentais conceitos e propriedades do CF passando-se, em seguida, à sua aplicação em sistemas de difusão, nomeadamente nas linhas eléctricas de transmissão e na difusão de calor. Para o sistema de difusão de calor efectua-se o seu controlo através de algoritmos PID de ordem inteira e de ordem fraccionária, sendo ainda implementada uma estrutura de preditor de Smith.

Segundo uma perspectiva do CF são também estudados alguns fenómenos electromagnéticos, a saber, o efeito pelicular, as correntes de *Eddy* (ou *Foucault*) e o potencial eléctrico. Relativamente ao efeito pelicular são

## *Resumo*

---

estudadas as impedâncias de cabos eléctricos. Para clarificar a modelização das impedâncias efectua-se vários estudos sobre aproximações às altas e às baixas frequências, e apresentam-se índices para quantificar os erros entre os valores das impedâncias e os modelos propostos.

Ainda no campo do electromagnetismo, estuda-se também o potencial eléctrico produzido num filamento com comprimento finito, conduzindo ao conceito de um multipólo fraccionário. Assim, são desenvolvidos dois algoritmos numéricos, um dos quais através dos algoritmos clássicos de programação e um outro através da aplicação de algoritmos genéticos. Os algoritmos visam a distribuição de um determinado número de cargas eléctricas no espaço por forma a obter-se um potencial eléctrico com um perfil desejado. Para tal, os algoritmos determinam o valor das cargas, as suas posições e o potencial eléctrico resultante, minimizando-se o erro da aproximação.

Numa abordagem distinta são medidas e estudadas as impedâncias eléctricas de vegetais e de frutos e é determinado o modelo eléctrico de ordem fraccionária que melhor os descreve. Por último, são implementados e estudados condensadores com texturas fractais.

**Palavras chaves:** Cálculo Fraccionário, Sistemas de Ordem Fraccionária, Linhas Eléctricas de Transmissão, Difusão de Calor, Electromagnetismo, Efeito Pelicular, Correntes de *Eddy*, Potencial Eléctrico, Impedâncias de Ordem Fraccionária, Modelização, Controlador PID, Preditor de Smith, Fractais.

# *Abstract*

---

Fractional Calculus (FC) is a branch of mathematics that generalizes the integral and differential operators to a non-integer order: real or even complex order. The mathematical concept of fractional derivatives has its origins in the 17<sup>th</sup> century being, since then, the subject of interest of many researchers. In fact, along the years, the FC found applications in many areas of science and engineering. Furthermore, with the goal of establishing a clear relation between the fractal geometry and the FC, the scientific community has published an increasing number of studies. On the other hand, in the area of dynamical systems and control, the use of fractional order controllers of type  $PI^\alpha D^\beta$  is well established in several engineering fields.

Having these ideas in mind, this thesis studies several phenomena from a FC perspective in different scientific research areas. Firstly, this work presents the fundamental concepts and properties of the FC followed by its application to diffusion systems, namely in the electrical transmission lines and heat diffusion. The control of the heat diffusion system is performed by adopting PID algorithms, of integer and of fractional order, and a Smith predictor.

Electromagnetic phenomena such as the skin effect, the *Eddy* currents (or *Foucault*) and the electric potential are analyzed by using the tool of FC. The study of the skin effect is concerned with the impedances of electric cables. Therefore, for a more clear understanding of the impedance modeling, various approximations at the low and high frequency range are developed. Also, some indices are presented that evaluate the accuracy of the proposed models.

## *Abstract*

---

Still in the electromagnetism field, the electric potential produced by a straight filament of finite length is also studied, leading to the concept of fractional multipole. Inspired on this concept, two numerical algorithms are developed: a classical one and the other based on genetic algorithms. Here, the goal is to distribute, in the space, a certain number of electric charges in order to generate the desired electric potential. The algorithm calculates the charge values, their positions and the corresponding electric potential, in order to minimize the error of the approximation.

In a distinct approach, the electric impedances of several vegetables and fruits are analyzed and measured. The fractional electric models that better describes these impedances are also developed. Finally, various types of fractal capacitors are studied and implemented.

**Keywords:** Fractional Calculus, Fractional Order Systems, Transmission Lines, Heat Diffusion, Electromagnetism, Skin Effect, *Eddy* Currents, Electric Potential, Fractional Order Impedances, Modeling, PID Controller, Smith Predictor, Fractals.

# Résumé

---

Le calcul fractionnaire est le domaine du Génie où l'on généralise les opérateurs différentiel et intégral pour des ordres non entières, qui peuvent être réelles ou complexes. En mathématique, l'idée de dérivée fractionnaire a pris corps au XVII<sup>ième</sup> siècle et, dès ce moment là, a subit l'intérêt de nombreux chercheurs. En effet, au fil des temps, nous pouvons nous apercevoir de plusieurs publications scientifiques qui font référence à l'utilisation du calcul fractionnaire. D'un coté, la communauté scientifique poursuit des études dans ce domaine avec le but d'établir une relation solide entre le calcul fractionnaire et les géométries fractales. D' un autre coté, on peut constater, au niveau de la théorie des systèmes et de la commande, plusieurs utilisations des contrôleurs d'ordre fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$  dans le domaine du génie.

En puisant dans ces idées l'inspiration nécessaire, cette thèse présente l'étude de différents phénomènes en différents domaines scientifiques, du point de vue du calcul fractionnaire. Ce travail présente, premièrement, les fondements et les propriétés du calcul fractionnaire. En suite, on démontre son application aux systèmes de diffusion, notamment aux lignes de transmission d'énergie électrique et à la diffusion de la chaleur. Pour ce dernier, le contrôle a été fait avec des algorithmes PID, d'ordres entière et fractionnaire, suivi de l'application d'une structure de prédicteur de Smith.

D'après la perspective du calcul fractionnaire, l'étude a aussi concerné quelques effets électromagnétiques, a savoir: l'effet pelliculaire, les courants de Foucault et le potentiel électrique. Pour l'effet pelliculaire il a été nécessaire d'étudier les impédances des lignes électriques. Pour rendre clair les modèles

## *Résumé*

---

établis il a fallu étudier les approximations aux hautes et aux basses fréquences et on présente des indices pour quantifier les déviations entre les valeurs des impédances et ceux des modèles proposés.

En ce qui concerne encore le champ électromagnétique, on a aussi étudié le potentiel électrique produit dans un filament de longueur infinie, ce qui a conduit à l'idée de multi pôle fractionnaire. Ainsi, deux algorithmes numériques ont été développés, l'un d'après les algorithmes classiques et l'autre basé sur des algorithmes génétiques. Ces algorithmes cherchent à connaître la distribution de la charge électrique dans l'espace a fin d'obtenir le bon profil pour décrire le potentiel électrique. Pour faire cela, les algorithmes permettent de calculer la valeur des charges, leurs positions et le potentiel électrique résultant, rendant minimale l'erreur d'approximation.

Dans une autre approche les impédances électriques de plusieurs légumes et fruits on été mesurées et la détermination du modèle fractionnaire qui mieux les décrit a été établi. Finalement, les capacités aux textures fractionnaires on aussi devenues objet de cet étude.

**Mots clef:** Calcul fractionnaire, Systèmes d'ordre Fractionnaire, Lignes Électriques de Transmission, Diffusion de la Chaleur, Électromagnétisme, Effet Pelliculaire, Courants de Foucault, Potentiel Électrique, Impédances d'ordre Fractionnaire, Modélisation, Contrôleur PID, Prédicteur de Smith, Fractales.



# *Agradecimentos*

---

O meu principal agradecimento é para os pais pelo apoio, entusiasmo e compreensão que sempre demonstraram ao longo do meu percurso académico e pelo encorajamento que sempre me transmitiram para ultrapassar as dificuldades.

No decorrer da realização deste trabalho contei também com o apoio de várias pessoas e instituições, que de alguma forma contribuíram para que a sua finalização fosse possível. A todos elas o meu muito obrigado.

Ao meu orientador, Professor Doutor José António Tenreiro Machado, agradeço a forma como orientou os meus trabalhos de Doutoramento, o ensinamento de conhecimentos e a disponibilidade sempre demonstrada ao longo de toda a orientação deste trabalho. Agradeço ainda o esforço conducente à leitura do texto desta tese e as sugestões de revisão que permitiram enriquecer o conteúdo do mesmo.

Outro agradecimento é dirigido ao meu co-orientador, Professor Doutor José Boaventura Cunha, pela disponibilidade sempre apresentada na resolução de burocracias relacionadas com os pedidos de reembolso de despesas, relativas à aquisição de materiais ou a deslocações ao estrangeiro para apresentação de artigos em conferências. Agradeço ainda pelos comentários e sugestões propostas aquando da revisão da escrita deste trabalho, que se revelaram uma mais valia.

Aos meus colegas do grupo de investigação GRIS do Instituto Superior de Engenharia do Porto, em especial ao Ramiro Barbosa, à Cecília Reis, ao

## *Agradecimentos*

---

Manuel Silva e ao Lino Figueiredo pela disponibilidade e amizade sempre reveladas. Um agradecimento especial ao Ramiro Barbosa pelos conceitos que me transmitiu em diversas áreas conducente a este trabalho e pela colaboração prestada na recolha de bibliografia.

Aos colegas Doutor Fernando Duarte, da Escola Superior de Tecnologia de Viseu, ao Doutor Nuno Ferreira, do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra e ao Doutor Eduardo Solteiro Pires, da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, pelas palestras proferidas nos mais diversos temas e pela disponibilidade sempre demonstrada no esclarecimento de algumas questões.

Um outro agradecimento, vai para os departamentos de Engenharia Electrotécnica, Física e Engenharia Química do ISEP, pelo empréstimo de equipamentos de medida e outros materiais que permitiram a realização das experiências práticas descritas neste trabalho.

Agradeço ainda ao Programa PRODEP III - Medida 05 - Acção 03 referente ao concurso 2/2003 - Doutoramentos, projecto nº. 05.03/N/00186.021/03, pela atribuição de uma bolsa de Doutoramento que me permitiu usufruir de dispensa de serviço docente e de verbas para ajuda de custos de deslocações e para a aquisição de livros científicos.

Por último, gostaria de agradecer ao ISEP pelo apoio financeiro concedido para a participação em diversas conferências internacionais.

# Índice

---

<i>Índice</i> .....	xvii
<i>Índice de Figuras</i> .....	xxiii
<i>Índice de Tabelas</i> .....	xxxiii
<b>Capítulo 1 - INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 Motivação e Objectivos .....	3
1.2 Estrutura da Tese .....	4
Referências.....	7
<b>Capítulo 2 - CÁLCULO FRACCIONÁRIO</b> .....	9
2.1 História do Cálculo Fraccionário.....	11
2.2 Bases Matemáticas do Cálculo Fraccionário.....	15
2.2.1 Função Gama.....	15
2.2.2 Função Beta.....	16
2.2.3 Transformada e Convolução de Laplace.....	18
2.2.4 Função Mittag-Leffler .....	19
2.3 Definições.....	21
2.3.1 O Integral Fraccionário .....	21
2.3.1.1 Propriedades .....	23
2.3.2 A Derivada Fraccionária.....	25
2.3.2.1 Definição de Riemann-Liouville.....	25
2.3.2.2 Definição de Caputo.....	28
2.3.2.3 Definição de Grünwald-Letnikov .....	30

2.3.2.4	Propriedades .....	33
2.3.3	Equações Integrais Fraccionárias .....	36
2.3.3.1	Primeiro Tipo .....	36
2.3.3.2	Segundo Tipo .....	38
2.3.4	Equações às Derivadas Fraccionárias .....	40
2.4	Aplicações .....	41
2.4.1	Métodos Numéricos .....	42
2.4.2	Fluxo de Calor na Fronteira de uma Barra Semi-Infinita .....	43
2.4.3	Controlo Fraccionário .....	47
2.4.3.1	Comando CRONE .....	50
2.4.4	Sistemas Eléctricos.....	55
2.4.4.1	Multipólos de Ordem Fraccionária - Electromagnetismo	57
2.4.4.2	Circuitos Eléctricos com Fractais.....	58
2.4.5	Aplicações de Algoritmos Genéticos .....	62
2.5	Conclusões .....	64
	Referências.....	66
 <b>Capítulo 3 - SISTEMAS DE DIFUSÃO.....</b>		<b>77</b>
3.1.	Introdução .....	79
3.2.	Linhas Eléctricas de Transmissão.....	80
3.2.1	Equações Diferenciais Uniformes de Linhas Eléctricas de Transmissão .....	80
3.2.1.1	Equações no Domínio dos Tempos.....	81
3.2.1.2	Resolução de Equações no Domínio dos Tempos .....	83
3.2.1.3	Equações no Domínio das Frequências .....	86
3.3.	Difusão de Calor .....	91
3.4.	Estratégias de Controlo para o Sistema de Difusão de Calor .....	95
3.4.1	Sistemas de Controlo de Ordem Fraccionária.....	102
3.4.1.1	Aproximações aos Operadores de Ordem Fraccionária .	107

3.4.2	Controlador $P_{ZNMA}$ .....	110
3.4.3	Controlador $PID_{ZNMA}$ .....	112
3.4.4	Controlador $PS\_PID_{ZNMA}$ .....	113
3.4.5	$PID^{\beta}$ : Controlador Sintonizado Através dos Índices de Optimização ISE e ITSE.....	115
3.4.6	$PS\_PID^{\beta}$ : Modelo Obtido por ZNMA e o Controlador Sintonizado Através dos Índices de Optimização ISE e ITSE.....	124
3.4.7	$PS\_PID^{\beta}$ : Modelo Obtido Através do Diagrama Polar e Controlador Sintonizado pelos Índices de Optimização ISE e ITSE.....	130
3.5.	Conclusões .....	137
	Referências.....	139
 <b>Capítulo 4 - ELECTROMAGNETISMO</b> .....		145
4.1	Definições.....	148
4.1.1	Equações de Maxwell.....	148
4.1.1.1	Equações Diferenciais de Maxwell.....	149
4.1.1.2	Forma Integral das Equações de Maxwell .....	151
4.1.2	Efeito Pelicular .....	154
4.1.3	Correntes de “Eddy” .....	158
4.2	Perspectiva Fraccionária do EP e do CE.....	162
4.3	Potencial Eléctrico.....	171
4.3.1	Função de Transferência Aproximada de Ordem Fraccionária..	171
4.3.2	Expressões Clássicas do Potencial Eléctrico Estático .....	174
4.4	Implementação do Potencial Eléctrico de Ordem Fraccionária.....	176
4.4.1	Algoritmo Numérico Clássico .....	181
4.4.2	Algoritmos Genéticos.....	189
4.4.2.1	Distribuição Simétrica de Cargas .....	190
4.4.2.2	Distribuição Assimétrica de Cargas.....	197

4.5	Conclusões .....	201
	Referências .....	204
<b>Capítulo 5 - IMPEDÂNCIAS FRACCIONÁRIAS .....</b>		<b>209</b>
5.1.	Impedâncias Fraccionárias .....	212
5.2.	Impedâncias Eléctricas de Ordem Fraccionária em Vegetais e Frutos ..	218
5.2.1	Modelo da Impedância .....	231
5.3.	Geometrias Fractais .....	236
5.4.	Condensadores Fraccionários .....	240
5.5.	Conclusões .....	254
	Referências .....	256
<b>Capítulo 6 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE</b>		
<b>    DESENVOLVIMENTO FUTURO .....</b>		<b>263</b>
6.1	Principais Conclusões .....	264
6.2	Contribuições deste Trabalho .....	267
6.3	Perspectivas de Desenvolvimento Futuro .....	268
<b>Anexo A - DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DO</b>		
<b>    CÁLCULO FRACCIONÁRIO. ....</b>		<b>271</b>
	Referências .....	273
<b>Anexo B - EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS .....</b>		<b>275</b>
B.1	Tipos de EDPs .....	276
B.1.1	Equações Parabólicas .....	279
B.1.2	Equações Hiperbólicas .....	281
B.1.3	Equações Elípticas .....	283
B.2	Soluções Numéricas de Equações às Derivadas Parciais.....	284
B.2.1	Aproximações às Diferenças Finitas .....	285

B.2.2	Método Explícito das Diferenças Finitas.....	287
B.2.2.1	Problemas na Utilização do Método Explícito.....	289
B.2.3	Método Implícito das Diferenças Finitas .....	290
B.3	Soluções Numéricas <i>versus</i> Soluções Analíticas.....	291
B.3.1	Vantagens da Solução Analítica .....	292
B.3.2	Vantagens da Solução Numérica.....	293
	Referências.....	294
 <b>Anexo C - ALGORITMOS GENÉTICOS .....</b>		<b>295</b>
	Referências.....	299
 <b>Anexo D - CARACTERÍSTICA DO APARELHO DE MEDIDA</b>		
<b>    SCOPEMETER 123.....</b>		<b>301</b>
D.1.	Características do ScopeMeter 123.....	301





# Índice de Figuras

---

## Capítulo 2 - CÁLCULO FRACCIONÁRIO

Figura 2.1 - Função Gama. ....	16
Figura 2.2 - Função Mittag-Leffler $E_{\alpha}(-t^{\alpha})$ para $\alpha = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ . ....	20
Figura 2.3 - Função Mittag-Leffler $E_{\alpha}(-t^{\alpha})$ para $\alpha = 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0$ . ....	21
Figura 2.4 - Barra semi-infinita. ....	43
Figura 2.5 - Diagramas de Bode da amplitude e da fase de um integrador fraccionário. ....	49
Figura 2.6 - LGR ilustrando a robustez do comando CRONE no plano $s$ . ....	52
Figura 2.7 - Diagrama de Nichols ilustrativo da robustez do comando CRONE. ....	53
Figura 2.8 - Árvore de fractâncias. ....	59

## Capítulo 3 - SISTEMAS DE DIFUSÃO

Figura 3.1 - Circuito equivalente a uma secção infinitesimal de uma linha de transmissão uniforme (no domínio temporal). ....	82
Figura 3.2 - Resposta temporal de $g(t)$ e de $\tilde{g}(t)$ para $x = 3,0$ m e $k = 0,042$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> . ....	94
Figura 3.3 - Diagrama polar de $G(j\omega)$ e de $\tilde{G}(j\omega)$ para $x = 3,0$ m e $k = 0,042$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> . ....	95
Figura 3.4 - Aproximação de $c(t)$ pelo método (3.33). ....	96
Figura 3.5 - Sistema em malha fechada com um controlador $G_c(s)$ . ....	98

Figura 3.6 - Sistema em malha fechada do preditor de Smith com um controlador $G_c(j\omega)$ . .....	99
Figura 3.7 - Diagrama polar de $G(j\omega)$ , $\tilde{G}(j\omega)$ , $\hat{G}_{ZNMA}(j\omega)$ e $\hat{G}_{POLAR}(j\omega)$ , para $x = 3,0$ m e $k = 0,042$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> . .....	100
Figura 3.8 - Bloco do actuador de saturação. ....	100
Figura 3.9 - Sistema de controlo elementar de ordem fraccionária $\alpha$ com realimentação unitária. ....	103
Figura 3.10 - LGR de $G(j\omega)$ para $1 < \alpha < 2$ , $K \geq 0$ . ....	104
Figura 3.11 - Estrutura geral do controlador $PI^\alpha D^\beta$ . ....	106
Figura 3.12 - Controlador PID: a) inteiro, b) fraccionário. ....	107
Figura 3.13 - LGR de $G(s) = e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}}$ com $G_c(s) = K_p$ , $x = 3.0$ m, $k = 0.042$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> . ....	111
Figura 3.14 - Resposta temporal para $R(s) = 1/s$ e $K_p = 11,221$ . ....	111
Figura 3.15 - Resposta do sistema ao degrau unitário em malha fechada, com o algoritmo $PID_{ZNMA}$ , $x = 3,0$ m. ....	113
Figura 3.16 - Resposta do sistema ao degrau unitário em malha fechada para $PS\_PID_{ZNMA}$ e $PID_{ZNMA}$ , $x = 3,0$ m. ....	114
Figura 3.17 - Valor de $(K, T_i, T_d)$ versus $\beta$ do $PID^\beta$ , para os critérios ISE e ITSE, sem saturação ( $\delta = \infty$ ). Os pontos representam o caso do controlador $PID_{ZNMA}$ . ....	116
Figura 3.18 - Resposta temporal: a) do sistema em malha fechada e b) da saída do controlador, para os índices ISE e ITSE, com o controlador $PID^\beta$ , $\delta = 40$ e $x = 3,0$ m. ....	117
Figura 3.19 - Resposta temporal: a) do sistema em malha fechada e b) da saída do controlador, para os índices ISE e ITSE, com o controlador $PID^\beta$ , $\delta = \infty$ e $x = 3,0$ m. ....	118
Figura 3.20 - Valor de $t_s, t_r, t_p, ov(\%)$ versus $\beta$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador $PID^\beta$ , quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	119

Figura 3.21 - Valor de $t_s, t_r, t_p, ov(\%)$ versus $\beta$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador $PID^\beta$ , quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	120
Figura 3.22 - Valor de $t_s, t_r, t_p$ versus $ov(\%)$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador $PID^\beta$ , quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	121
Figura 3.23 - Valor de $t_s, t_r, t_p$ versus $ov(\%)$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador $PID^\beta$ , quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	122
Figura 3.24 - Energia $E_m$ versus ISE e ITSE para $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $0 \leq \beta \leq 1$ , $x = 3$ m. ....	122
Figura 3.25 - Valor de $(K_p, T_i, T_d)$ versus $\beta$ do $PS\_PID^\beta$ , para os critérios ISE e ITSE ( $\delta = \infty$ ). ....	125
Figura 3.26 - Resposta do sistema em malha fechada ao degrau unitário para o $PS\_PID^\beta$ e para o $PID^\beta$ , para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de $\beta$ , $\delta = 40$ , $x = 3,0$ m. ....	125
Figura 3.27 - Resposta do sistema em malha fechada ao degrau unitário para o $PS\_PID^\beta$ e para o $PID^\beta$ , para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de $\beta$ , $\delta = \infty$ , $x = 3,0$ m. ....	126
Figura 3.28 - Valor de $t_s, t_r, t_p, ov(\%)$ versus $\beta$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{ZNMA}]$ , quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	127
Figura 3.29 - Valor de $t_s, t_r, t_p, ov(\%)$ versus $\beta$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{ZNMA}]$ , quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	128
Figura 3.30 - Energia $E_m$ versus ISE e ITSE para $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m e $0 \leq \beta \leq 1$ . ....	129

Figura 3.31 - Valor de $(K_p, T_i, T_d)$ versus $\beta$ do PS_PID $^\beta$ , para os critérios ISE e ITSE ( $\delta = \infty$ ). .....	131
Figura 3.32 - Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada para o PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{POLAR}$ ], para o PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{ZNMA}$ ] e para o PID $^\beta$ , para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de $\beta$ em todos os casos, $\delta = 40, x = 3,0$ m. ....	132
Figura 3.33 - Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada para o PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{POLAR}$ ], para o PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{ZNMA}$ ] e para o PID $^\beta$ , para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de $\beta$ em todos os casos, $\delta = \infty, x = 3,0$ m. ....	132
Figura 3.34 - Valor de $t_s, t_r, t_p, ov(\%)$ versus $\beta$ da resposta temporal do sistema em malha fechada com o controlador PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{POLAR}$ ], para o ISE, $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ e $x = 3,0$ m. ....	133
Figura 3.35 - Valor de $t_s, t_r, t_p, ov(\%)$ versus $\beta$ da resposta temporal do sistema em malha fechada com o controlador PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{POLAR}$ ], para o ITSE, $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ e $x = 3,0$ m. ....	134
Figura 3.36 - Valor de $t_s, t_r, t_p$ versus $ov(\%)$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{POLAR}$ ], quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	135
Figura 3.37 - Valor de $t_s, t_r, t_p$ versus $ov(\%)$ da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador PS_PID $^\beta$ [ $\hat{G}_{POLAR}$ ], quando $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m. ....	136
Figura 3.38 - Energia $E_m$ versus ISE e ITSE para $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , $x = 3,0$ m e $0 \leq \beta \leq 1$ . ....	136

**Capítulo 4 - ELECTROMAGNETISMO**

Figura 4.1 - Variáveis que servem de base às equações de Maxwell. .... 149

Figura 4.2 - Condutor cilíndrico: a) vista lateral, b) corte longitudinal. .... 156

Figura 4.3 - Linhas de campo magnético em torno de uma corrente  
uniforme num condutor. .... 160

Figura 4.4 - Núcleo de ferro laminado. .... 161

Figura 4.5 - Diagramas da impedância eléctrica teórica  $\tilde{Z}(i\omega)$  e das duas  
funções de aproximação  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.31) e (4.32)  
com:  $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}$ ,  $l_0 = 10^3 \text{ m}$ ,  $r_0 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\mu = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$ :  
a) Polar, b) Amplitude de Bode e c) Fase de Bode. .... 165

Figura 4.6 - Erros relativos: a) Polar, b) Amplitude e c) Fase para as duas  
expressões de aproximações  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.31) e  
(4.32). .... 166

Figura 4.7 - Diagramas da impedância eléctrica teórica  $\tilde{Z}(i\omega)$  e das duas  
funções de aproximação  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.36) e (4.37)  
com:  $l_0 = 1,0 \text{ m}$ ,  $a = 0,28 \text{ m}$ ,  $b = 0,28 \text{ m}$ ,  $d = 2,0 \cdot 10^{-3}\text{m}$ ,  $n = 100$ ,  
 $\sigma = 7,0 \cdot 10^4 \Omega^{-1}\text{m}$ ,  $\mu = 200 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6}\text{H m}^{-1}$ : a) Polar, b) Amplitude de  
Bode e c) Fase de Bode. .... 168

Figura 4.8 - Erros relativos: a) Polar, b) Amplitude e c) Fase para as duas  
expressões de aproximações  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.36) e  
(4.37). .... 170

Figura 4.9 - Circuito eléctrico com associação recursiva de elementos  
resistivos e capacitivos. .... 172

Figura 4.10 - Diagramas de Bode da amplitude e da fase de  $Y(j\omega)$ . .... 173

Figura 4.11 - Potencial eléctrico de: a) carga única, b) dipólo, c) quadripólo,  
d) linha de carga infinita, e) dois filamentos infinitos com duas cargas  
opostas, f) filamento finito com comprimento  $l$  e carga  $q$ . .... 175

Figura 4.12 - Superfície plana com densidade de carga $\sigma$ . .....	176
Figura 4.13 - Comparação do potencial eléctrico $\phi$ <i>versus</i> a distancia $x$ para: a) filamento (4.49) com carga $q = 1$ , comprimento $l = 1$ m, para $y = 0$ , uma única carga (4.43) e uma linha infinita (4.46); b) aproximações para $I_1$ : $0,1 < x < 0,3$ [m] e $I_2$ : $0,2 < x < 0,8$ [m]. . . . .	179
Figura 4.14 - Esquema de posicionamento das cargas. ....	180
Figura 4.15 - Comparação do potencial eléctrico $\phi_{app}$ e $\phi_{ref}$ <i>versus</i> a distância $x$ para $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ [volt], $0,2 < x < 0,8$ [m] e uma aproximação com 5 cargas. ....	182
Figura 4.16 - Erro da aproximação $\min(J)$ <i>versus</i> número de cargas $n$ para $R_1: (r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$ , $R_2: (r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ e $R_3: (r_1; r_2) = (1,5; 1,05)$ , $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ [volt] e $0,2 < x < 0,8$ [m]. ....	183
Figura 4.17 - Comparação do potencial eléctrico $\phi_{app}$ e $\phi_{ref}$ <i>versus</i> a distância $x$ para $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ [volt], $0,2 < x < 0,8$ [m] e uma aproximação com 5 cargas. ....	185
Figura 4.18 - a) Comparação do potencial eléctrico $\phi_{app}$ e $\phi_{ref}$ <i>versus</i> a distância $x$ para $\phi_{ref} = 1,0 x^{1,5}$ [volt], $0,2 < x < 0,8$ [m] e uma aproximação com 5 cargas, b) linhas de potencial correspondentes. ...	186
Figura 4.19 - a) Erro da aproximação $\min(J)$ <i>versus</i> número de cargas $n$ para $I$ : $0,5 < x < 1,0$ , $I'$ : $0,5 < x < 1,5$ e $I''$ : $0,5 < x < 2,0$ , $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ [volt] e $(r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ ; b) Comparação do tempo computacional $T$ <i>versus</i> número de cargas $n$ , para $(r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ , $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ e $0,2 < x < 0,8$ [m]. ....	189
Figura 4.20 - Comparação do potencial eléctrico $\phi_{app}$ e $\phi_{ref}$ <i>versus</i> a distância $x$ para $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ [volt], $0,2 < x < 0,8$ [m] e uma aproximação com 5 cargas - Caso A e Caso B. ....	192
Figura 4.21 - Linhas de campo correspondentes à Figura 4.20 (respectivamente Caso A e Caso B). ....	193

Figura 4.22 - Erro mínimo, médio e máximo da aproximação min ( $J$ ) versus o número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m]. ..... 194

Figura 4.23 - Localização  $x_i$  e grandeza das cargas  $q_i$  para um número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ ,  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m], e para o melhor caso. .... 195

Figura 4.24 - Número de iterações ( $I$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m]. ..... 195

Figura 4.25 - Tempo computacional ( $T$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m]. ..... 196

Figura 4.26 - Comparação do potencial eléctrico  $\varphi_{app}$  e  $\varphi_{ref}$  versus a distância  $x$  para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt],  $0,2 < x < 0,8$  [m] e uma aproximação com 5 cargas. .... 198

Figura 4.27 - Erro mínimo, médio e máximo da aproximação min ( $J$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m]. ..... 199

Figura 4.28 - Localização  $x_i$  e grandeza das cargas  $q_i$  para um número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ ,  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m], e para o melhor caso. .... 199

Figura 4.29 - Número de iterações ( $I$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m]. ..... 200

Figura 4.30 - Tempo computacional ( $T$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m]. ..... 200

## Capítulo 5 - IMPEDÂNCIAS FRACCIONÁRIAS

Figura 5.1 - Circuito RC paralelo e correspondente diagrama Polar da impedância  $Z(j\omega)$ . ..... 214

Figura 5.2 - Circuito eléctrico para medição da impedância botânica  $Z(j\omega)$ . 219

Figura 5.3 – Diagrama de Bode da impedância $Z(j\omega)$ para a batata: a) amplitude b) fase. ....	220
Figura 5.4 – Diagrama polar da impedância $Z(j\omega)$ para a batata. ....	220
Figura 5.5 – Diagramas das partes real e -imaginária da impedância $Z(j\omega)$ para diversos vegetais: a) alho, b) batata, c) cebola, d) cenoura, e) nabo. ....	228
Figura 5.6 – Diagramas das partes real e -imaginária da impedância $Z(j\omega)$ para diversos frutos: a) banana, b) kiwi, c) limão e d) maçã. ....	229
Figura 5.7 – Circuito Randles. ....	231
Figura 5.8 – Diagramas de Bode da amplitude e da fase de $Z(j\omega)$ para diversos vegetais e frutos: a) alho, b) batata, c) tomate, d) kiwi, e) pêra. ....	234
Figura 5.9 – Diagramas polares da impedância $Z(j\omega)$ para diversos vegetais e frutos: a) alho, b) batata, c) tomate, d) kiwi, e) pêra. ....	235
Figura 5.10 – Processo electrolítico. ....	244
Figura 5.11 – Diagrama de Bode da amplitude da impedância $Z(j\omega)$ para a carpete de Sierpinski. ....	244
Figura 5.12 – Diagrama polar da impedância $Z(j\omega)$ para a carpete de Sierpinski. ....	245
Figura 5.13 – Processo electrolítico com solução NaCl e cascalho. ....	246
Figura 5.14 – Comparação de $Z(j\omega)$ para a carpete de Sierpinski, para dieléctricos: NaCl = 5 g/l, NaCl = 5 g/l com cascalho e NaCl = 5 g/l com areia: a) módulo, b) fase. ....	247

## ***Anexo B – EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS***

Figura B.1 - Grelha do plano $xy$ para o método das aproximações às diferenças finitas. ....	287
Figura B.2 - Grelha do plano $ij$ para o método explícito. ....	288



Figura B. 3 - Grelha do plano *ij* para o método implícito. .... 291

***Anexo C - ALGORITMOS GENÉTICOS***

Figura C.1 - Diagrama de blocos dos AGs. .... 296

Figura C.2 - Exemplo de cruzamento (o símbolo | representa o ponto de  
C). .... 297

Figura C.3 - Exemplo de Mutação. .... 298

***Anexo D - CARACTERÍSTICA DO APARELHO DE MEDIDA  
SCOPEMETER 123***

Figura D.1 - Aparelho de medida ScopeMeter 123. .... 302

Figura D.2 - Menu de atribuição a cada canal das medidas a realizar. .... 302

Figura D.3 - Exemplo ilustrativo do funcionamento do aparelho de  
medida. .... 303

## *Índice de Figuras*

---

# Índice de Tabelas

---

## Capítulo 3- SISTEMAS DE DIFUSÃO

Tabela 3.1 - Fórmulas de sintonia do controlador PID. ....	97
Tabela 3.2 - Métodos de discretização de $s \rightarrow z$ . ....	108

## Capítulo 4- ELECTROMAGNETISMO

Tabela 4.1 - Equações de Maxwell nas formas diferencial e integral. ....	154
Tabela 4.2 - Valores das cargas e respectivas localizações para diferentes números de cargas $n = \{ 1, \dots, 7 \}$ quando $R_1: (r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$ e $R_2: (r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ com $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ [volt] e $0,2 < x < 0,8$ [m]. ....	184
Tabela 4.3 - Valores das cargas e respectivas localizações para diferentes números de cargas $n = \{ 1, \dots, 6 \}$ quando $(r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$ , $\varphi_{ref} = 1,0 x^{1,5}$ [volt] e $0,2 < x < 0,8$ [m]. ....	187

## Capítulo 5 - IMPEDÂNCIAS FRACCIONÁRIAS

Tabela 5.1 - Impedância $Z(j\omega)$ e admitância $Y(j\omega)$ de circuitos $RL$ e $RC$ associados em série e em paralelo. ....	215
Tabela 5.2 - Circuitos eléctricos simples, envolvendo um elemento com impedância de ordem fraccionária $C_F$ , uma resistência $R$ e um condensador $C$ . ....	217
Tabela 5.3 - Comparação dos valores de $ Z(j\omega)  \approx a\omega^b$ para diversas amplitudes do sinal de entrada. ....	221
Tabela 5.4 - Valores da resistência de adaptação $R_a$ para os vegetais e para os frutos. ....	223

Tabela 5.5 – Características dos vegetais. ....	223
Tabela 5.6 – Comparação dos valores de $Z(j\omega) \approx a\omega^{-b}$ para diversos vegetais.....	224
Tabela 5.7 – Características dos frutos. ....	225
Tabela 5.8 – Comparação dos valores de $ Z(j\omega)  \approx a\omega^{-b}$ para diversos frutos. ....	226
Tabela 5.9 – Comparação das partes real $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$ e imaginária $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ de diversos vegetais: alho, batata, cebola, cenoura e nabo. ....	230
Tabela 5.10 – Comparação das partes real $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$ e imaginária $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ de diversos frutos: banana, kiwi, limão e maçã. ....	230
Tabela 5.11 – Valores dos elementos do circuito Randles para o alho, a batata, o tomate, o kiwi e a pêra. ....	232
Tabela 5.12 – Estruturas fractais usadas para a criação das placas de circuito impresso. ....	241
Tabela 5.13 – Comparação das partes real e imaginária, $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$ e $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para a carpete de Sierpinski e para os dielétricos: NaCl = 5 g/l, NaCl = 5 g/l com cascalho e NaCl = 5 g/l com areia. ....	247
Tabela 5.14 – Comparação das partes real e imaginária, $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$ e $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para a carpete de Sierpinski com $S = 1$ e $S = 1/3$ . ....	248
Tabela 5.15 – Comparação das partes real e imaginária, $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$ e $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para a carpete de Sierpinski com dielétricos de NaCl = 5 g/l e NaCl = 10 g/l. ....	249
Tabela 5.16 – Comparação das partes real e imaginária, $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$ e $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais <i>versus</i> NaCl = 5 g/l. ....	250

Tabela 5.17 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 5 g/l e cascalho. .... 250

Tabela 5.18 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 5 g/l e areia. .... 251

Tabela 5.19 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 10 g/l. .... 251

Tabela 5.20 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 10 g/l e cascalho. .... 252

Tabela 5.21 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 10 g/l e areia. .... 252

Tabela 5.22 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para eléctrodos de dupla face com os objectos fractais *carpete* e triângulo de Sierpinski. .... 253

## ***ANEXO A - DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DO CÁLCULO FRACCIONÁRIO***

Tabela A.1 - Derivadas e integrais de ordem fraccionária. .... 271

Tabela A.2 - Algumas definições de integrais de ordem fraccionária. .... 272

## ***ANEXO B - EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS***

Tabela B.1 - Equações às derivadas parciais. .... 276

## *Índice de Tabelas*

---

# Capítulo 1

---

## INTRODUÇÃO

O conceito de Cálculo Integral e Diferencial de Ordem Fraccionária remonta ao início da teoria do cálculo integral e diferencial de ordem inteira.

A origem do cálculo fraccionário (CF) surgiu de uma questão levantada por Leibniz, sobre os possíveis valores de  $n$  na expressão  $d^n y/dx^n$ , nomeadamente, se  $n$  poderia ser um número fraccionário, irracional ou complexo. Devido a esta questão ter obtido uma resposta positiva, surgiram as designações de cálculo fraccionário, ou diferenciação e integração de ordem arbitrária [Miller, Ross, (1993)]. Num primeiro relance, o significado físico destes operadores pode surgir obscuro, mas como mais à frente iremos demonstrar, o CF surge naturalmente associado às definições tradicionais. Por exemplo, o significado físico da derivada de ordem  $\frac{1}{2}$  foi demonstrado por Oldham e Spanier, como sendo o operador que representa a difusão num meio semi-infinito. Outro investigador que relatou a existência de sistemas não inteiros foi Alain Méhauté, que demonstrou que certas propriedades físicas associadas à irreversibilidade, ou ao fluxo de energia, estão directamente relacionadas com derivadas de ordem não inteira.

Outra área de interesse ao nível dos sistemas de ordem não inteira prende-se com as estruturas fractais. De facto, alguns trabalhos experimentais, revelaram a existência de uma ligação estreita entre os fractais e as derivadas de ordem não inteira. Mais ainda, esta ligação é essencial para o desenvolvimento de aproximações fiáveis a determinados fenómenos, onde a fractalidade possui um papel fundamental nas leis que os caracterizam [Méhauté, (1991)]. Refira-se, como exemplo, que as derivadas de ordem não inteira revelam-se um método muito eficiente para medir graus de irregularidade de curvas fractais, ou para descrever efeitos do ruído em sistemas onde se pretenda medir um qualquer fenómeno resultante dessas irregularidades.

Numa perspectiva histórica pode-se afirmar que apenas no início do século XX surgiram as primeiras publicações sob o tema do CF. Aliás só em 1974 é que teve lugar a primeira conferência internacional nesta área. Após esta conferência despoletou-se um interesse crescente no CF, tendo surgido várias publicações sob este tema. Mais tarde em 1984 teve lugar a segunda conferência nesta área e, a partir daí, várias outras têm sido realizadas. No entanto, duas delas evidenciaram-se por terem o CF como principal tema, nomeadamente, First IFAC workshop on Fractional Differentiation and its Applications - FDA'04 que decorreu em Bordeaux, França em 2004, e a Second IFAC workshop on Fractional Differentiation and its Applications - FDA'06 que teve lugar no Porto, Portugal em 2006.

No decorrer da segunda metade do século XX, um número considerável de investigadores do CF, publicaram estudos no campo da engenharia. No entanto, a complexidade do CF levou a que, só nos últimos anos tenha conhecido um desenvolvimento mais acentuado em aplicações na física e na química e, mais recentemente, nas áreas da modelização e do controlo. De facto, avanços recentes do CF apontam para aplicações das equações diferenciais e integrais, na física, no processamento de sinal, na dinâmica de fluidos, na



viscoelasticidade, na matemática, na biologia e na electroquímica. Não existem dúvidas de que o CF é um “novo” método matemático para resolver diversos problemas na matemática, na ciência e na engenharia. Por outro lado, o relacionamento ainda não totalmente esclarecido, entre as áreas do caos e dos fractais com o CF motivou um interesse renovado na sua aplicação e o desenvolvimento de um conjunto de estudos num largo espectro de áreas.

Nesta ordem de ideais, neste trabalho de Doutoramento são estudados diversos sistemas físicos, nomeadamente os sistemas das linhas eléctricas de transmissão, os sistemas de difusão de calor, fenómenos electromagnéticos como o efeito pelicular e as correntes de *Eddy* (ou *Foucault*), o potencial eléctrico, impedâncias e condensadores de ordem fraccionária.

## 1.1 *Motivação e Objectivos*

A motivação para o tema proposto “Sistemas Dinâmicos de Ordem Fraccionária” insere-se nas correntes actualmente emergentes que apontam para o desenvolvimento deste tipo de sistemas. Numa primeira fase do trabalho pretende-se estudar os principais conceitos do CF, analisar as metodologias desenvolvidas para a sua implementação e efectuar uma síntese dos trabalhos realizados nas áreas abordadas no âmbito desta tese.

Numa segunda fase do trabalho pretende-se encontrar os modelos dinâmicos para vários fenómenos, a saber as linhas eléctricas de transmissão, a difusão de calor, o efeito pelicular, as correntes de *Eddy*, e o potencial eléctrico, seja a partir de uma formulação matemática, seja a partir de uma formulação com base em algoritmos computacionais. Uma vez estabelecidos os modelos adequados, pretende-se desenvolver a sua simulação e análise dinâmica dos resultados obtidos, apoiados nos conceitos do CF.

Para o sistema de difusão de calor tem-se ainda o objectivo de comparar várias estruturas e algoritmos de identificação e controlo sob os pontos de vista de síntese do projecto, robustez e facilidade de implementação computacional. Tendo em vista a comparação dos algoritmos avalia-se o seu desempenho através de vários índices que incidem sobre o erro e sobre o consumo de energia.

Numa fase posterior, e com um carácter mais prático, realizam-se várias experiências nas quais se pretende medir e analisar as impedâncias de diversos frutos e vegetais. Também aqui são elaborados modelos que descrevam as impedâncias eléctricas. Para finalizar esse estudo pretende-se desenvolver condensadores de ordem fraccionária tendo por base algumas estruturas fractais.

### ***1.2 Estrutura da Tese***

Este documento encontra-se organizado em seis capítulos e quatro anexos.

No Capítulo 1, Introdução, no qual esta secção está inserida, são apresentados os assuntos que compõem esta tese, sendo abordadas as motivações e os objectivos que motivaram a realização deste trabalho. Para finalizar este capítulo faz-se uma descrição dos diversos capítulos e anexos que compõem este trabalho.

No Capítulo 2, Cálculo Fraccionário, é apresentado uma resenha histórica do CF, e são descritos os conceitos principais associados ao CF, nomeadamente a teoria das funções especiais mais importantes para a teoria das derivadas/integrais de ordem fraccionária e para as equações diferenciais fraccionárias, a saber, a função gama, a função beta, a transformada e a

convolução de Laplace e a função Mittag-Leffler. São também apresentadas as definições do integral e da derivada de ordem fraccionária de Riemann–Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov e as propriedades correspondentes. As equações às derivadas e aos integrais de ordem fraccionária são também referidos. São ainda apresentadas algumas das aplicações do CF, desenvolvidas nas áreas científicas que são abordadas no âmbito deste trabalho.

No Capítulo 3, Sistemas de Difusão, são apresentados dois sistemas de difusão, a saber, as linhas eléctricas de transmissão e a difusão de calor. Para ambos os sistemas são apresentadas as equações no domínio dos tempos e das frequências, e são salientados os aspectos principais relacionados com o CF. Para o sistema de calor são apresentadas e comparadas seis estratégias de controlo, baseadas nos conceitos clássicos dos controladores PID (P - proporcional, I - integral, D - derivativo) e nos controladores fraccionários  $PI^\alpha D^\beta$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$ ), para os quais também se descrevem as aproximações aos operadores de ordem fraccionária. A estrutura do preditor de Smith (PS), frequentemente adoptada para o controlo de sistemas com tempo de atraso, é também implementada, sendo o seu desempenho comparado com os controladores de ordem inteira e de ordem fraccionária.

No Capítulo 4, Electromagnetismo, são apresentados os conceitos teóricos do electromagnetismo, nomeadamente as equações de Maxwell, o efeito pelicular e as corrente de *Eddy* (ou *Foucault*), sendo estes dois fenómenos estudados numa perspectiva do CF. O potencial eléctrico é um outro fenómeno estudado, sendo desenvolvidos três algoritmos para a implementação do potencial eléctrico de ordem fraccionária.

Esta tese apresenta ainda no Capítulo 5, Impedâncias Fraccionárias, os conceitos das impedâncias de ordem fraccionária, sendo estudado o caso

prático de frutos e vegetais e sendo desenvolvido o correspondente modelo matemático. São também desenvolvidos condensadores de ordem fraccionária com diversos dieléctricos e eléctrodos inspirados em geometrias fractais.

Por último, no Capítulo 6, Conclusões e Perspectivas de Desenvolvimento Futuro, são tecidas as principais conclusões decorrentes deste trabalho e as principais contribuições. Para finalizar são também apresentadas algumas perspectivas de desenvolvimento futuro.

Na parte final desta tese são ainda apresentados quatro anexos, onde são descritos alguns aspectos referidos no texto principal, mas que se entendeu não ser adequada a sua exposição no decorrer do mesmo, por sobrecarregar desnecessariamente o seu conteúdo.

No Anexo A, Definições do Cálculo Fraccionário, são tabeladas algumas das definições de derivadas e integrais do CF, bem como as derivadas e integrais de algumas funções matemáticas.

No Anexo B, Equações às Derivadas Parciais, são expostos os principais tipos de equações às derivadas parciais, bem como vários métodos para a obtenção das soluções numéricas. Neste anexo são também referidas as principais vantagens das soluções analíticas e das soluções numéricas.

No Anexo C, Algoritmos Genéticos, são introduzidas as principais definições e apresentada a metodologia na qual se baseiam os AG, e que serviram de base aos algoritmos desenvolvidos no decorrer do Capítulo 4.

O texto desta tese conclui-se com o Anexo D, Características do aparelho de medida Scopemeter 123, onde se apresentam as características do aparelho de medida utilizado nas experiências realizadas ao longo do Capítulo 5.

# Referências

---

Miller Kenneth, Bertram Ross, (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Willey & sons, inc. New York.

Méhauté Alain Le, (1991). *Fractal Geometries-Theory and Applications*. Penton Press, London.



# Capítulo 2

---

## CÁLCULO FRACCIONÁRIO

O cálculo fraccionário (CF) é a área da análise matemática que investiga e aplica os conceitos de integrais e derivadas de ordem arbitrária. Este conceito matemático surgiu no ano de 1695, por Leibniz, no decorrer de algumas especulações sobre este tópico, tendo sido iniciado o seu desenvolvimento em 1730 por Euler. Desde esta data, muitos foram os matemáticos que contribuíram com importantes desenvolvimentos teóricos e metodologias de análise do CF, dos quais se salientaram Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, Heaviside, Lévy, entre muitos outros.

O conceito do operador diferencial de ordem  $n$  para uma dada função  $f$  é representado por  $D^n f(x) = d^n f(x)/dx^n$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Surgiram, no entanto, as seguintes questões: e se  $n$  for um número fraccionário? Pode  $n$  ser um número qualquer: fraccionário, irracional ou complexo? De facto, estas perguntas obtiveram uma resposta afirmativa, e foi a partir delas que o conceito de CF surgiu e, por conseguinte, o conceito de derivada e integral de ordem arbitrária. Refira-se que a notação  $d^n f(x)/dx^n$  para números inteiros foi introduzida por Leibniz.

O cálculo integral e diferencial fraccionário foi inicialmente estudado e desenvolvido por Abel, Riemann e Liouville, em paralelo com o cálculo tradicional de ordem inteira. Porém, as aplicações e as bases matemáticas em torno do CF estão longe de serem bem estabelecidas. Enquanto que o cálculo de derivadas e integrais de ordem inteira possui interpretações geométricas e físicas claras, o cálculo de integrais e derivadas de ordem fraccionária não encontra tal interpretação. Enquanto estas não forem definidas (o que se pode revelar uma tarefa difícil), a teoria do CF estará envolta num certo “mistério” que em nada ajudará ao seu desenvolvimento e, em particular, à sua divulgação no meio académico e científico. Indubitavelmente, se tais interpretações forem estabelecidas, a resolução e compreensão de muitos problemas fundamentais da ciência serão significativamente mais directas.

Os modelos matemáticos e a simulação de sistemas e processos, baseados na descrição das suas propriedades em termos das derivadas de ordem fraccionária, leva-nos naturalmente a equações diferenciais de ordem fraccionária e à necessidade de resolução de tais equações. No entanto, não existem modelos gerais para resolver tais problemas, mesmo nos trabalhos mais elaborados envolvendo derivadas e integrais fraccionários.

Os integrais e derivadas fraccionários aparecem também na teoria do controlo de sistemas dinâmicos, quando o sistema ou o próprio controlador são descritos por equações diferenciais fraccionárias.

Tendo este capítulo como base o CF, a sua organização é a seguinte. Na secção 1 é relatado o historial da evolução da teoria do CF, desde o seu surgimento até à actualidade. Na secção 2, e correspondentes subsecções, são apresentadas as bases matemáticas do CF, nomeadamente a função Gama, a função Beta, a transformada e convolução de Laplace e a função Mittag-Leffler. Na secção 3 são apresentadas as definições e respectivas propriedades do



integral e da derivada fraccionários, sendo referida a sua aplicabilidade na resolução de equações diferenciais de ordem fraccionária. Na secção 4 são ilustradas algumas aplicações do CF, as quais são desenvolvidas nas mesmas áreas referidas nesta tese. Por último, na secção 5 são estabelecidas as principais conclusões do Capítulo.

## 2.1 História do Cálculo Fraccionário

Muitos autores remontam a data do surgimento do chamado “Cálculo Fraccionário” a uma carta datada de 30 de Setembro de 1695 que L’Hôpital escreveu a Leibniz, na qual faz referência a uma notação particular que ele havia usado numa das suas publicações, respeitante a uma derivada de ordem

$n$  da função linear  $f(x) = x, \frac{d^n x}{dx^n}$ . L’Hôpital colocou a seguinte questão a

Leibniz, “Qual é o resultado se  $n = \frac{1}{2}$ ?” Leibniz respondeu “É um aparente paradoxo, do qual um dia consequências úteis serão traçadas”. Com estas palavras, nasceu o CF.

Posteriormente à primeira inquirição que L’Hôpital colocou a Leibniz, o estudo do CF foi alvo das mentes mais brilhantes da matemática, nomeadamente por Euler em 1730 [Euler, (1730)], Lagrange em 1772 [Lagrange, (1772)], Laplace (1812), Lacroix em 1820, Fourier em 1822, Abel em 1823, Liouville em 1822–1837 [Liouville, (1832)], Riemann em 1847, Grünwald em 1867, Letnikov em 1868-1872, Laurent em 1884, Heaviside em 1892 – 1912, Weyl em 1917, Lévy em 1923, Davis em 1924 – 1936, Love em 1938, Riesz em 1949, Feller em 1952, entre muitos outros. No entanto, foram Fourier, Euler e Laplace que se dedicaram ao estudo mais aprofundado do CF, assim como das suas consequências na área da matemática. Muitos encontraram, enquanto usavam

as suas próprias notações e metodologias, definições que ajudaram à compreensão dos conceitos de derivada e integral de ordem não inteira. As definições mais conhecidas, e que obtiveram maior popularidade no meio científico, foram as definições de Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov.

Em 1967, Caputo [Caputo, (1967)] reformulou a definição de derivada fraccionária dada por Riemann-Liouville, de maneira a incorporar condições iniciais de ordem inteira na resolução de equações diferenciais de ordem fraccionária. Mais recentemente, em 1996, Kowankar e Gangal [Kowankar e Gangal, (1996)] remodelaram a definição de derivada fraccionária efectuada por Riemann-Liouville, por forma a diferenciar funções fractais que anteriormente não eram diferenciáveis.

Muitas das teorias matemáticas aplicadas ao estudo do CF foram desenvolvidas na segunda metade do século XIX e, portanto, somente no século XX é que surgiram aplicações desta teoria nas áreas da engenharia e da ciência, e foram encontradas explicações físicas úteis para o uso do CF. Este tópico pode, por isso, ser considerado “novo”, já que somente de há trinta anos a esta parte foi objecto de conferências e de revistas na especialidade, sendo a primeira conferência realizada em 1974, tendo o B. Ross como seu organizador. O primeiro livro totalmente dedicado a este tema foi publicado em 1974 por K. B. Oldham e J. Spanier [Oldham e Spanier, (1974)]. Este livro continua a ser considerado por muitos autores como o mais fundamental e importante nesta área da matemática.

Um outro livro escrito por Miller e Ross em 1993 [Miller e Ross, (1993)], é também considerado um livro de referência na área do CF, sendo por isso muito utilizado por vários investigadores, não só para efectuarem breves introduções às teorias de derivadas fraccionárias e equações diferenciais

fraccionárias nos seus trabalhos, mas também para a aplicação dos conceitos nele contidos em várias áreas da ciência e da engenharia.

Hoje em dia, a lista de textos e de artigos, que fazem referência a conceitos e a aplicações do CF, atinge já um número elevado. No entanto, a publicação que se tornou mais proeminente nesta área, foi a “enciclopédia” do CF criada por Samko, Kilbas e Marichev em 1987. Esta enciclopédia foi inicialmente escrita em Russo [Samko, *et al.*, (1987a)], [Samko, *et al.*, (1987b)] e só mais tarde, em 1993, é que surgiu a versão inglesa [Samko, *et al.*, (1993)]. Várias outras publicações revelaram-se de elevada importância para o estudo e análise de alguns dos aspectos matemáticos inerentes ao CF, dos quais se salientam os livros publicados por A. C. McBride [McBride, (1979)], R. Gorenflo e S. Vessella [Gorenflo e Vessella, (1991)], K. Nishimoto [Nishimoto, (1991)], K. S. Miller e B. Ross [Miller e Ross, (1993)], V. Kiryakova [Kiryakova, (1994)], B. Rubin [Rubin, (1996)]. Muitos autores também escreveram partes de livros onde abordaram este tema, nomeadamente F. Mainardi e R. Gorenflo [Gorenflo, (1997)], [Gorenflo e Mainardi, (1997)], [Mainardi, (1997)], no livro [Carpinteri e Mainardi, (1997)], e outros que efectuaram extensas pesquisas nesta área da matemática, dos quais se salientam Yu. Rossikhin e M. Shitikova [Rossikhin e Shitikova, (1997)], Ortigueira em 2000 [Ortigueira, (2000a)], [Ortigueira, (2000b)], Vinagre, *et al.*, 2001 [Vinagre, *et al.*, (2001)], J. T. Machado em 2003 [Machado, (2003)].

Caputo publicou em 1969 um livro [Caputo, (1969)] onde a definição de derivada de ordem fraccionária foi sistematicamente usada para a formulação e resolução de problemas viscoelásticos. Mais ainda, Caputo publicou vários outros artigos em diversas conferências na área da sismologia [Caputo, (1992-1993)]. Alain Oustaloup escreveu também vários livros sobre a aplicação das derivadas fraccionárias na teoria do controlo [Oustaloup, (1983)], [Oustaloup, (1991)], [Oustaloup, (1994)], [Oustaloup, (1995)]. Muitos foram os autores que

também publicaram artigos nesta área, nomeadamente Mark Axtell e Michael Bise em 1990 [Axtell e Bise, (1990)], Guang Geng e G. Geary em 1993 [Geng e Geary(1993)], J. T. Machado em 1995 e 1997 [Machado, (1995)], [Machado, (1997)], Ivo Petrás e Blas Vinagre em 2002 [Petrás e Vinagre (2002)], Calderón, *et al.*, em 2003 [Calderón, *et al.*, (2003)], Barbosa, *et al.*, em 2004 [Barbosa, *et al.*, (2004a)], [Barbosa, *et al.*, (2004b)], Valério e Sá da Costa em 2005 [Valério e Sá da Costa, (2005a)], [Valério e Sá da Costa, (2005b)], [Jesus, *et al.*, (2006b)].

Mais recentemente, o interesse pelo CF na análise numérica estimulou a sua aplicação em diferentes áreas da física, da biologia, da economia e, em particular, na engenharia, nomeadamente na dinâmica dos fluidos, processos de difusão, redes eléctricas, teoria do electromagnetismo, sistemas mecânicos, entre muitas outras, [Machado, *et al.*, (2006)], [Jesus, *et al.*, (2006a)].

Devido às vantagens intrínsecas da aplicação do CF na resolução de diversos problemas matemáticos e, nomeadamente, na resolução de equações diferenciais de ordem fraccionária, foram muitos os autores que publicaram artigos onde o CF foi utilizado para analisar inúmeros problemas físicos, dos quais se salientam Davis em 1936 [Davis, (1936)], Caputo em 1967 [Caputo, (1967)], Gorenflo e Vessella em 1991 [Gorenflo e Vessella, (1991)], Barbosa e Machado em 2002 [Barbosa, *et al.*, (2002)], Pires, *et al.*, em 2003 [Pires, *et al.*, (2003)].

Refira-se ainda que muitas foram as tentativas para mostrar que existe uma relação entre a geometria fractal e o CF. O desenvolvimento dos sistemas fractais abriu perspectivas para a teoria das derivadas fraccionárias, especialmente na modelização dinâmica de processos em estruturas porosas [Mbodje e Montseny, (1995)].

A compreensão das diversas definições e do uso do CF irão ser clarificados através de uma breve, mas necessária, exposição dos conceitos

fundamentais e mais relevantes no CF. Alguns desses conceitos importantes são referidos na próxima secção, como a função Gama, a função Beta, a transformada de Laplace e a função Mittag-Leffler.

## 2.2 Bases Matemáticas do Cálculo Fraccionário

### 2.2.1 Função Gama

Como iremos clarificar adiante, a função Gama está, por definição, relacionada intrinsecamente com o CF. A interpretação mais simples da função Gama consiste na generalização do conceito de factorial para qualquer número arbitrário (real ou complexo). A definição da função Gama é dada pela expressão (2.1):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad z \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.1)$$

A “elegância” da função Gama pode ser encontrada nas seguintes propriedades.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z) = (z-1)! \quad (2.2)$$

Como consequência destas relações para valores inteiros de  $z$  encontra-se a definição usual de factorial. A Figura 2.1 ilustra a função Gama para  $-5 < z < 5$ . De notar que, para valores inteiros negativos, a função Gama vai até infinito; contudo, está definida para valores não inteiros. Esta propriedade é evidenciada através da definição de Euler para a função Gama:

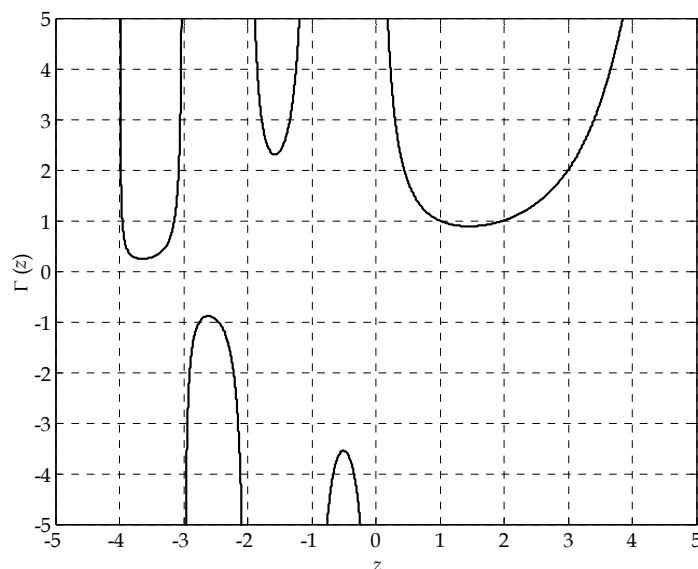


Figura 2.1 - Função Gama.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (2.3)$$

## 2.2.2 Função Beta

A função Beta assume também uma relação importante no âmbito do CF. Em muitos casos é mais conveniente usar a função Beta do que utilizar certas combinações de valores da função Gama. A equação (2.4) mostra a definição desta função através do integral de Beta e a sua relação com a função Gama:

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{q-1} u^{p-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p), p, q \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.4)$$

Com a ajuda da função Beta podemos estabelecer duas importantes relações para a função Gama. A primeira é:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \quad (2.5)$$

A fórmula anterior é obtida para  $0 < \text{Re}(p) < 1$ .

Usando ambas as igualdades de (2.4) podemos escrever:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p,1-p) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1} \frac{dt}{1-t} \quad (2.6)$$

onde o integral converge se  $0 < \text{Re}(p) < 1$ .

A segunda relação importante para a função Gama, facilmente obtida com a ajuda da função Beta, vem dada pela fórmula de Legendre:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2p-1} \Gamma(2p), \quad (2p \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (2.7)$$

Para provar a relação anterior, vamos considerar:

$$B(p,p) = \int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{p-1} d\tau, \quad (\text{Re}(p) > 0) \quad (2.8)$$

Tendo em conta a simetria da função  $y(\tau) = \tau(1-\tau)$ , e efectuando a substituição  $s = 4\tau(1-\tau)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} B(p,p) &= 2 \int_0^{1/2} [\tau(1-\tau)]^{p-1} d\tau \\ &= \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 s^{p-1} (1-s)^{-1/2} ds = 2^{1-2p} B\left(p, \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usando a segunda igualdade de (2.4) obtemos da equação anterior a fórmula de Legendre (2.7).

Tomando  $p = n+1/2$  na expressão (2.7) obtemos uma série de valores particulares da função Gama:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!} \quad (2.10)$$

em que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

### 2.2.3 Transformada e Convolução de Laplace

A Transformada de Laplace é uma função de transformação vulgarmente utilizada para a obtenção da solução de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. Com a transformada de Laplace é possível evitar trabalhar directamente com equações de diferentes ordens de diferenciação, por conversão do problema num domínio onde a solução se apresenta na forma algébrica [Doetsch, (1974)]. A definição formal de transformada de Laplace é dada pela equação:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (2.11)$$

Diz-se que a Transformada de Laplace da função  $f(t)$  existe se (2.11) for um integral convergente.

Uma operação muito utilizada é a convolução de Laplace dada por:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = g(t) * f(t) \quad (2.12)$$



A convolução de duas funções no domínio de  $t$  é, por vezes, difícil de obter. Porém, no domínio de Laplace ( $s$ ), o resultado da convolução é dado por uma multiplicação simples das funções, apresentada em (2.13):

$$\mathcal{L} \{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s) \quad (2.13)$$

Uma propriedade importante da transformada de Laplace a salientar, é a transformada de Laplace de uma derivada de ordem inteira  $n$  da função  $f(t)$ , dada por (2.14):

$$\mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (2.14)$$

### 2.2.4 Função Mittag-Leffler

A função Mittag-Leffler é uma função importante que se encontra vulgarmente na área do CF. Tal como a exponencial surge naturalmente como solução numa equação diferencial de ordem inteira, a função Mittag-Leffler comporta-se de uma forma análoga na solução de equações diferenciais de ordem não inteira.

A definição da função Mittag-Leffler a um parâmetro é dada por (2.15):

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C} \quad (2.15)$$

A função exponencial corresponde a fazer-se  $\alpha = 1$ .

É também usual representar a função Mittag-Leffler com dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\beta$ , descrita pela seguinte equação:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C} \quad (2.16)$$

Esta é a forma mais generalizada da função. Porém nem sempre há a necessidade da sua utilização quando estão a ser usadas equações diferenciais fraccionárias. Caputo, Mainardi e Gorenflo [Caputo e Mainardi, (1971a)], [Caputo, Mainardi, (1971b)], [Mainardi, (1994)], [Mainardi, (1996a)], [Mainardi, (1996b)] [Mainardi e Gorenflo, (1996)], [Gorenflo e Mainardi, (1996)], demonstraram que as funções Mittag-Leffler estão presentes sempre que as derivadas de ordem fraccionária forem introduzidas em equações lineares que descrevam fenómenos viscoelásticos [Mainardi, (1996a)].

Nas Figuras 2.2 e 2.3 é mostrada a evolução da função Mittag-Leffler  $E_{\alpha}(-Kt^{\alpha})$ , para  $K=1$ , considerando diversos valores da ordem  $\alpha$ , nomeadamente para as dinâmicas de relaxação ( $0 < \alpha < 1$ ) e de oscilação ( $1 < \alpha < 2$ ).

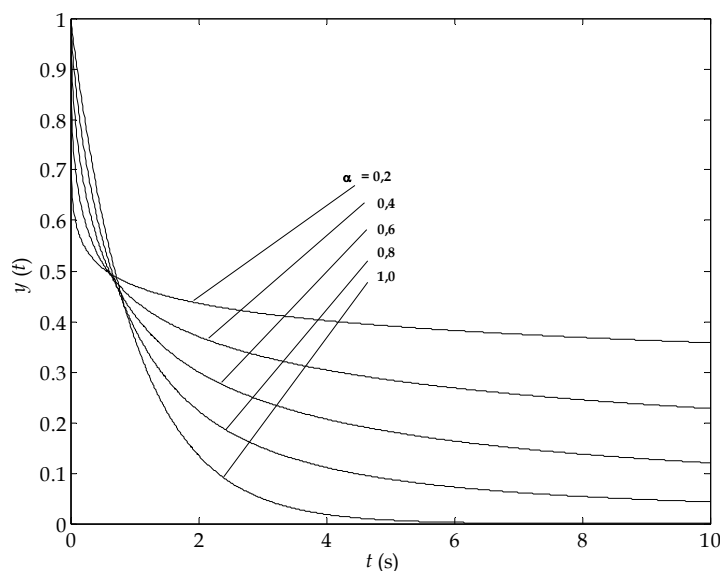


Figura 2.2 – Função Mittag-Leffler  $E_{\alpha}(-t^{\alpha})$  para  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ .

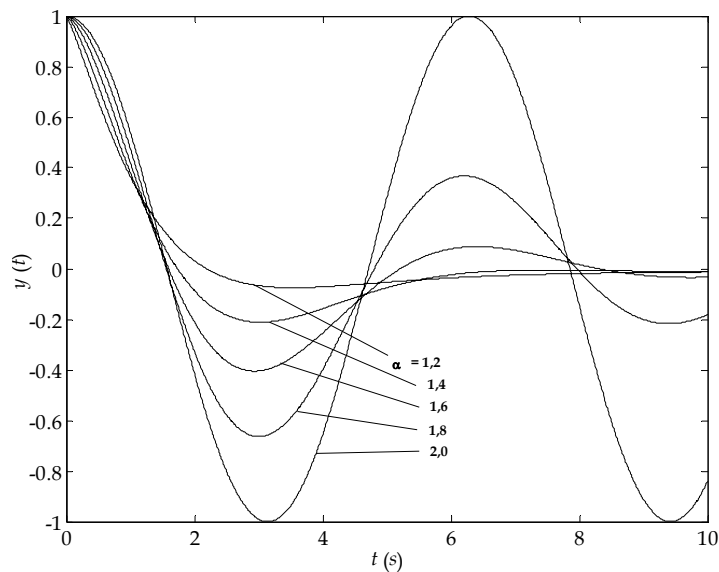


Figura 2.3 – Função Mittag-Leffler  $E_\alpha(-t^\alpha)$  para  $\alpha = 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0$ .

## 2.3 Definições

O cálculo fraccionário é a designação dada à teoria dos integrais e derivadas de ordem arbitrária, que unifica e generaliza as notações de derivadas e integrais de ordem inteira. Nas subsecções seguintes são apresentadas as principais definições de integrais e derivadas de ordem fraccionária. Para complementar o estudo que agora vai ser apresentado, no anexo A intitulado Cálculo Fraccionário estão presentes duas tabelas, uma com as derivadas e integrais de ordem fraccionária de algumas funções matemáticas, e outra com o resumo das definições de derivadas e integrais de ordem fraccionária.

### 2.3.1 O Integral Fraccionário

Foi referido na introdução deste capítulo que a formulação dos conceitos de integrais e derivadas fraccionários representa uma extensão natural dos integrais e derivadas de ordem inteira, do mesmo modo que o expoente

fraccionário segue o expoente clássico de ordem inteira. Esta é a explicação que permitirá, mais à frente, tornar óbvias as observações sobre estes dois operadores.

Similarmente, a formulação comum de um integral fraccionário pode ser derivada directamente da expressão tradicional, pela repetição da integração da função [Samko, *et al.*, (1993)]. Esta aproximação é muitas vezes referida como a abordagem de Riemann-Liouville [Gorenflo e Mainardi, (1997)], [Gorenflo, (1997)]. A expressão (2.17) representa a fórmula usualmente atribuída a Cauchy por análise da integração de ordem  $n$  de uma função  $f(t)$ .

$$\int \dots \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

Para se poder efectuar uma representação mais abreviada desta fórmula, introduziu-se o operador  $J^n$  da seguinte forma:

$$J^n f(t) = f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Frequentemente, é também usual a utilização do operador  $D^{-n}$ , por substituição do operador  $J^n$ .

Para a aplicação directa de (2.17),  $n$  é restringido a um número inteiro. A primeira restrição é o uso do factorial o qual, na sua essência, não tem significado para valores não inteiros. A função Gama é, no entanto, uma expansão analítica do factorial para todos os números reais, e pode ser utilizada no lugar deste, como se referiu em (2.2). Então, por substituição do factorial pela função Gama, podemos generalizar a definição (2.18) para todo o  $\alpha \in \mathfrak{R}^+$ , como se ilustra na equação (2.19).

$$J^\alpha f(t) = f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

### 2.3.1.1 Propriedades

As formulações de integral fraccionário leva-nos a algumas propriedades relevantes que, mais à frente, se revelarão de grande importância, quando resolvermos equações que envolvam integrais e derivadas de ordem fraccionária. Primeiramente, vamos considerar integrais de ordem  $\alpha = 0$  por ser um operador de identidade, ou seja:

$$J^0 f(t) = f(t) \quad (2.20)$$

Dada a natureza da definição de integral, e com base no princípio do qual ele provém (equação do integral de Cauchy), podemos verificar que:

$$J^n J^m = J^{m+n} = J^m J^n, \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (2.21)$$

ou que:

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} = J^\beta J^\alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

A única condição pressupostamente colocada na função  $f(t)$ , que necessita de ser satisfeita para que esta e outras propriedades similares sejam verdadeiras, é que  $f(t)$  seja uma função causal, *i. e.*  $f(t) = 0$  para  $t \leq 0$ . Embora isto seja uma consequência da convenção, a conveniência desta condição é especialmente clara no contexto da propriedade demonstrada em (2.22). Assim temos que  $f(0) = f^n(0) = f^\alpha(0) \equiv 0$ .

Uma outra propriedade do integral de Riemann-Liouville surge após a introdução da função  $\Phi_\alpha$  em (2.23):

$$\Phi_\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \Phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau \quad (2.23)$$

em que  $t_+$  reforça a condição da função ser zero para  $t \leq 0$  e, conseqüentemente, (2.23) ser uma função causal. Da definição de convolução de Laplace referida em (2.12), segue que:

$${}_a J_t^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

Frequentemente,  ${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = {}_a J_t^\alpha f(t)$  é designado por operador integral de Riemann-Liouville. Quando  $a = 0$  a equação (2.24) é designada por definição original de Riemann do integral fraccionário. Se  $a = \infty$  a equação (2.24) representa a definição de Liouville [Debnath, (2003)]. Integrais deste tipo encontram-se normalmente na teoria das equações diferenciais lineares ordinárias, onde temos as conhecidas transformadas de Euler de primeira ordem e os problemas de Cauchy para equações parabólicas.

Agora vamos determinar a transformada de Laplace do integral fraccionário de Riemann-Liouville. Na expressão (2.23) demonstrou-se que o integral fraccionário pode ser expresso através da convolução de duas funções,  $\Phi_\alpha$  e  $f(t)$ . A transformada de Laplace de  $t^{\alpha-1}$  é dada por:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \quad (2.25)$$

Assim, obtida a relação de convolução do integral fraccionário dada por  $\Phi_\alpha$  e demonstrada em (2.23), e da transformada de Laplace da convolução, apresentada em (2.12), a transformada de Laplace do integral fraccionário é:

$$\mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha}F(s) \quad (2.26)$$

onde  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .

### 2.3.2 A Derivada Fraccionária

As definições de derivada de ordem fraccionária consideradas de maior relevância foram desenvolvidas por Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov, sendo apresentadas respectivamente nas subsecções 2.3.2.1, 2.3.2.2 e 2.3.2.3.

#### 2.3.2.1 Definição de Riemann-Liouville

Devido à aproximação de Riemann-Liouville de integral fraccionário ser iniciado com uma expressão para a repetição do integral da função, a primeira ideia poderá ser criar uma aproximação similar para a derivada fraccionária. Para Grünwald e, mais tarde, Letnikov, este foi o método preferido. No entanto, é possível formular a definição para a derivada de ordem fraccionária utilizando a definição análoga já obtida para o integral fraccionário.

A expressão (2.27) ilustra a definição de derivada fraccionária mais conhecida na área do cálculo fraccionário, designada por definição de Riemann-Liouville.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad (m \leq \alpha < m+1) \quad (2.27)$$

Agora vamos considerar algumas das propriedades da derivada fraccionária de Riemann-Liouville.

A primeira, e talvez a mais importante propriedade da derivada fraccionária de Riemann-Liouville, é que para  $\alpha > 0$  e  $t > a$ , temos:

$${}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \right) = f(t) \quad (2.28)$$

Esta propriedade significa que o operador da derivada fraccionária de Riemann-Liouville é a inversa à esquerda do operador integral fraccionário de Riemann-Liouville com a mesma ordem  $\alpha$ .

Para provar a propriedade apresentada em (2.28), consideremos o caso de ordem inteira  $\alpha = n \geq 1$ :

$${}_a D_t^n \left( {}_a D_t^{-n} f(t) \right) = \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t) \quad (2.29)$$

Supondo agora  $k-1 \leq \alpha < k$ , para o integral fraccionário de Riemann-Liouville, podemos escrever:

$${}_a D_t^{-k} f(t) = {}_a D_t^{-(k-\alpha)} \left( {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \right) \quad (2.30)$$

e, desta forma,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \right) &= \frac{d^k}{dt^k} \left\{ {}_a D_t^{-(k-\alpha)} \left( {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \right) \right\} = \\ &= \frac{d^k}{dt^k} \left\{ {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \right\} = f(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

o que prova a propriedade (2.28).

A propriedade (2.28) é um caso particular da propriedade genérica:



$${}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^{-\beta} f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t) \quad (2.32)$$

onde se assume que a função  $f(t)$  é contínua e, se  $\alpha \geq \beta \geq 0$ , então que a derivada  ${}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t)$  existe.

Dois casos devem ser considerados:  $\beta \geq \alpha \geq 0$  e  $\alpha > \beta \geq 0$ .

Se  $\beta \geq \alpha \geq 0$ , então usando a propriedade (2.28) obtemos:

$${}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^{-\beta} f(t) \right) = {}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^{-\alpha} {}_a D_t^{-(\beta-\alpha)} f(t) \right) = {}_a D_t^{-(\beta-\alpha)} = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t) \quad (2.33)$$

Agora consideremos o caso de  $\alpha > \beta \geq 0$  e  $m$  e  $n$  serem números inteiros, tais que  $0 \leq m-1 \leq \alpha < m$  e  $0 \leq n \leq \alpha-\beta < n$ , e obviamente  $n \leq m$ . Então usando a propriedade (2.28) obtemos:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^{-\beta} f(t) \right) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{-(m-\alpha)} \left( {}_a D_t^{-\beta} f(t) \right) \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{\alpha-\beta-m} f(t) \right\} = \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left\{ {}_a D_t^{\alpha-\beta-n} f(t) \right\} = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

A definição de derivada fraccionária de Riemann-Liouville, dada em (2.27), assume assim uma importante relevância no desenvolvimento da teoria de derivadas e integrais de ordem fraccionária, bem como para a sua aplicação em áreas puramente matemáticas, como sejam a solução de equações diferenciais de ordem inteira, somatório de séries, definições de novas classes de funções, etc.. No entanto, as novas tecnologias requerem uma certa melhoria das conhecidas aproximações de carácter puramente matemático. Recentemente, apareceram inúmeros trabalhos, especialmente na teoria de sistemas viscoelásticos e na mecânica, onde as derivadas fraccionárias são

usadas para uma melhor descrição das propriedades de memória e de hereditariedade dos materiais. Por outro lado, são vários os sistemas físicos que necessitam da formulação das condições iniciais para a aplicação nas equações que os descrevem. Nas secções (2.3.3) e (2.3.4), são apresentadas as equações com integrais e derivadas fraccionárias.

### 2.3.2.2 Definição de Caputo

A aproximação desenvolvida por M. Caputo permite a formulação de condições iniciais para problemas de valor inicial em equações diferenciais de ordem fraccionária, envolvendo apenas os valores limites de derivadas de ordem inteira no instante inicial  $t = a$ , tais como  $y'(a)$ ,  $y''(a)$ , etc.

Certas aplicações requerem definições de derivada fraccionária que permitam a utilização de condições iniciais fisicamente interpretáveis, as quais contêm  $f(a)$ ,  $f'(a)$ , etc.. A aproximação de Riemann-Liouville permite a utilização de condições iniciais, mas estas são dadas por derivadas fraccionárias no limite inferior  $t = a$ .

Apesar de os valores iniciais para alguns problemas, com determinadas condições iniciais, poderem ser resolvidos matematicamente com sucesso, as suas soluções são praticamente inúteis, porque não possuem interpretação física para algumas das condições iniciais. Verifica-se assim, um certo conflito entre a teoria matemática pura e a aplicação prática.

Uma solução para este problema foi proposto por M. Caputo, inicialmente num artigo [Caputo, (1967)] e dois anos mais tarde no seu livro [Caputo, (1969)], e mais recentemente por El-Sayed [El-Sayed, (1994)], [El-Sayed, (1995)]. A definição de Caputo é dada por:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - m)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - m}} d\tau, \quad m - 1 < \alpha < m \quad (2.35)$$

Em condições normais da função  $f(t)$ , e para  $\alpha \rightarrow m$  a derivada de Caputo surge como a derivada convencional de ordem  $m$  da função  $f(t)$ . No entanto, vamos considerar que  $0 \leq m - 1 < \alpha < m$  e que  $f(t)$  possui  $m + 1$  incrementos contínuos da derivada no intervalo  $[a, t]$  para todo o  $t > a$ . Então:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow m} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow m} \left( \frac{f^{(m)}(a)(t - a)^{m - \alpha}}{\Gamma(m - \alpha + 1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(m - \alpha + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \right) \quad (2.36) \\ &= f^m(a) + \int_a^t f^{(m+1)}(\tau) d\tau = f^{(m)}(t), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

De forma similar às aproximações de Grünwald-Letnikov e de Riemann–Liouville, a aproximação de Caputo permite também uma interpolação com as derivadas de ordem inteira.

A principal vantagem da aproximação de Caputo resulta do facto que as condições iniciais para as equações diferenciais fraccionárias com derivadas de Caputo, são as mesmas que se consideram para o caso das equações diferenciais de ordem inteira. Por outras palavras, contém os valores limites das derivadas de ordem inteira no seu limite inferior  $t = a$ .

Devido ao facto de não haver uma interpretação física para as condições iniciais fraccionárias, Caputo e Mainardi [Caputo e Mainardi, (1971a)] adoptaram esta definição alternativa de derivada fraccionária para resolver vários problemas relacionados com viscoelasticidade.

### 2.3.2.3 Definição de Grünwald–Letnikov

Ao contrário da aproximação de Riemann-Liouville, que obtém a sua definição a partir da repetição de integral, a formulação de Grünwald-Letnikov aborda o problema sob o ponto de vista da derivação, começando pela definição básica de derivada apresentada em (2.37):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.37)$$

Aplicando novamente esta fórmula, podemos encontrar a segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Escolhendo o mesmo valor para  $h$ , i.e.  $h = h_1 = h_2$ , a expressão simplifica-se para:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \quad (2.39)$$

Para a derivada de ordem  $n$  este procedimento leva ao somatório dado por (2.40). Introdúz-se aqui o operador  $D^n$  para representar as  $n$  repetições da derivada.

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh) \quad (2.40)$$

De notar que a derivada de ordem  $n$  é uma combinação linear dos valores da função para  $(n + 1)$  valores de  $x, x - h, x - 2h, \dots, x - nh$  da variável independente. Os coeficientes são binomiais e com alternância de sinal.

Esta expressão pode ser generalizada para valores não inteiros de  $n$  com  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , desde que os coeficientes binomiais usem a função Gama em vez do clássico factorial. Mais ainda, o limite superior do somatório (não mais o inteiro  $n$ ) assumirá um valor até infinito, à medida que  $\frac{t-a}{h}$  (onde  $t$  e  $a$  são o limite superior e o limite inferior da derivação, respectivamente). Partindo da generalização da derivada fraccionária de Grünwald-Letnikov, obtemos:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{m! \Gamma(\alpha - m + 1)} f(x - mh) \quad (2.41)$$

A forma anterior da derivada de Grünwald-Letnikov pode ser modificada para ser usada como definição alternativa de integral fraccionário. A alteração mais natural desta fórmula é considerar a derivada de Grünwald-Letnikov para  $\alpha$  negativo. Se usarmos (2.40) verificamos que o problema mais imediato a resolver é o facto de  $\binom{-n}{m}$  não poder ser definido através do factorial. Expandindo  $\binom{-n}{m}$ , obtemos a expressão (2.42).

$$\binom{-n}{m} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)\dots(-n-m+1)}{m!} \quad (2.42)$$

Esta forma pode ser rescrita como:

$$\binom{-n}{m} = (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} \quad (2.43)$$

A expressão do factorial em (2.43) pode ser generalizada para números reais negativos usando a função Gama:

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha)m!} \quad (2.44)$$

Utilizando (2.44) podemos rescrever (2.41) para  $-\alpha$  obtendo o integral fraccionário de Grünwald-Letnikov:

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha + m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x - mh) \quad (2.45)$$

Implicitamente, assumiu-se que na expressão  $(t-a)/h$  são números inteiros. Note-se que a repetição  $n$  vezes do integral origina novamente a soma de todos os valores da função, mas refira-se, que se  $h \rightarrow 0$  a soma de todos os termos tenderá para infinito. Os pesos dos termos da função são definidos através dos coeficientes binomiais mas, neste caso, são todos positivos.

Se considerarmos a definição em avanço da derivada fraccionária (*forward difference*) de ordem  $\alpha$  de Grünwald-Letnikov dada por (2.41), obtemos:

$${}_{GL}D_{b-}^{\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{b-x}{h}} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x + mh), \quad a < x < b \quad (2.46)$$

Similarmente, a definição em atraso de derivada fraccionária (*backward difference*) de ordem  $\alpha$  de Grünwald-Letnikov é:

$${}_{GL}D_{a+}^{\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x - mh), \quad a < x < b \quad (2.47)$$

As equações (2.46) e (2.47) representam a derivada fraccionária progressiva e regressiva, respectivamente.

Até ao momento, foram apresentadas duas formulações do CF, propostas respectivamente por Riemann e Liouville e por Grünwald-Letnikov. A existência de diferentes formulações para o mesmo conceito leva-nos a questionar se estas são definições equivalentes. A resposta imediata a esta pergunta é afirmativa. No entanto, a prova matemática definitiva para esta afirmação é laboriosa, sendo possível consultá-la em [Podlubny, (1999)]. Devido à sua forma, a formulação desenvolvida por Riemann-Liouville, para a definição do integral e da derivada fraccionária, leva-nos a encontrar a solução analítica de funções relativamente simples ( $x^a$ ,  $e^x$ ,  $\sin(x)$ , etc.). Em contrapartida, a definição de Grünwald-Letnikov é facilmente utilizada em esquemas numéricos. Assim, o modo mais fácil e rápido de demonstrar a equivalência destas duas definições é comparar os seus resultados analíticos e numéricos respectivos (ver secção (2.4.1)).

### 2.3.2.4 Propriedades

É fácil verificar que, em algumas situações, a definição de Caputo para as derivadas fraccionárias é de certo modo mais restrita do que a definição de Riemann-Liouville. Verificamos que este é o caso em que consideramos as restrições do integral fraccionário de Riemann-Liouville.

Foi referido anteriormente que  $f(t)$  tinha que ser causal, *i. e.* que  $f(t) = 0$  para  $t \leq 0$ . Logo, no caso da derivada de Caputo,  $f(0)$  e  $f'(0) = f''(0) \dots f^{(m)}(0)$  devem ser iguais a zero. Esta vulnerabilidade da derivada de Caputo pode ser significativa, pelo que se pode perguntar qual a necessidade deste método. A resposta a esta questão surge quando resolvemos equações diferenciais de ordem não inteira. Sob o aspecto matemático, é possível aplicar a definição de

Riemann-Liouville na solução deste problema dadas as condições iniciais adequadas. No entanto, as condições iniciais requeridas para a solução de equações diferenciais de ordem fraccionária são, também, de ordem não inteira.

Na área da física, estas propriedades da definição de Riemann-Liouville representam um problema significativo. De facto, estando nós familiarizados com a interpretação de expressões de ordem inteira, não conhecemos actualmente uma interpretação física das derivadas de ordem fraccionária. As ferramentas matemáticas vão além das limitações práticas do nosso entendimento.

Para melhor se esclarecer a diferença na obtenção das condições iniciais para as equações diferenciais fraccionárias, em termos das derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo, vamos utilizar as fórmulas da transformada de Laplace para o caso de  $a = 0$ .

A fórmula da transformada de Laplace para a derivada fraccionária de Riemann-Liouville é:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ {}_0 D_t^{\alpha} f(t) \right\} dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left. {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right|_{t=0}, (n-1 \leq \alpha < n) \quad (2.48)$$

e a transformada de Laplace da derivada de Caputo, inicialmente obtida em [Caputo, (1967)], é:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t) \right\} dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), (n-1 < \alpha \leq n) \quad (2.49)$$

A transformada de Laplace da derivada fraccionária de Riemann-Liouville permite a utilização de condições iniciais do tipo  $\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) = b_n$ , as quais podem causar problemas relativamente à sua interpretação física. Pelo



contrário, a transformada de Laplace da derivada fraccionária de Caputo permite a utilização dos valores iniciais das clássicas derivadas de ordem inteira com interpretações físicas conhecidas.

Outra diferença entre as definições de Riemann-Liouville e de Caputo, é que a derivada de Caputo de uma constante  $C$  é zero e, no caso de se ter um valor finito no limite inferior  $a$ , a derivada fraccionária de Riemann-Liouville de uma constante  $C$  não é nula sendo:

$${}_0D_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (2.50)$$

Este facto levou, por exemplo, a que Ochmann e Makarov [Ochmann e Makarov, (1993)] usassem a definição de Riemann-Liouville com  $a = -\infty$ . De outra forma, sob o ponto de vista físico, eles precisariam da derivada de ordem fraccionária de uma constante igual a zero e, por outro lado, a fórmula (2.50) resulta em zero se  $a \rightarrow -\infty$ . O significado físico desta operação é que o processo físico tem início em  $-\infty$ . Neste caso, os efeitos transitórios na resposta do sistema não poderiam ser estudados.

Colocando  $a = -\infty$  em ambas as definições, e possuindo uma função  $f(t)$  e suas derivadas para  $t \rightarrow -\infty$ , chegamos à mesma fórmula:

$${}_{-\infty}D_t^\alpha f(t) = {}_{-\infty}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (2.51)$$

a qual demonstra que para o estudo do regime permanente de processos dinâmicos as definições de Riemann-Liouville e de Caputo dão o mesmo resultado.

Existe outra diferença entre as aproximações de Riemann-Liouville e de Caputo que é conveniente mencionar, por ser de importante relevância para a sua aplicação. Assim, para a derivada de Caputo, temos:

$${}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^m f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \quad (2.52)$$

enquanto que para a derivada de Riemann-Liouville temos:

$${}_a D_t^m \left( {}_a D_t^\alpha f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \quad (2.53)$$

O intercâmbio dos operadores diferenciais nas fórmulas (2.52) e (2.53) permitiu sob diferentes condições obter:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^m f(t) \right) &= {}_a D_t^m \left( {}_a D_t^\alpha f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = n, n+1, \dots, m \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} {}_a D_t^m \left( {}_a D_t^\alpha f(t) \right) &= {}_a D_t^\alpha \left( {}_a D_t^m f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, m \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Verificamos que, contrariamente ao que acontece com a aproximação de Riemann-Liouville (2.55), no caso da derivada de Caputo (2.54) não existem restrições nos valores de  $f^{(s)}(0)$ , ( $s = 0, 1, \dots, n-1$ ).

### 2.3.3 Equações Integrais Fraccionárias

#### 2.3.3.1 Primeiro Tipo

A primeira forma da equação integral fraccionária é dada pela equação:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.56)$$

Esta expressão pode também ser escrita como:

$$J^\alpha u(t) = f(t) \quad (2.57)$$

A solução desta equação é directa, sendo dada por:

$$u(t) = D^\alpha f(t) \quad (2.58)$$

Nesta situação, pode-se ser tentado a usar a definição de Caputo para a derivada fraccionária. No entanto, saliente-se que não se verifica em todas as situações que  ${}^C D^\alpha J^\alpha f(t) = f(t)$ . De facto, irá ser demonstrado a seguir que a solução da equação (2.56), obtida através do uso da transformada de Laplace, gera mais um termo quando se usa a definição de Caputo.

No domínio de Laplace, a equação integral de primeiro tipo assume a forma:

$$J^\alpha u(t) = \Phi_\alpha(t) * u(t) \Rightarrow L\{\Phi_\alpha(t) * u(t)\} = \frac{U(s)}{s^\alpha} \quad (2.59)$$

Algebricamente, podemos rescrever o resultado obtido em (2.59) numa das duas formas apresentadas a seguir:

$$U(s) = s^\alpha F(s) \Rightarrow s \left[ \frac{F(s)}{s^{1-\alpha}} \right] \quad (2.60)$$

ou

$$U(s) = s^\alpha F(s) \Rightarrow \frac{1}{s^{1-\alpha}} [sF(s) - f(0)] + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} \quad (2.61)$$

Invertendo a primeira forma para o domínio dos tempos temos:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t) \quad (2.62)$$

a qual é equivalente à solução da equação utilizando a definição de Riemann–Liouville. A segunda forma pode também ser invertida, obtendo-se:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t) + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (2.63)$$

O primeiro elemento deste resultado é a definição de Caputo. Todavia, como mencionado anteriormente, temos que incluir mais um termo que é dependente do valor da função para  $t = 0$ .

### 2.3.3.2 Segundo Tipo

As equações integrais de segundo tipo seguem a forma apresentada em (2.64).

$$u(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t) \Rightarrow (1 + \lambda J^\alpha)u(t) = f(t) \quad (2.64)$$

A solução de (2.64) é:

$$\begin{aligned} u(t) &= (1 - \lambda J^\alpha)^{-1} f(t) = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n J^{\alpha n}\right) f(t) \\ &= f(t) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \Phi_{\alpha n}\right) * f(t) \end{aligned} \quad (2.65)$$

De (2.15) podemos mostrar que:

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.66)$$

Se aplicarmos a primeira derivada a (2.66), eliminamos o primeiro termo da expansão  $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$  e recuperamos a forma obtida em (2.65). Assim, a solução da equação integral de segundo tipo pode ser formalmente escrita da seguinte forma:

$$u(t) = f(t) + \frac{d}{dt} [E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] * f(t) \quad (2.67)$$

A mesma solução pode ser obtida através da transformada de Laplace. Assim, começando por aplicar a transformada de Laplace a (2.64), obtemos:

$$\mathcal{L} \{ (1 + \lambda J^\alpha) u(t) \} = \mathcal{L} \{ f(t) \} \rightarrow \left[ 1 + \frac{\lambda}{s^\alpha} \right] U(s) = F(s) \quad (2.68)$$

A equação (2.68) pode ser rearranjada de várias formas, mas uma em particular conduz-nos ao resultado anteriormente apresentado em (2.67):

$$U(s) = \left[ s \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1 \right] F(s) + F(s) \quad (2.69)$$

Para o obtermos, em primeiro lugar devemos calcular a transformada de Laplace de uma forma especial da função Mittag-Leffler, dada por (2.70).

$$\mathcal{L} \{ E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \quad (2.70)$$

Pela relação dada em (2.14), verifica-se que a expressão entre parêntesis na equação (2.69) é, simplesmente, a transformada de Laplace da primeira derivada de (2.70), ou seja:

$$\mathcal{L} \{ E'_\alpha(-\lambda t^\alpha) \} = s \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1 \quad (2.71)$$

A partir da definição de convolução de Laplace dada em (2.12), é simples de verificar que a inversa de (2.69) origina o mesmo resultado apresentado em (2.67).

### 2.3.4 Equações às Derivadas Fraccionárias

Nas equações diferenciais ordinárias clássicas EDOs (*Ordinary Differential Equations*) existem, tipicamente, duas formas que podemos considerar [Gorenflo e Vessella. (1991)]. Essas formas são as correspondentes à relaxação e à oscilação, e encontram-se representadas em (2.72) e (2.73).

$$u'(t) = -u(t) + q(t) \quad (2.72)$$

$$u''(t) = -u(t) + q(t) \quad (2.73)$$

Quando nos referimos a estas formas, referimo-nos a elas como sendo respectivamente de primeira e de segunda ordem. Esta distinção pode também ser considerada no CF como sendo as formas da “relaxação fraccionária” e da “oscilação fraccionária” das EDO lineares. No primeiro caso, a ordem da EDO toma o valor  $0 < \alpha \leq 1$  e no segundo caso toma o valor  $1 < \alpha \leq 2$ .

As equações diferenciais fraccionárias lineares podem ser representadas na forma que se segue:

$${}^C D^\alpha u(t) = D^\alpha \left( u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0) \right) = -u(t) + q(t), \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (2.74)$$

Note-se a aplicação da definição de Caputo nesta representação. Tal como foi discutido anteriormente sobre as propriedades das definições de Caputo e de Riemann-Liouville, a escolha do uso desta definição é baseada na possibilidade de se adoptar condições iniciais de ordem inteira na solução deste tipo de problemas.

A forma mais expedita para resolver (2.74) é por intermédio da transformada de Laplace. Assim, obtemos:

$$s^\alpha U(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} u^{(k)}(0) = -U(s) + Q(s) \Rightarrow U(s) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1} u^{(k)}(0) + \frac{Q(s)}{s^\alpha + 1} \quad (2.75)$$

Os termos dentro do somatório podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1} = \frac{1}{s^k} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} = \mathcal{L} \{J^k E_\alpha(-t^\alpha)\} \quad (2.76)$$

assim como os termos que precedem  $Q(s)$ :

$$\frac{1}{s^\alpha + 1} = -\left( s \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} - 1 \right) = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} [E_\alpha(-t^\alpha)] \right\} \quad (2.77)$$

Por último, utilizando ambas as equações (2.76) e (2.77) para definir a transformada inversa de Laplace, é possível transformar a equação (2.75) numa expressão no domínio dos tempos  $u(t)$ , e assim estabelecer a solução para a EDO de ordem fraccionária, dada por:

$$u(t) = \sum_{K=0}^{m-1} J^K E_\alpha(-t^\alpha) u^{(K)}(0) - q(t) * E'_\alpha(-t^\alpha) \quad (2.78)$$

## 2.4 Aplicações

Nesta secção, vão ser referidos alguns dos trabalhos efectuados nas áreas similares às desenvolvidas no âmbito deste trabalho de Doutoramento.

### 2.4.1 Métodos Numéricos

A resolução numérica de equações diferenciais de ordem inteira é, desde há longos anos, uma área de grande interesse matemático, tanto no que diz respeito aos aspectos numéricos como nos computacionais. Para o cálculo numérico de equações com derivadas e integrais fraccionários é essencial obter uma boa aproximação do operador diferencial fraccionário  $D^\alpha$ , e do operador integral fraccionário  $J^\alpha$ , o que, quase sempre, origina um elevado número de termos necessários para uma computação de elevada precisão.

Devido à forma de somatório, na definição de Grünwald-Letnikov de derivada e integral fraccionário, esta fórmula revela-se eficiente para a obtenção dos coeficientes necessários à computação numérica. No entanto, e devido a esta definição especificar essencialmente uma soma infinita de termos, coloca-se a questão de saber qual deverá ser o número de termos que devem ser calculados e somados para a obtenção de um resultado preciso.

Através da aplicação da definição de Grünwald-Letnikov, e para grandes períodos de tempo  $t$ , o historial relativo ao comportamento da função  $f(t)$  próximo do seu ponto inicial  $t = a$  pode ser desprezado, desde que se assumam certas suposições [Podlubny, (1995)]. Estas suposições levaram à formulação do princípio da “memória curta”, o qual considera apenas o comportamento de  $f(t)$  no “passado mais recente”, ou seja, no intervalo  $[t-L, t]$ , onde  $L$  representa o comprimento da memória, pelo que obtemos a seguinte expressão:

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx {}_{t-L} D_t^\alpha f(t), \quad (t > a + L) \quad (2.79)$$

Por outras palavras, e segundo o princípio da memória curta apresentado em (2.79), a derivada fraccionária com limite inferior  $a$  é aproximada por uma derivada fraccionária com limite inferior igual a  $t-L$ .



Devido a esta aproximação, o número de coeficientes na aproximação (2.28), nunca é superior a  $(L/h)$ . Logicamente, quando efectuamos algumas simplificações, perdemos alguma da precisão. Se  $|f(t)| \leq M$  para  $a \leq t \leq b$ , podemos estimar o valor do erro introduzido pelo princípio da memória curta:

$$d(t) = \left| {}_a D_t^\alpha f(t) - {}_{t-L} D_t^\alpha f(t) \right| \leq \frac{ML^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|}, \quad (a+L \leq t \leq b) \quad (2.80)$$

Esta expressão, pode ser usada para determinar o comprimento da memória  $L$  para uma determinada precisão  $\varepsilon$ :

$$d(t) \leq \varepsilon, \quad (a+L \leq t \leq b), \text{ se } L \geq \left( \frac{M}{\varepsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{1/\alpha} \quad (2.81)$$

Os resultados computacionais assim obtidos, revelam um bom compromisso com as soluções analíticas.

### 2.4.2 Fluxo de Calor na Fronteira de uma Barra Semi-Infinita

Suponhamos que se tem uma barra semi-infinita e com um comprimento que varia de  $x = 0$  até  $x = \infty$  (Figura 2.4).

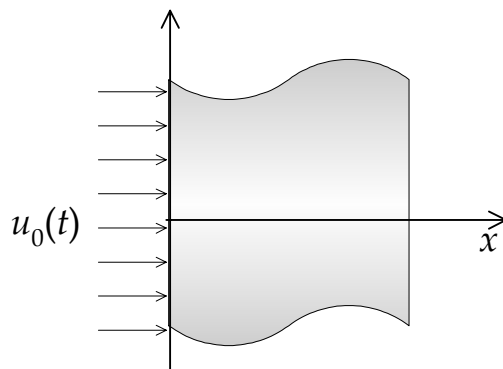


Figura 2.4 - Barra semi-infinita.

A temperatura na barra, dada pela função  $u(x,t)$ , pode ser expressa através da seguinte equação às derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.82)$$

Neste caso, supomos que para  $t = 0$ ,  $u(x,0) = 0$  para  $0 < x < \infty$ .

Além disso, considera-se que a variação da temperatura em função de  $x$  na fronteira da barra é dada pela função de calor:

$$P(t) = u_x(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.83)$$

Considera-se também que a temperatura e as variações da temperatura em função de  $x$  vai a zero para  $x = \infty$ , ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0 \quad (2.84)$$

O cálculo fraccionário torna-se útil para este problema, após uma adequada transformação na equação diferencial. Pretende-se, assim, alterar a forma da sua equação às derivadas parciais, por uma sua semelhante, nomeadamente a equação integral de Abel's de primeira ordem. Duff e Naylor [Duff e Naylor, (1966)] descreveram detalhadamente esta transformação, apresentada resumidamente a seguir.

As transformadas dos cosenos de Fourier em  $u(x, t)$  e  $u_{xx}(x, t)$  são dadas respectivamente por:

$$u_c(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(x, t) \cos s x dx \quad (2.85)$$

$$u_{xx_c}(s, t) = -s^2 u_c(s, t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_x(0, t) \quad (2.86)$$

Após estas transformações, a equação às derivadas parciais para a temperatura na barra, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u_c(s, t)}{\partial t} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} P(t) - s^2 u_c(s, t) \quad (2.87)$$

A solução para a equação às derivadas parciais não linear de primeira ordem é dada por:

$$u_c(s, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t P(\tau) e^{-s^2(t-\tau)} d\tau \quad (2.88)$$

sendo  $u_c(s, t)$  convertido para o domínio de  $x$ :

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_c(s, t) \cos sx ds = -\frac{2}{\pi} \int_0^t P(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-s^2(t-\tau)} \cos sx ds \quad (2.89)$$

Através da relação da função de Green [Podlubny, (1999)] a sua solução surge da seguinte forma:

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{P(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-x^2/[4(t-\tau)]} d\tau \quad (2.90)$$

A equação (2.90) dá-nos a distribuição de temperatura em função do tempo e do espaço para uma barra semi-infinita, para a qual se conhece o fluxo de calor na sua fronteira  $x = 0$  dada por  $P(t)$ . No entanto, através da introdução do cálculo fraccionário, e dados os valores da temperatura na fronteira, é possível chegar à solução do fluxo de calor num ponto da barra.

Na fronteira da barra,  $x = 0$ , a temperatura pode ser descrita através da equação:

$$u(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{P(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (2.91)$$

Esta equação corresponde à forma integral da equação de Abel de primeira ordem, a qual pode ser rescrita através do operador  $J$  como um integral fraccionário de ordem  $1/2$ . Assim, pode ser resolvida através da diferenciação de ordem  $1/2$ . Desta forma,  $P(t)$  pode ser escrita directamente em termos de  $\phi(t)$  por:

$$\begin{aligned} J^{1/2}P(t) &= \phi(t) \\ P(t) &= D^{1/2}\phi(t) \\ P(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (2.92)$$

O método atrás referido revela um elevado potencial no uso do cálculo fraccionário em problemas semelhantes. O caso de estudo aqui apresentado, revela que para a condução numa barra, com um comprimento significativamente maior do que a sua largura, é possível determinar, através da temperatura ao longo do seu comprimento, o fluxo de calor na sua fronteira. Através da aplicação do cálculo fraccionário para expressar esta relação, é possível reduzir a complexidade e tornar estas medidas de temperatura em resultados utilizáveis.

Alguns dos trabalhos desenvolvidos na área da difusão de calor são devidos a: Battaglia, *et al.*, em 2000 [Battaglia, *et al.*, (2000)], Gorenflo em 2001 [Gorenflo, *et al.*, (2001)], Yuste e Acedo em 2003 [Yuste e Acedo, (2003)].

### 2.4.3 *Controlo Fraccionário*

Têm vindo a ser desenvolvidos novos e melhores métodos para a análise no domínio dos tempos de sistemas dinâmicos de ordem fraccionária, com o objectivo de solucionar problemas existentes na teoria do controlo [Kiryakova e Ivanov, (1998)], [Podlubny, 1999], [Petrás e Vinagre, (2002)]. Os controladores  $PI^\alpha D^\beta$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  e  $0 < \beta \leq 1$ , tendo por base o controlador PID clássico, mas envolvendo integradores e diferenciadores de ordem fraccionária, revelam um controlo mais eficiente para sistemas dinâmicos de ordem fraccionária. As equações (2.93) e (2.94), que se seguem, correspondem respectivamente às funções de transferência do controlador PID clássico e do controlador PID fraccionário.

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I s^{-1} + K_D s \quad (2.93)$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I s^{-\alpha} + K_D s^\beta, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.94)$$

onde  $U(s)$  corresponde à saída do controlador e  $E(s)$  ao erro do sistema. A correspondente saída do controlador  $PI^\alpha D^\beta$  no domínio dos tempos é dada por:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I D^{-\alpha} e(t) + K_D D^\beta e(t) \quad (2.95)$$

Se  $\alpha = \beta = 1$  os resultados da equação anterior reduzem-se ao controlador PID clássico. Se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  obtemos os resultados correspondentes a um controlador PI e, se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ , obtemos o controlador PD. Todos estes controladores são casos particulares do controlador fraccionário  $PI^\alpha D^\beta$  descrito em (2.94).

De facto, o elemento base do controlo fraccionário consiste no operador  $s^{-\alpha}$  onde  $\alpha \in \mathfrak{R}$ . No caso de  $\alpha < 0$  temos um derivador fraccionário e no caso  $\alpha > 0$  temos um integrador fraccionário.

Consideremos o caso de um integrador fraccionário de ganho  $K$  e de ordem  $\alpha$ , conhecido por função de transferência ideal de Bode:

$$G(s) = \frac{K}{s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.96)$$

inserida numa malha de realimentação unitária. Esta função de transferência em malha aberta, quando representada em diagramas de Bode, evidencia um declive de  $-\alpha$  20 dB / dec no diagrama do ganho e uma recta horizontal de ordenada  $-\alpha \pi/2$  rad no diagrama de fase (Figura 2. 5).

A correspondente função de transferência em malha fechada do sistema é definida por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^\alpha + K}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.97)$$

a qual possui uma margem de ganho infinita e uma margem de fase constante e igual a  $MF = \pi(1-\alpha/2)$ , independente do ganho  $K$  ( $K > 0$ ) do sistema.

Numa série de artigos e livros publicados por Oustaloup [Oustaloup, (1991, 1993, 1994, 1995, 2000)], os controladores de ordem fraccionária foram usados com sucesso no desenvolvimento do designado controlo CRONE (do acrónimo em francês – *Commande robuste d'ordre non entier*) (secção 4.3.1), o qual constitui um exemplo interessante da aplicação das derivadas fraccionárias na teoria do controlo. Podlubny demonstrou a vantagem do uso do controlador CRONE quando comparado com o controlador PID clássico, e mostrou que o

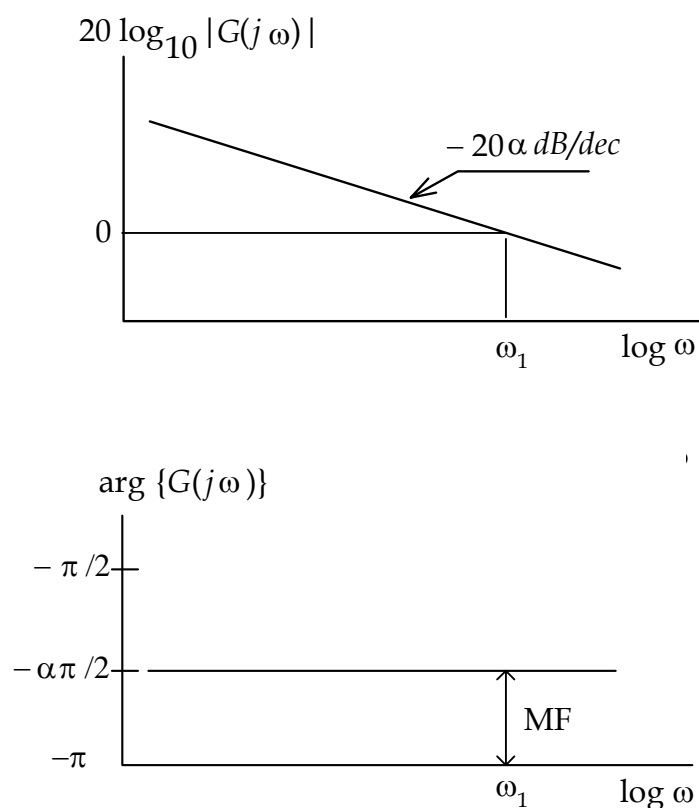


Figura 2.5 - Diagramas de Bode da amplitude e da fase de um integrador fraccionário.

controlador  $PI^\alpha D^\beta$  possui um melhor desempenho, quando usado para o controlo de sistemas de ordem fraccionária.

Neste contexto, e como exemplo de aplicação dos controladores  $PI^\alpha D^\beta$ , refira-se o caso particular de um sistema dinâmico descrito por uma equação diferencial de ordem fraccionária. No domínio dos tempos, o sistema é descrito por:

$$\left[ \sum_{k=0}^n a_{n-k} D^{\alpha_{n-k}} \right] y(t) = f(t) \quad (2.98)$$

onde  $\alpha_{n-k} > \alpha_{n-k-1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) são números reais arbitrários,  $a_{n-k}$  são constantes arbitrárias e  $D^\alpha \equiv {}_0^C D_t^\alpha$  denota a derivada fraccionária de ordem  $\alpha$  de Caputo, definida em (2.35).

A função de transferência de ordem fraccionária, associada à equação diferencial (2.98), é descrita por:

$$G_n(s) = \left[ \sum_{k=0}^n a_{n-k} s^{\alpha_{n-k}} \right]^{-1} \quad (2.99)$$

A resposta do sistema a um impulso unitário  $y_i(t)$  é definida pela transformada inversa de Laplace de  $G_n(s)$  dada por:

$$y_i(t) = L^{-1} \{G_n(s)\} = g_n(t) \quad (2.100)$$

E a resposta do sistema a um degrau unitário é dada pelo integral de  $g_n(t)$ :

$$y_s(t) = {}_0 D_t^{-1} g_n(t) \quad (2.101)$$

As equações (2.100) e (2.101) ilustram a resposta temporal do sistema (2.98) para casos simples.

De seguida, vai ser apresentado um breve resumo do comando CRONE, por este se ter revelado uma mais valia no controlo de sistemas de ordem fraccionária, dos quais o sistema térmico estudado no âmbito deste trabalho de Doutoramento, é um exemplo.

### 2.4.3.1 Comando CRONE

A derivada de ordem não inteira é usada no controlo robusto, vulgarmente designado de comando robusto de ordem não inteira - CRONE (do francês -



*Commande robuste d'ordre non entier*), onde a robustez traduz o grau de estabilidade do controlo para os parâmetros do processo.

O desempenho do controlo CRONE foi melhorado através da aplicação sucessiva de três estratégias baseadas na integração real ou complexa (não inteira), dependendo da geração de controlo utilizada [Oustaloup e Melchior, (1993)]. As estratégias da primeira e da segunda geração são baseadas na integração real não inteira.

Consideremos a equação característica:

$$1 + (\tau s)^\alpha = 0 \quad (2.102)$$

onde  $\tau$  é uma constante. Os dois pólos principais obtidos da solução de (2.102) são dados por:

$$s = \frac{1}{\tau} e^{\pm j\pi/\alpha} \quad (2.103)$$

para  $1 < \alpha < 2$ . Analisando o lugar geométrico das raízes (LGR), verifica-se que estes pólos complexos conjugados formam um ângulo ao centro de  $2\theta$  em que  $\theta = \pi - \pi/\alpha$ , como ilustrado na Figura 2.6. Estes pólos movem-se ao longo das semi-rectas representadas na figura, com um ângulo constante (fixado através da ordem  $\alpha$  da equação característica), e segundo a variação de  $\tau$ . A robustez no plano  $s$  é assim ilustrada através destas duas semi-rectas de amortecimento constante que formam um ângulo igual relativamente ao eixo real.

Através de uma malha de controlo com realimentação negativa a função de transferência em malha aberta, para a equação característica apresentada em (2.102), é dada por:

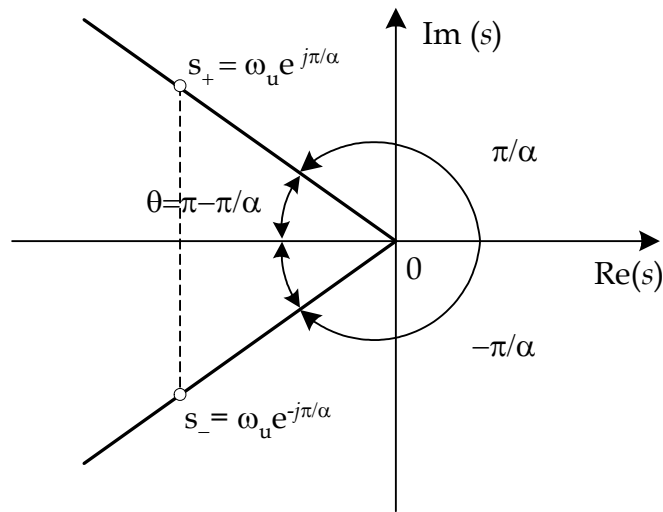


Figura 2.6 - LGR ilustrando a robustez do comando CRONE no plano  $s$ .

$$\beta(s) = \left(\frac{1}{\tau s}\right)^\alpha = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^\alpha \quad (2.104)$$

Esta expressão representa a função de transferência de um integrador real de ordem não inteira, na qual  $\omega_u = 1/\tau$  designa a frequência ao ganho unitário e onde a sua ordem  $\alpha$  determina a localização de fase. Para uma fase  $\arg \beta(j\omega) = -\alpha\pi/2$ , e com  $1 < \alpha < 2$ , o gráfico de Nichols de  $\beta(j\omega)$  (Figura 2.7) é representado por uma semi-recta vertical localizada entre  $-\pi/2$  e  $-\pi$ . Quando  $\tau$  varia, a semi-recta desliza verticalmente. O deslizamento vertical deste segmento de recta ao longo de um contorno de desempenho, para o instante de tempo de reparametrização da planta, origina apenas uma variação do ganho em torno da frequência  $\omega_u$ . Assim, assegura-se uma margem de fase constante  $\phi_m$ , o que corresponde a um coeficiente de amortecimento constante no domínio dos tempos, demonstrando a robustez do controlo.

Obviamente, quanto maior a distância entre os pontos A e B na Figura 2.7 (maior segmento de recta), melhor será a robustez do sistema.

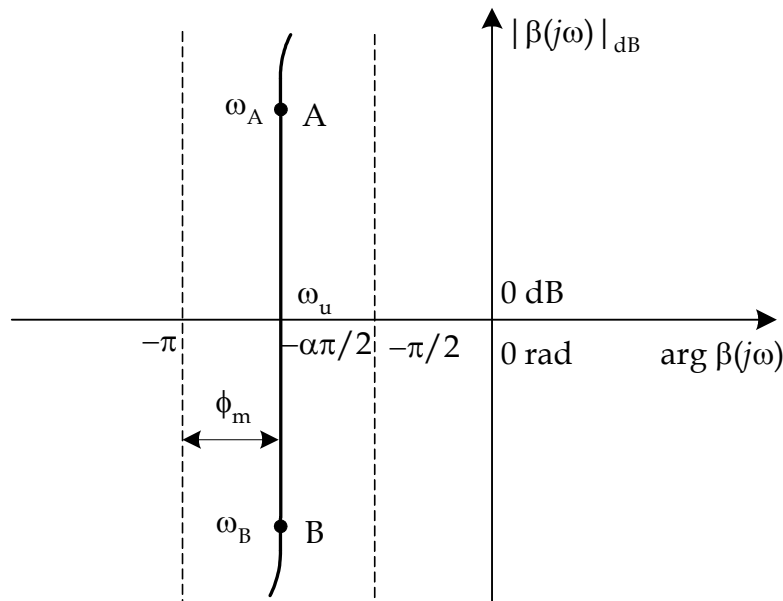


Figura 2.7 - Diagrama de Nichols ilustrativo da robustez do comando CRONE.

Quando a reparametrização da planta não traduz apenas uma variação de ganho em torno da frequência  $\omega_u$  a semi-recta vertical não é óptima. Neste caso, é necessário considerar outra semi-recta, definida sempre por um segmento de recta e para os parâmetros nominais do processo, com direcção e posição diferentes. A semi-recta assim definida é descrita por uma função de transferência baseada num integrador complexo não inteiro, para o qual a sua ordem real determina a localização da fase do controlo de desempenho, e a sua ordem imaginária determina o correspondente ângulo vertical.

A ordem do integrador complexo não inteiro, parametriza a função de transferência nominal do controlador em malha aberta, com apenas alguns parâmetros, reduzindo assim a optimização à procura dos seus valores óptimos. No contexto desta generalização, a procura da semi-recta óptima resultante da minimização da variação do grau de estabilidade, levou a uma reparametrização das funções de sensibilidade, definida como a terceira geração da estratégia CRONE. A parte inteira da função de transferência do

controlador é apenas sintonizada pela função de transferência óptima da malha aberta, evitando assim uma síntese iterativa com outros parâmetros.

Verificamos, assim, que a primeira e segunda gerações utilizam o controlador com fase constante em torno de uma frequência de ganho unitário em malha aberta,  $\omega_u$ . Desta forma, o controlador CRONE não contribui com variações da margem de fase para cada instante de tempo da reparametrização do processo, garantindo uma maior robustez do que a obtida pelos controladores PID convencionais.

Através da aplicação das três gerações de controlo do comando CRONE, os seus criadores defendem que, no contexto do controlo de processos com ressonância, é necessário um controlador óptimo para atenuar a saída da função de sensibilidade para certas gamas de frequências, e a entrada da função de sensibilidade para outras faixas de frequências. Para se poder ter em consideração ambos os requisitos, a estratégia consiste em incluir filtros de rejeição na terceira geração do controlo CRONE, nomeadamente na função de transferência em malha aberta.

De referir que as metodologias introduzidas pelos conceitos do comando CRONE foram, e continuam a ser, implementadas em diversas áreas, nomeadamente na mecatrónica, onde a sua aplicação teve importante relevância na suspensão de veículos automóveis e na resolução de problemas relacionados com o controlo de velocidade de sistemas com várias massas e folgas. Outra aplicação, foi no controlo de penetração de massas de água que se movimentam em diques, devido à porosidade dos próprios diques, o que penaliza a sua permeabilidade. Na área do processamento de sinal, a derivada de ordem não inteira é aplicada na detecção de limites. O comando CRONE também teve aplicação nos sistemas térmicos. Muitas outras aplicações utilizaram estes conceitos, tanto na ciência como na tecnologia.

### 2.4.4 *Sistemas Eléctricos*

Os conceitos matemáticos e os formalismos relacionados com os princípios da diferenciação real ou complexa não inteira, foram aplicados com maior incidência na engenharia e na modelação de fenómenos físicos somente a partir da segunda metade do século XX.

Na física, na ligação fractal entre um meio metálico e um meio iónico, a corrente é proporcional à derivada não inteira da tensão. A aplicação de modelos fractais para descrever perdas anómalas em materiais ferromagnéticos [Vorperian, (1992)] permite a ligação da corrente e da tensão usando uma derivada não inteira e, desta forma, a generalização da ordem das equações para os circuitos indutivos. Por exemplo, na electricidade, a corrente que passa através de um condensador é proporcional à derivada não inteira da tensão, no caso de pelo menos um dos eléctrodos possuir uma superfície rugosa [Oustaloup, *et al.*, (2000)].

No caso de circuitos magnéticos as perdas são divididas em perdas por histerese e em perdas devidas às correntes *Eddy* ou *Foucault*. Ambas as perdas foram objecto de investigação nas últimas décadas. Os modelos clássicos das perdas por correntes *Eddy* subestimaram sempre este tipo de perdas e, os valores remanescentes foram sempre designados de perdas anómalas.

Não foram ainda explorados circuitos lineares invariantes no tempo para modelizar as perdas anómalas com as frequências de expoente não inteiro. Por exemplo, Vatché Vorpérian [Vorpérian, (1992)] demonstrou que um circuito constituído por uma cascata de circuitos RL em paralelo possui uma impedância de entrada que depende de uma frequência de expoente não inteiro pertencente a uma faixa de frequências tão ampla quanto se desejar. O circuito em cascata referido anteriormente é similar ao apresentado por Liu, onde os

seus componentes são resistências e condensadores e onde a sua impedância de entrada origina uma fase constante às baixas frequências, originada pelo interface entre o metal e o eléctrodo. Tal como o circuito apresentado por Liu, também o circuito desenvolvido por Vorpérian elucida a natureza física da rugosidade da ligação entre o metal e o eléctrodo e, por conseguinte, as perdas e o processo de magnetização em materiais ferromagnéticos.

Mais ainda, as perdas originadas pelas correntes *Eddy* são iguais ao total das perdas obtidas na rede fractal, as quais, para uma excitação sinusoidal, são dadas pelo produto da tensão e da corrente aos seus terminais e pelo coseno do ângulo de fase entre eles.

Foram várias as aplicações do CF na área das impedâncias eléctricas, impedâncias electroquímicas e impedâncias fractais, das quais se salientam: Carlson em 1963 [Carlson, (1963)], Alaion Le Méhauté em 1983 [Méhauté (1983)], Clerc, *et al.*, em 1984 [Clerc, *et al.*, (1984)], T. Hamaide, *et al.*, em 1989 [Hamaide, *et al.*, (1989)], J. Jacquelin em 1991 [Jacquelin, (1991)], Svante Westerlund em 1994 [Westerlund (1994)], Hiram Samavati, *et al.*, em 1998 [Samavati, *et al.*, (1998)], Mahon, *et al.*, em 2000 [Mahon, *et al.*, (2000)], J. Niu e J. Lee em 2000 [Niu e Lee, (2000)], K. Biswas em 2005 [Biswas, (2005)], e muito em particular no caso das impedâncias biológicas: Awayda, *et al.*, em 1999 [Awayda, *et al.*, (1999)], Martisen, *et al.*, em 2002 [Martisen, *et al.*, (2002)], Cole em 2004 [Cole, (2004)].

De seguida, são apresentados alguns dos sistemas eléctricos abordados no âmbito do CF.

### 2.4.4.1 Multipólos de Ordem Fraccionária – Electromagnetismo

A expressão do potencial electrostático de um multipólo com uma distribuição de cargas eléctricas em três dimensões é descrita por:

$$\varphi_n(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (2.105)$$

onde  $q$  representa a carga eléctrica do monopólo,  $\epsilon$  a constante de permeabilidade de um meio isotrópico homogéneo,  $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$  e  $P_n(\cos\theta)$  consiste na função Legendre de ordem inteira  $n$ .

Em particular, as funções do potencial electrostático para um monopólo, um dipólo e um quadripólo, são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \\ \varphi_1(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{\cos\theta}{r^2} \right) \\ \varphi_2(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r^3} \right) P_2(\cos\theta) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Engheta [Engheta, (1996)] generalizou (de forma abstracta) o conceito de multipólos de ordem inteira relacionados por potências de 2, a multipólos de ordem fraccionária designados por potências de  $2^\alpha$  pólos. Ele obteve a função de potencial para  $2^\alpha$  pólos ( $0 < \alpha < 1$ ) ao longo do eixo dos  $z$  em termos da derivada fraccionária de Riemann-Liouville, da seguinte forma:

$$\varphi_{2^\alpha}(r) = \frac{ql^\alpha}{4\pi\epsilon} {}_{-\infty}D_z^\alpha \left( \frac{1}{r} \right), \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (2.107)$$

onde  $l$  é uma constante com dimensões de comprimento, pelo que a dimensão do volume de densidade de carga resultante é Coulomb/m<sup>3</sup>.

A análise da derivada fraccionária leva-nos ao seguinte resultado para o potencial electrostático:

$$\varphi_{2^\alpha}(r) = \frac{ql^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}{4\pi\epsilon r^{(1/2)(1+\alpha)}} P_\alpha\left(-\frac{z}{r}\right) \quad (2.108)$$

onde  $P_\alpha(x)$  é a função Legendre de tipo um e com grau de fraccionalidade  $\alpha$ .

Quando  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 2$ , os potenciais (2.108) reduzem-se aos potenciais descritos por (2.106), respectivamente.

#### 2.4.4.2 Circuitos Eléctricos com Fractais

Os circuitos clássicos consistem em resistências, condensadores e indutâncias e são descritos por modelos de ordem inteira. No entanto, existem as designadas fractâncias, as quais representam um elemento eléctrico com impedância de ordem fraccionária, sugeridas por Le Mehauté e por Crepy [Mehauté e Crepy, (1983)]. Estes investigadores consideraram dois tipos de fractâncias: a árvore fractal e a cadeia fractal.

Nakagawa e Sorimachi [Nakagawa e Sorimachi, (1992)] consideraram uma árvore de fractâncias constituída por um número infinito de circuitos similares formados pela combinação de duas impedâncias,  $Z_a$  e  $Z_b$  (Figura 2.8). A impedância de cada um dos circuitos é  $Z = (Z_a Z_b)^{1/2}$ , sendo  $Z_a = R$  e  $Z_b = (1/j\omega C)$ . Por sua vez, a impedância total da árvore de fractâncias é descrita pela seguinte equação:



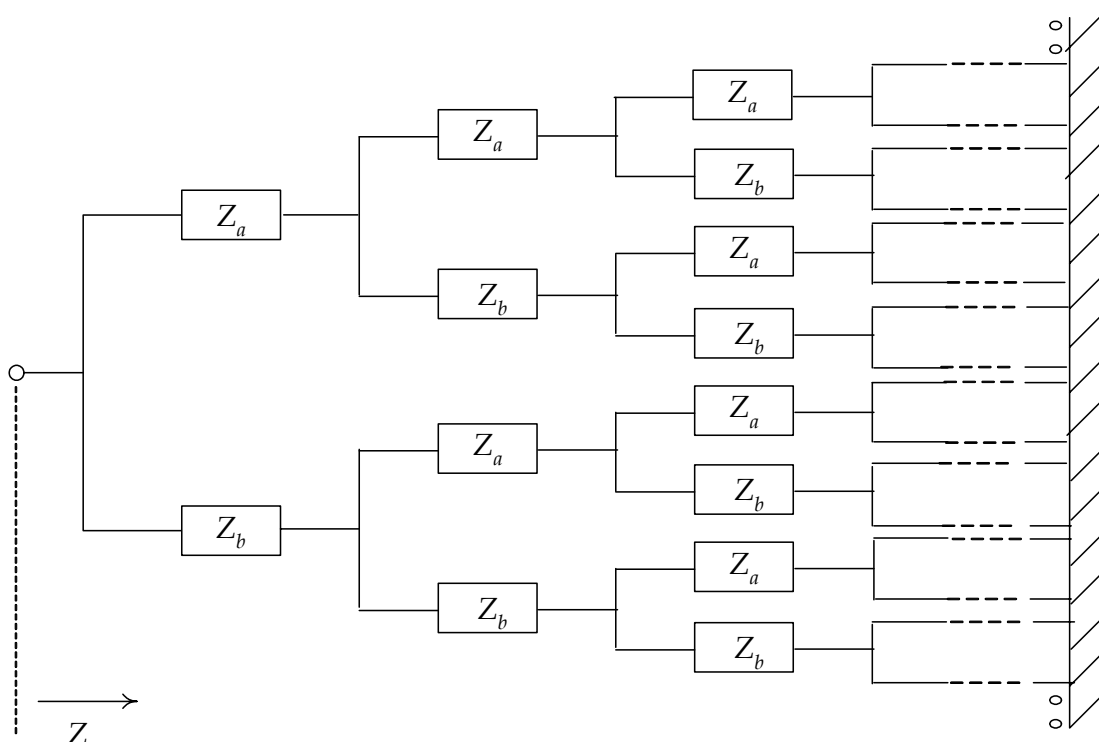


Figura 2.8 - Árvore de fractâncias.

$$Z(j\omega) = \sqrt{\frac{R}{C}} \omega^{-1/2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (2.109)$$

A função de transferência de ordem fraccionária associada a esta árvore de fractâncias é dada por:

$$Z(s) = \sqrt{\frac{R}{C}} s^{-1/2} \quad (2.110)$$

Oldham e Spanier [Oldham e Spanier, (1970)] demonstraram que, para uma cadeia de fractâncias constituída por  $N$  pares de resistências e condensadores interligados em cadeia, a função de transferência é dada aproximadamente por:

$$G(s) = \sqrt{\frac{R}{C}} \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (2.111)$$

Pode ser demonstrado que esta cadeia de fractâncias comporta-se como um integrador fraccionário de ordem igual a  $1/2$ , para uma precisão no domínio dos tempos dada por  $6RC \leq t < (1/6)N^2RC$ .

Devido aos processos electroquímicos gerados na interligação de um eléctrodo e de um electrólito, as baterias eléctricas produzem uma quantidade limitada de corrente. Nas ligações metal-electrólito, a impedância  $Z(\omega)$  não apresenta as características capacitivas desejadas para toda a gama de frequências. Por exemplo, no caso de  $\omega \rightarrow 0$  a impedância é dada por:

$$Z(s) \approx (s)^{-\eta}, \quad 0 < \eta < 1 \quad (2.112)$$

A ligação entre um eléctrodo e um electrólito ilustra, assim, um exemplo de um processo de ordem fraccionária. O valor de  $\eta$  é associado à textura da ligação, sendo a superfície infinitamente lisa quando  $\eta \rightarrow 1$ .

Kaplan [Kaplan, *et al.*, (1987)] propôs um modelo físico baseado no conjunto de Cantor com  $N$  circuitos eléctricos do tipo fractância. Através de suposições apropriadas, Kaplan definiu a impedância do circuito fractal da seguinte forma:

$$Z(\omega) = k(j\omega)^{-\eta} \quad (2.113)$$

onde  $\eta = 2 - \log(N^2)/\log(a)$ ,  $k$  e  $a$  são constantes e  $N^2 > a$  implica  $0 < \eta < 1$ . Estas demonstrações revelam que o modelo aqui apresentado é um exemplo de um circuito eléctrico de ordem fraccionária.

Num modelo de uma linha de transmissão, com resistências e condensadores, o potencial eléctrico  $\varphi(x, t)$  e a corrente  $i(x, t)$  no condutor satisfazem a equação clássica da difusão, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2.114)$$

onde a constante de difusão  $k$  é substituída por  $(RC)^{-1}$ ,  $R$  e  $C$  representam respectivamente a resistência e a capacidade por unidade de comprimento da linha de transmissão, e  $u(x, t) = \varphi(x, t)$  ou  $i(x, t)$ . Aplicando as condições iniciais e de fronteira:

$$\varphi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, \infty[, \quad \text{e} \quad \varphi(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow \infty \quad (2.115)$$

temos que:

$$i(0, t) = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \varphi(0, t) = \left(\frac{C}{R}\right)^{1/2} {}_0D_t^{1/2} \varphi(0, t) \quad (2.116)$$

Esta expressão demonstra que a corrente numa linha de transmissão com comprimento infinito é expressa em termos de uma derivada de ordem fraccionária, igual a  $1/2$ , do potencial  $\varphi(0, t)$ . Este é mais um exemplo do envolvimento de uma derivada de ordem fraccionária em linhas eléctricas de transmissão.

Westerlund [Westerlund, (1991)] observou que tanto a árvore como a cadeia de fractâncias eram constituídas não só por resistências e condensadores mas também exibiam propriedades eléctricas com impedâncias de ordem não inteira. Westerlund generalizou o divisor de tensão clássico através de impedâncias de ordem fraccionária. Estas impedâncias, são não apenas os “condensadores de Westerlund”, mas também resistências e inductâncias clássicas ou impedâncias com uma estrutura em árvore ou cascata de

fractâncias. A função de transferência do circuito divisor de tensão de Westerlund é definida por:

$$H(s) = \frac{k}{s^\alpha + k} \quad (2.117)$$

onde  $-2 < \alpha < 2$  e  $k$  é uma constante que depende dos elementos do divisor de tensão. Os valores negativos de  $\alpha$  correspondem a um filtro passa-alto e os valores positivos correspondem a um filtro passa-baixo. Westerlund considerou alguns casos especiais da função de transferência (2.117) para divisores de tensão constituídos por diferentes combinações de resistências, condensadores e indutâncias. Através da análise do sinal de saída podem ser descritas algumas propriedades físicas de interesse, nomeadamente por aplicação da transformada inversa de Laplace para vários valores de  $\alpha$ . Por exemplo, verifica-se que para  $1 < |\alpha| < 2$  o sinal de saída exhibe oscilações.

### 2.4.5 Aplicações de Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AG) são uma ferramenta computacional que surgiu no século XX. Os AGs usam um conceito inspirado na natureza para resolver problemas que de outra forma seriam impossíveis ou, extremamente difíceis de resolver. Os AGs são eficazes na resolução de problemas no qual um número finito de variáveis independentes possui um elevado número de possíveis combinações. Quando temos um elevado número de elementos para efectuar as suas múltiplas combinações uma computação directa é impraticável, porque tenta efectuar todas as combinações possíveis e depois avaliar qual destas introduz um melhor desempenho no sistema. O tempo exigido para isso torna-se muito elevado.

Os AGs, ao invés de tentarem determinar todas as combinações possíveis, trabalham por selecções aleatórias, escolhendo uma pequena

“população” de possíveis combinações. A ordem e a composição destas combinações é então denominada como “gene”, analogamente aos genes biológicos. Ambos os genes, possuem o conjunto dos códigos de informação (nos computadores temos 1 e 0 em vez de A, T, G e C ) que levam a cabo a função. Os AG avaliam a aptidão de cada um destes genes em relação aos outros, determinando qual deles produz a melhor solução e qual produz a pior. O teste da aptidão determina quais dos genes são os escolhidos para a “reprodução”.

Na fase de reprodução duas situações típicas podem ocorrer: a reprodução através de cruzamento e a reprodução através das mutações. Na fase de cruzamento os genes trocam partes da sua informação com outros genes. Na fase de mutação, é atribuída uma probabilidade a cada gene, o que tipicamente corresponde a uma probabilidade finita de os pares A–T ou G–C serem alterados.

Após a fase de reprodução, e de uma nova geração ser criada, obtêm-se “pedaços genéticos” que tornam essa geração mais forte. O processo repete-se até que um ou mais elementos da população atinja a melhor solução.

A ideia que está aqui subjacente é a de “copiar” o processo de selecção existente na natureza, e que a sobrevivência dos genes mais aptos seja eficaz não apenas no mundo natural, mas também no meio computacional. O carácter aleatório da primeira geração permite ao AG testar a variedade dos diferentes caminhos e as mutações permitem manter estas combinações misturadas ligeiramente. Todavia, para que eventualmente os melhores genes continuem a alterar o código e melhorarem entre eles vão ter que se ajustar ao seu ambiente, da mesma forma ao que ocorre na natureza.

Em [Pires, *et al.*, (2003)] é referido o efeito das taxas de mutação na função de aptidão para obtenção das populações resultantes, no caso da

aplicação dos AG no planeamento de trajectórias de robôs. Tal como nos exemplos de superfícies fractais e de difusão, a aparente ligação entre as ocorrências aleatórias no domínio dos AGs e as expressões físicas destas ocorrências, foram apresentadas pelos autores como expressões de ordem fraccionária.

Nos AGs a probabilidade de mutação é, de forma geral, definida previamente. Um sinal de ruído branco com mutação de ruído [Pires, *et al.*, (2003)] foi adicionado ao sistema. Assim, a probabilidade de mutação é alterada aleatoriamente, de geração em geração, pelo que se pode considerar o sinal de entrada. A saída traduz o efeito que a entrada teve na função de aptidão em 50% da percentagem média da população. A ordem fraccionária da função de transferência é dada pela seguinte expressão:

$$G_n(s) = k \frac{(s/a)^\alpha + 1}{(s/b)^\beta + 1} \quad (2.118)$$

A função de transferência (2.118) permite prever a dinâmica do AG. Na conclusão do trabalho efectuado por Pires, *et al.*, é referido que os modelos de ordem fraccionária são vantajosos, relativamente aos clássicos de ordem inteira, para modelizar o problema do planeamento de trajectórias através de AGs.

## 2.5 Conclusões

O interesse no Cálculo Fraccionário foi durante muitos anos puramente matemático devido a ser pouco conhecido nas áreas da física e da engenharia. Nessa ordem de ideias é importante num trabalho sobre CF abordar os seus princípios fundamentais. Assim, foram aqui referidos apenas os conceitos sobre o cálculo de ordem fraccionária, necessários para uma melhor compreensão

desta tese. Contudo, é evidente que o estudo do cálculo fraccionário é mais complexo e abrangente. No entanto, o objectivo deste capítulo foi o de expor não somente os conceitos básicos do cálculo fraccionário, mas também referir algumas das aplicações nas áreas de engenharia englobadas por este trabalho. Apesar da inovação deste assunto, a lista de problemas aqui referidos é meramente uma pequena demonstração do que actualmente está a ser estudado.

Desta forma, neste capítulo foram apresentadas algumas das bases teóricas dos operadores diferenciais e integrais de ordem fraccionária, bem como algumas funções matemáticas que servem de base à teoria do CF. A transformada de Laplace foi também abordada, por permitir mais facilmente o estudo no domínio das frequências da dinâmica dos sistemas físicos. Foram ainda analisadas as equações diferenciais ordinárias de ordem fraccionária, usando a definição de Caputo tendo em conta as condições iniciais. Os modos de relaxação e de oscilação em termos da função de Mittag-Leffler foram também expostos.

No decorrer deste capítulo foram ainda referidos vários trabalhos desenvolvidos no domínio do CF, em diferentes áreas de aplicação nas ciências da engenharia, nas quais se incluem sistemas de difusão de calor, a electricidade, o electromagnetismo e a teoria do controlo.

## Referências

---

- Axtell M. and M. E. Bise (1990). Fractional calculus application in control systems. In: *Proc. IEEE Nat. Aerospace Electronics conf. NAECON*, vol. **2**, pp. 563 – 566, New York.
- Awayda Mouhamed S., Willy Van Driessche, Sandy I. Helman (1999). Frequency-Dependent Capacitance of the Apical Membrane of Frog Skin: Dielectric Relaxation Processes. *Biophysical Journal*, vol. **76**, nº. 1, pp 219–232.
- Bagley R. L., P. J. Torvik (1984). On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal Appl. Mech.*, vol. **51**, pp. 294 – 298.
- Barbosa R. S. e J. T. Machado (2002). Describing Function Analysis of Systems with Impacts and Backlash. *Nonlinear Dynamics*, vol. **29**, pp. 235–250.
- Barbosa R. S., J. T. Machado e Isabel M. Ferreira (2004a). Tuning of PID Controllers Based on Bode’s Ideal Transfer Function. *Nonlinear Dynamics*, vol. **38**, pp. 305–321.
- Barbosa R. S., J. T. Machado e Isabel M. Ferreira (2004b). PID Controller Tuning Using Fractional Calculus Concepts. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. **7**, nº. 2, pp. 119–134.
- Battaglia Jean-luc, Ludovic Le Lay, Jean-Christophe Batsale, Alain Oustaloup, Olivier Cois (2000). Utilisation de modèles d’identification non entiers pour



- la résolution de problèmes inverses en conduction. *Int. Journal Therm. Sci.*, vol. **39**, pp. 374–389.
- Biswas K., S. Sem, P. K. Dutta (2005). Modelling of a capacitive probe in a polarizable medium. *Sensors and Actuators A: Physical*.
- Calderón A. J., B. M. Vinagre, V. Feliú (2003). Fractional Sliding Mode Control of a DD–DC Buck Converter with Application to DC Motor Drives. In: *Conference ICAR*.
- Caputo M. (1967). Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent. *II, Geophys. J. R. Astr. Soc.*, vol. **13**, pp. 529 – 539.
- Caputo M. (1969). *Elasticità e Dissipazione*. Zanichelli, Bologna.
- Caputo M., F. Mainardi (1971a). Linear models of dissipation in inelastic solids. *Riv. Nuovo Cimento, Ser. II*, vol. **1**, pp. 161 – 198.
- Caputo M., F. Mainardi (1971b). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure Appl. Geophys.* vol. **91**, pp. 134 – 147.
- Caputo M. (1992 – 1993). Lectures on Seismology and Rheological Tectonics. In: *La sapienza, Univ. degli studi di Roma*.
- Carlson G. E., C. A. Halijak (1963). Approximation of Fractional Capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a Regular Newton Process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, pp. 210–213.
- Carpinteri A., F. Mainardi (1997). *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*". Springer Verlag, New York.
- Clerc J. P., A. M. S. Tremblay, G. Albinet, C. D. Mitescu (1984). A. C. Response of Fractal Networks. *Le Journal de Physique – Lettres*, vol. **45**, pp. 913–924.

- Cole Kenneth S. (2004). Electric Conductance of Biological Systems. *Proc. Cold Spring Harbor Symp. Wuan. Biol.*, pp. 107–116.
- Davis, H. T. (1936). The Theory of Linear Operators. *The Principia Press*, Bloomington, Indiana.
- Debnath L. (2003). *Fractional integral and fractional differential equations in fluid mechanics*. *Fract. Calc. Appl. Anal.*.
- Doetsch G. (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer Verlag, Berlin.
- Duff G. F. D., D. Naylor (1996). Differential Equations of Applied Mathematics. In: *Wiley & Sons*, pp 118 – 122. New York.
- Engheta N. (1996). On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* vol. **44**, nº. 4, pp. 554 – 566.
- Euler L. (1730). *De Progressionibus Transcendentibus, seu Quarum Termini Algebraice Dari Nequeunt*. pp. 38 – 57, *Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae* 5.
- Geng Guang, G. M. Geary (1993). The Application of PI Control and Smith Predictors in an Air-Handling Plant. In: *Second IEEE conf. on Control Applications*, pp. 539–544, Vancouver.
- Gorenflo, R. e S. Vessella (1991). Abel Integral Equations: Analysis and Applications. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **1461**, Springer-Verlag, Berlin.
- Gorenflo R. e F. Mainardi (1996). *Fractional relaxation and oscillations in linear causal systems*. Bologna.

Gorenflo Rudolf e Francesco Mainardi (1997). Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order. In: *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* (Springer Verlag), pp. 223 – 276, New York.

Gorenflo Rudolf (1997). Fractional Calculus: Some Numerical Methods. In: *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* (Springer Verlag), pp. 277 – 290, New York.

Gorenflo Rudolf, Francesco Mainardi, Daniele Moretti, Paolo Paradisi (2001). Time-Fractional Diffusion: a Discrete Random Walk Approach. *Journal of Vibration and Control*, Special Issue on Fractional Calculus.

Hamaide T., A. Guyot, A. Le Mehaute, G. Crepy, G. Marcellin (1989). Experimental Analysis of the Scaling Properties of Solid Polymer Electrolytes upon Five Years of Storage: From Fractal Crystallization to Carrier Relaxation. *Journal of the Electrochemical Society*, vol. **136**, nº. 11, pp. 3152–3163.

Jacquelin J. (1991). Synthèse de Circuits Electriques Equivalents a Partir de Mesures d'Impédances Complexes. In: *5<sup>ème</sup> Forum sur les Impédances Electrochimiques*, pp. 287–295.

Jesus Isabel S., J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha, (2006a). Fractional Electrical Dynamics in Fruits and Vegetables. In: *Proceedings of FDA 2006 – 2nd IFAC workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Porto, Portugal.

Jesus Isabel S., Ramiro S. Barbosa, J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha, (2006b). Strategies for the Control of Heat Diffusion Systems Based on Fractional Calculus. In: *Proceedings of IEEE - ICC 2006 – IEEE International Conference on Computational Cybernetics*, Estónia.

- Kaplan T., L. J. Gray, S. H. Liu (1987). Self-affine fractal model for a metal-electrolyte interface. *Phys. Rev.*, vol. **B 35**, pp 5379 – 5381.
- Kiryakova V. (1994). *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Pitman Research Notes in Math., n.º. 301, Harlow.
- Kiryakova V., G. Ivanov (1998). Fractional Calculus And Mittag-Leffler Functions: Some Applications In Control Theory. In: *Applications of Mathematics in Engineering*, Sozopol.
- Kowankar K. M., A. D. Gangal (1996). Fractional Differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions. *Journal of Chaos*, vol. **6**, n.º. 4, American Institute of Physics.
- Lagrange J. L. (1772). Sur une nouvelle espèce de calcul relative à la différentiation et à l'intégration des quantités variables. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci Belles-Lett*, vol. **3**, pp. 185 – 206.
- Liouville J. (1832). *Mémoire sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions*. pp. 1 – 69, J. Ecole Polytech. 13, section 21.
- Machado J. A. Tenreiro (1995). Integrais e Derivadas Fraccionárias, aplicação à modelização e controlo. *Robótica e Automatização*, n.º. 19, pp. 11–15.
- Machado J. A. Tenreiro (1997). Analysis and design of fractional-order digital control systems. *Journal Systems Analysis, Modelling, Simulation*, vol. 27, pp. 107-122.
- Machado J. A. Tenreiro (2003). A Probabilistic Interpretation of the Fractional-Order differentiation. *International Journal for Theory and Applications-Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. **6**, n.º. 1.

- Machado J. T., Isabel Jesus, Alexandra Galhano, J. Boaventura Cunha, (2006). Fractional Order Electromagnetics. *Journal of Signal Processing (EURASIP/Elsevier)*, Special Issue on Fractional Calculus Applications in Signals and Systems, vol. **86**, no. 10, pág. 2637-2644.
- Mahin Peter J., George L. Paul, Sarkis M. Keshishian, Anthony M. Vassallo (2000). Measurement and modelling of the high-power performance of carbon-based supercapacitors. *Journal of Power Sources*, vol. **91**, pp. 68–76, Elsevier.
- Mainardi Francesco (1994). Fractional Relaxation and Fractional Diffusion Equations, Mathematical Aspects. In: *Proceedings 12-th IMACS World Congress*, edições W. F. Ames, vol. **1**. pp. 329 – 332, Atlanta.
- Mainardi Francesco (1996a). Linear viscoelasticity. *Stability, vibration and control of structures*, World Scientific.
- Mainardi Francesco (1996b). Fractional Relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Journal of Chaos, Solitons & Fractals*, vol. **7**, pp. 1461 – 1477.
- Mainardi F. e R. Gorenflo (1996). The Mittag-Leffer functions in the Riemann-Liouville fractional calculus. In: *Boundary Value Problems, special functions and fractional calculus*, (Edições A. A. Kilbas), pp. 215 – 225, Minsk.
- Mainardi F. (1997). Fractional Calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Springer Verlag), New York.
- Martinsen Orjan G., Sverre Grimnes, Herman P. Schwan (2002). Interface Phenomena and Dielectric Properties of Biological Tissue. In: *Encyclopedia of Surface and Colloid Science*, pp. 2643–2652.

- Mbodje B., G. Montseny (1995). Boundary fractional derivative control of the wave equation. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. **40**, pp. 378 – 382.
- McBride A. C. (1979). Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions. *Res. Notes in Math.*, vol. **31**, Pitman Press, San Francisco.
- Mehauté Le A., e G. Crepy (1983). Introduction to transfer and motion in fractal media: the geometry of kinetics, *Solid State Ionics*, vol. **9 – 10**, pp. 17 – 30.
- Miller K. S., B. Ross (1993). *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Nakagawa M., K. Sorimachi (1992). Basic characteristics of a fractance device. *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. **E75 – A**, n<sup>o</sup>. 12, pp. 1814 – 1819.
- Nigmatullin R. (1984). On the theory of relaxation with “remnant” memory. *Phys. Stat. Sol. B*, vol. **124**, pp. 389 – 393.
- Nishimoto K. (1991). An essence of Nishimoto’s Fractional Calculus. *Descartes Press Co*, Koriyama.
- Niu J., J. Y. Lee (2000). A new approach for the Determination of Fish Freshness by Electrochemical Impedance Spectroscopy. *Journal of Food Science*, vol. **65**, n<sup>o</sup>. 5, pp. 780–785.
- Ochmann M., S. Makarov, (1993). Representation of the absorption of nonlinear waves by fractional derivatives. *Journal of Amer. Acoust. Soc.*, vol. **94**, n<sup>o</sup>. 6, pp. 3392-3399.
- Oldham K. B., J. Spanier (1970). The replacement of Fick’s law by a formulation involving semidifferentiation. *J. Electroanal. Chem. and Interfacial Electrochem*, vol. **26**, pp. 331 – 341.

Oldham Keith B. e Jerome Spanier (1974). *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New York.

Ortigueira M. D. (2000a). Introduction to Fractional Signal Processing. Part1: Continuous–Time Systems. *IEE Proc. on Vision, Image and Signal Processing*, nº. 1.

Ortigueira M. D. (2000b). Introduction to Fractional Signal Processing. Part2: Discrete–Time Systems. *IEE Proc. on Vision, Image and Signal Processing*, nº. 1.

Oustaloup A. (1983). *Systèmes asservis linéaires d’ordre fractionnaire*. Masson, Paris.

Oustaloup Alain (1991). *La Commande CRONE*. Edições Hermes, Paris.

Oustaloup, Alain and Pierre Melchior (1993). The Great Principles of the CRONE Control. In: *Systems Engineering in the Service of Humans Conference*, vol. 2, pp. 118 – 129.

Oustaloup Alain (1994). *La Robustesse*. Edições Hermes, Paris.

Oustaloup Alain (1995). *La Dérivation Non Entière: Théorie, Synthèse et Applications*. Edições Hermes, Paris.

Oustaloup Alain, François Levron, Benoît Mathieu, Florence M. Nanot (2000). Frequency-Band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis. *IEEE Transactions on circuits and systems – fundamental theory and applications*, vol. 47, nº. 1.

Petrás Ivo, Blas M. Vinagre (2002). Practical application of digital fractional–order controller to temperature control. *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 7, nº. 2, pp. 131–137.

- Pires E. J. Solteiro, J. A. Tenreiro Machado, P. B. de Moura Oliveira (2003). Fractional Order Dynamics in a GA planner. *Signal Processing*, vol. **83**, pp. 2377 – 2386.
- Podlubny I. (1995). Numerical solution of ordinary fractional differential equations by the fractional difference method. In: *Advances in difference equations, proceedings of the second international conference on difference equations*, Gordon and Breach Science Publishers, pp. 507 – 515, Hungria.
- Podlubny I. (1999a). *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, vol. **198**, Academic Press.
- Podlubny I. (1999b). Fractional–Order Systems and  $PI^\lambda D^\mu$  –Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. **44**, n.º. 1.
- Rossikhin Yu A., M. V. Shitikova, (1997). Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. *Appl. Mech. Rev.*, vol. **50**, n.º. 1, pp. 15 – 67.
- Rubin B. (1996). Fractional Integrals and Potentials. In: *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, vol. **82**, Harlow.
- Samavati Hirad, Ali Hajimiri, Arvin R. Shahani, Gitty N. Nasserbakht, Thomas H. Lee (1998). Fractal Capacitors. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. **33**, n.º. 12, pp. 2035–2041.
- Samko Stefan G., Anatoly A. Kilbas, Oleg I. Marichev (1987a). *Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications*. Nauka & Tekhnika, Minsk.
- Samko Stefan G., Anatoly A. Kilbas, Oleg I. Marichev (1987b). *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers.



- Samko Stefan G., Anatoly A. Kilbas, Oleg I. Marichev (1993). *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*. Gordon and Breach, Amsterdam.
- Valério Duarte, José Sá da Costa (2005a). Levy's identification method extended to commensurate fractional order transfer functions. In: *ENOC-05 conference*, pp. 1357-1366, Holanda.
- Valério Duarte, José Sá da Costa, (2005b). Ziegler–Nichols type tuning rules for fractional PID controllers. In: *Proceedings of ASME 2005 international Design Engineering Technical Conferences*, 10 pag., Califórnia.
- Vinagre B. M., Y. Q. Chen, I. Petrás (2001). Two Methods for Direct Discretization of Fractional-order Differentiator/Integrator. *Automática*.
- Vorperian V. (1992). A fractal model of anomalous losses in ferromagnetic materials. In: *PESC'92, Rec 23rd Annual IEEE Power Electronics Specialists Conf.*, vol. **2**, pp. 1277 – 1283.
- Westerlund S. (1991). Dead matter has memory!. *Phys. Scripta* vol. **43**, pp. 174 – 179.
- Westerlund Svante, Lars Ekstam (1994). Capacitor Theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. **1**, n<sup>o</sup>. 5.
- Yuste S. B., L. Acedo (2003). *On an explicit finite difference method for fractional diffusion equations*. Elsevier Science.



# Capítulo 3

---

## *SISTEMAS DE DIFUSÃO*

O operador de ordem fraccionária  $s^{0.5}$  aparece em muitos tipos de problemas físicos [Battaglia, (2001)]. As linhas de transmissão, o fluxo de calor ou a difusão de neutrões num reactor nuclear são exemplos onde o operador de derivada de ordem  $\frac{1}{2}$  constitui um elemento fundamental. Mais ainda, a difusão é uma das três equações diferenciais parciais fundamentais encontradas na matemática [Courant, Hilbert, (1962)].

Normalmente, para analisar equações às derivadas parciais, tendo em vista a análise de sistemas físicos, utilizam-se métodos às diferenças finitas, já que estes permitem a obtenção de soluções numéricas simples e eficientes. Este é o principal motivo pelo qual, neste capítulo, se opta por métodos numéricos às diferenças finitas.

Uma das opções utilizadas para controlar alguns sistemas físicos consiste nos algoritmos Proporcionais, Integrais e Derivados (PID). Ao longo das últimas décadas foram desenvolvidas várias técnicas de sintonia para determinar os valores dos parâmetros dos algoritmos PIDs. Entre elas, porventura, as mais conhecidas são as regras de sintonia de Ziegler-Nichols. No

entanto, frequentemente essas heurísticas não produzem resultados satisfatórios. Desta forma, foram desenvolvidos outros métodos baseados no lugar geométrico das raízes e em diversas técnicas de optimização [Barbosa, *et al.*, (2004)], [Machado, *et al.*, (2004a)], [Machado, *et al.*, (2005a)]. Nessa ordem de ideias, nos últimos anos têm vindo a ser objecto de estudo controladores desenvolvidos na perspectiva do CF que, em alguns sistemas, assumem uma importância considerável.

Neste capítulo descrevem-se dois sistemas de difusão no domínio dos tempos e das frequências, a saber, as linhas eléctricas de transmissão e a difusão de calor. Para este último caso, são propostos seis algoritmos de controlo, nomeadamente controladores P, PID,  $PID^\beta$  (componente derivativa de ordem fraccionária), sendo ainda estudada a influência das estruturas de predictor de Smith (PS), usadas para eliminar atrasos na resposta dos sistemas físicos.

Neste capítulo são apresentadas estratégias para a sintonia dos controladores PID generalizados, nomeadamente do algoritmo  $PID^\beta$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Os métodos de sintonia propostos consistem na minimização do integral do erro quadrático (ISE) e do integral do erro quadrático multiplicado pelo tempo (ITSE) da resposta temporal do sistema ao degrau unitário, bem como na determinação da energia consumida pela sistema.

Para uma melhor compreensão dos métodos de sintonia utilizados, e antes de se proceder à descrição dos algoritmos de controlo implementados, são apresentados os conceitos fundamentais da teoria do controlo. São também abordados os conceitos associados ao  $PID^\beta$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , os efeitos decorrentes da existência de uma saturação no actuador, bem como alguns índices de medida de desempenho.

Tendo por base o exposto, este capítulo é organizado da seguinte forma. Na secção 3.1 é efectuada uma introdução matemática aos sistemas de difusão.

Na secção 3.2, e subsecções correspondentes, é apresentado o sistema das linhas eléctricas de transmissão, sendo referidas as equações matemáticas que descrevem o sistema no domínio dos tempos e no domínio das frequências. Nas secções 3.3 e 3.4 é descrito, respectivamente o sistema de difusão de calor e as estratégias de controlo implementadas para este sistema. Por último, na secção 3.5 são tecidas as principais conclusões inerentes ao capítulo.

### 3.1. Introdução

A formulação matemática de muitos problemas científicos envolve variações relativamente a duas ou mais variáveis independentes, sendo as mais usuais o tempo e o espaço (linear ou angular), conduzindo-nos a equações diferenciais parciais. Casos especiais de equações de segunda ordem bidimensionais, podem ser descritos pela seguinte equação geral:

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f\phi + g = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$  podem ser funções das variáveis independentes  $\{x, y\}$  e da variável dependente  $\{\phi\}$ .

Alguns dos fenómenos físicos descritos por uma equação do tipo (3.1), são as linhas eléctricas de transmissão e os sistemas de difusão de calor [Vinagre, *et al.*, (2001b)]. Estes dois sistemas vão ser estudados no decorrer deste capítulo sob o ponto de vista do CF.

## 3.2. Linhas Eléctricas de Transmissão

A transmissão eléctrica de sinais e de potência é, talvez, uma das contribuições da engenharia tecnológica mais importantes para a civilização moderna.

O responsável pela análise matemática dos sinais de propagação em linhas de transporte foi Olivier Heaviside, que publicou um livro em 1880 baseado na teoria do electromagnetismo desenvolvida por Maxwell [Heaviside, (1893)].

Durante o século XX as linhas eléctricas de transmissão, as microondas, as telecomunicações e o subsequente desenvolvimento de inúmeras aplicações, tornaram populares a introdução da teoria das linhas de transmissão na engenharia electrotécnica [Adler, *et al.*, (1969)], [Chipman, (1968)].

As equações matemáticas que descrevem as linhas eléctricas de transmissão são apresentadas nas subsecções seguintes.

### 3.2.1 Equações Diferenciais Uniformes de Linhas Eléctricas de Transmissão

Um dos problemas relacionados com as linhas de transmissão prende-se com o facto de, em muitos casos práticos, os actuais sinais suportados pelos circuitos das linhas de transmissão, não estarem confinados a uma simples frequência, e cobrirem uma largura de banda finita. Exemplos comuns são a faixa de frequências de áudio, dos sinais de voz, a faixa de frequências de vídeo, dos sinais de televisão, e as frequências harmónicas no espectro de Fourier de transitórios comutados ou induzidos por relâmpagos nas linhas de potência.

Como o comportamento das linhas de transmissão varia com a frequência, o sinal, de comprimento de onda não nulo, é distorcido ao longo da

transmissão. A natureza da distorção, para um sinal de multi-frequência, é devida à relação entre a fase e a amplitude da componente de frequências do sinal não serem as mesmas para a saída da linha de transmissão e para o sinal originalmente introduzido na entrada.

A distorção sofrida pelo sinal pode ser analisada através da resolução das equações das linhas de transmissão no domínio dos tempos, pois as equações diferenciais correspondentes envolvem derivadas em ordem ao tempo e ao espaço, para valores instantâneos da corrente e da tensão, ou resolvendo as equações no domínio complexo das frequências.

De seguida vão ser apresentadas as equações diferenciais no domínio dos tempos e das frequências, considerando os coeficientes de distribuição do circuito constantes em ambos os casos.

#### 3.2.1.1 Equações no Domínio dos Tempos

Para uma linha de transmissão uniforme, as equações diferenciais são obtidas considerando-se uma secção infinitesimal da linha com comprimento  $dx$ , localizada na coordenada  $x$  da linha. O circuito equivalente de uma linha de transmissão pode ser representado de diferentes formas. Uma possível representação é a indicada na Figura 3.1.

A análise deste circuito revela que a tensão de saída da secção, difere da tensão de entrada, devido às quedas de tensão em série ao longo dos elementos resistivos e indutivos, enquanto as saídas de corrente diferem das correntes de entrada devido às correntes paralelas nas condutâncias e nos elementos capacitivos. Utilizando as variáveis instantâneas ilustradas na Figura 3.1 e aplicando as leis de Kirchhoff ao circuito, obtêm-se as seguintes equações diferenciais parciais [Yen, *et al.*, (1982)], [Machado, Jesus, (2004b)]:

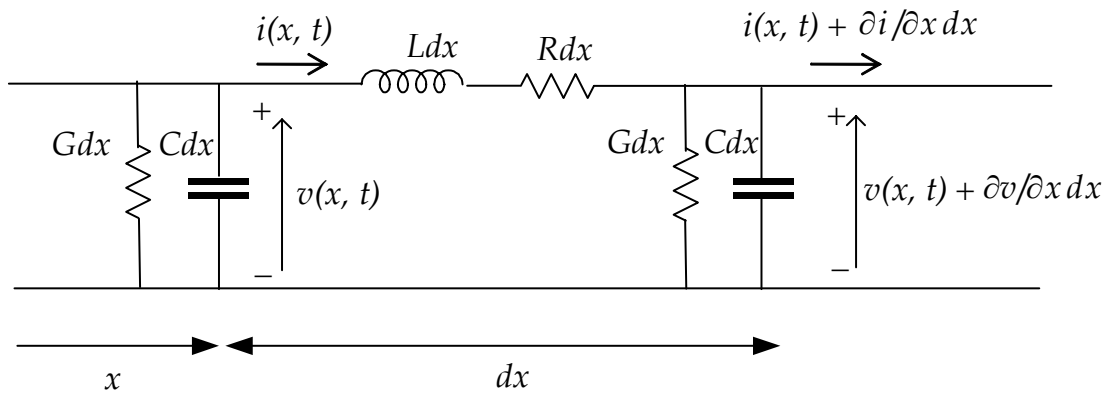


Figura 3.1 - Circuito equivalente a uma secção infinitesimal de uma linha de transmissão uniforme (no domínio temporal).

$$v(x + \Delta x, t) - v(x, t) \equiv \Delta v(x, t) = -R\Delta x i(x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$i(x + \Delta x, t) - i(x, t) \equiv \Delta i(x, t) = -G\Delta x v(x, t) - C\Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (3.3)$$

Esta secção da linha<sup>1</sup> possui resistência série  $Rdx$ , indutância série  $Ldx$ , capacidade paralela  $Cdx$  e conductância paralela  $Gdx$ .

Dividindo as equações anteriores por  $\Delta x$  e, de seguida, aproximando  $\Delta x$  a zero, obtemos as equações 3.4 e 3.5, para a tensão e para a corrente, respectivamente.

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -Ri(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -Gv(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (3.5)$$

onde  $t$  representa o tempo,  $v$  a tensão e  $i$  a corrente eléctrica.

<sup>1</sup> As unidades dos componentes eléctricos das linhas eléctricas de transmissão por secção são: resistência série [ $\Omega \text{ m}^{-1}$ ]; indutância série [ $\text{H m}^{-1}$ ], capacidade paralela [ $\text{F m}^{-1}$ ], conductância paralela [ $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ]



Os aspectos físicos envolvidos nas equações (3.4) e (3.5) são relativamente simples. A equação (3.4) representa na forma diferencial, a razão da alteração da tensão com a distância ao longo de uma linha. A tensão num ponto da linha é a soma de duas tensões longitudinais. Uma componente, causada pela corrente de linha que flui ao longo das resistências série, é proporcional aos valores instantâneos da corrente da linha num ponto. A outra componente, provém da variação da corrente ao longo do tempo nas indutâncias da linha, e é proporcional à derivada da corrente da linha num ponto. Para as duas componentes, as respectivas constantes de proporcionalidade são as resistências série e as indutâncias série por unidade de comprimento da linha. A equação (3.5) pode ser interpretada de uma forma similar.

### 3.2.1.2 Resolução de Equações no Domínio dos Tempos

A resolução das equações (3.4) e (3.5) permite determinar as expressões para  $v$  e  $i$  em função de  $x$  e de  $t$ , quando sujeitas às condições de fronteira (Anexo B) que são determinadas pela natureza dos dispositivos de conexão nos terminais da linha, ou seja, da fonte de sinal geradora, para  $x = 0$ , e do terminal de carga do circuito, para  $x = l$ .

O primeiro passo para a resolução simultânea das equações consiste na eliminação de uma das variáveis. Isto é possível se considerarmos a derivada parcial em relação a  $x$  para todas as parcelas da equação (3.4):

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -R \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} - L \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \right) \quad (3.6)$$

A ordem de diferenciação da segunda parcela do lado direito pode ser modificada, obtendo-se:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -R \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} - L \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \right) \quad (3.7)$$

Quando a parcela da direita da equação (3.5) é substituída em  $\partial i(x,t)/\partial x$  na equação (3.7), resulta:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + RGV(x,t) \quad (3.8)$$

O procedimento alternativo consiste em considerar a derivada parcial com respeito a  $x$  para todas as parcelas da equação (3.5), e por substituição da expressão  $\partial v(x,t)/\partial x$  obtida através da equação (3.4), a equação diferencial em  $i(x, t)$  será similar à (3.8), isto é;

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + RGi(x,t) \quad (3.9)$$

De facto, tanto  $i(x,t)$  com  $v(x,t)$  provêm da mesma equação diferencial. No entanto, isso não significa que, num problema prático, possuam ambas funções idênticas de  $x$  e  $t$ , dependendo das condições de fronteira que normalmente não são as mesmas para as duas variáveis.

A derivação das equações (3.8) e (3.9) encontra-se descrita completamente relativamente à possível inter-relação da tensão e da corrente. No entanto, deve-se notar que esta análise pode ser violada pelo facto dos coeficientes distribuídos do circuito  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  serem variáveis com a frequência. Para alguns problemas, a exactidão da solução para as equações (3.8) e (3.9) com os parâmetros  $R$ ,  $L$ ,  $G$ , e  $C$  considerados constantes, irão depender de uma forma complicada da gama de valores instantâneos da corrente, da tensão e das suas derivadas.

Quando  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  são considerados constantes para todos os valores da corrente e da tensão e suas derivadas, as expressões (3.8) e (3.9) são equações diferenciais parciais de segunda ordem na coordenada temporal e de primeira ordem para a coordenada espacial. Existe uma similaridade com equações diferenciais parciais clássicas que descrevem outros fenômenos físicos, pelo que podem ser encontradas numerosas soluções em diferentes referências bibliográficas [Crank, (1956)], [Chipman, (1968)], [Adler, *et al.*, (1969)], [Yen, *et al.*, (1982)], [Battaglia, *et al.*, (2000)].

Frequentemente, nas especificações das linhas de transmissão é estabelecido que alguns dos parâmetros  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  são suficientemente pequenos para poderem ser considerado nulos. Assim, algumas das parcelas do segundo membro das equações (3.8) e (3.9) desaparecem. Por exemplo, no caso de  $L = G = 0$ , estamos perante a descrição de um condutor simples de um cabo telegráfico submarino, usado a baixas frequências para as chamadas transmissões telegráficas em corrente contínua. Se  $L = 0$  e  $G = 0$  as equações (3.8) e (3.9) reduzem-se ao equivalente às equações de difusão de calor, apresentadas na secção 3.3, onde  $v$  e  $i$  são análogas respectivamente à temperatura e ao fluxo de calor. Para este tipo de cabos os parâmetros  $R$  e  $C$  do circuito são constantes e a formulação é bastante precisa relativamente a todos os aspectos que envolvam o sinal. No caso de  $R = G = 0$  as linhas não possuem perdas. É sabido que nenhuma das linhas de transmissão é totalmente isenta de perdas. No entanto, o resultado da equação simplificada fornece informações úteis sobre as propriedades da linha para pequenos comprimentos do condutor (que não possuem perdas) para as altas frequências das linhas de transmissão, tais como as utilizadas para os sinais de potência de televisão transmitidos por antena.

Refira-se ainda, que para uma linha de transmissão semi-infinita de condutância e indutância por unidade de comprimento desprezáveis, ( $L = 0$  e

$G = 0$ ), e considerando as condições iniciais nulas,  $u(x,0) = 0$  e  $i(x,0) = 0$ , quando se aplica uma tensão na sua extremidade transmissora,  $x = 0$ , dada por  $v(0,t) = \begin{cases} V_0, & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$ , a tensão  $v(x,t)$  num ponto qualquer  $x > 0$  e num instante de tempo qualquer  $t > 0$ , tem como solução do sistema, no domínio dos tempos, as duas equações a seguir apresentadas, ambas para a tensão, mas para diferentes intervalos de tempo.

$$v(x,t) = v_0 \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad 0 < t < T \quad (3.10a)$$

$$v(x,t) = v_0 \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad t > T \quad (3.10b)$$

Por seu lado, e para as mesmas condições iniciais e de fronteira estipuladas para as expressões anteriores, as equações a seguir apresentadas, correspondem à solução do sistema para a corrente  $i(x,t)$ , para os mesmos intervalos de tempo referidos para a tensão (3.10) [Kraus, Fleisch, (1999)].

$$i(x,t) = \frac{v_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C}{R}} t^{-3/2} e^{-RC \frac{x^2}{4t}}, \quad 0 < t < T \quad (3.11a)$$

$$i(x,t) = \frac{v_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C}{R}} \left[ t^{-3/2} e^{-RC \frac{x^2}{4t}} - (t-T)^{-3/2} e^{-RC \frac{x^2}{4(t-T)}} \right], \quad t > T \quad (3.11b)$$

### 3.2.1.3 Equações no Domínio das Frequências

Para o desenvolvimento do modelo matemático que descreve as linhas de transmissão no domínio das frequências, temos que recorrer ao circuito da Figura 3.1 considerando igualmente um comprimento infinitesimal  $\Delta x$  da linha. Podemos, assim, escrever duas equações:

$$V(x + \Delta x) - V(x) = \Delta V(x) = -R\Delta x I(x) - j\omega L\Delta x I(x) \quad (3.12)$$

$$I(x + \Delta x) - I(x) = \Delta I(x) = -G\Delta x V(x) - j\omega C\Delta x V(x) \quad (3.13)$$

Cada parcela destas equações é formada por números e variáveis complexas. São implicitamente funções harmônicas do tempo a uma frequência angular  $\omega$  descrita em radianos por segundo. O ângulo de fase zero, referente aos valores complexos, é arbitrário, quando for expresso na forma polar. A escolha conveniente para essa referência deve ser o vector da fonte de tensão, ou o vector da tensão aplicada ao terminal de carga no final da linha.

Se analisarmos as linhas de transmissão no domínio das frequências temos que considerar o operador da transformada de Fourier  $\mathfrak{I}$  tal que  $I(x, j\omega) = \mathfrak{I}\{i(x, t)\}$  e  $V(x, j\omega) = \mathfrak{I}\{v(x, t)\}$ , onde  $j = (-1)^{1/2}$ . Dividindo as equações (3.12) e (3.13) por  $\Delta x$  e aproximando o próprio  $\Delta x$  a zero, obtemos as seguintes equações diferenciais:

$$dV(x, j\omega)/dx = -(R + j\omega L)I(x) \quad (3.14)$$

$$dI(x, j\omega)/dx = -(G + j\omega C)V(x) \quad (3.15)$$

A equação (3.14) diz que a razão da variação do vector da tensão com a distância, para um ponto específico da linha, é igual à série das impedâncias da linha por unidade de comprimento, multiplicada pelo vector da corrente para um ponto. A equação (3.15) diz que a razão da variação do vector da corrente com a distância ao longo da linha, para um ponto específico, é igual ao paralelo das admitâncias por unidade de comprimento da linha, multiplicada pelo vector da tensão nesse ponto.

Resolvendo estas equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, para as equações em  $V$  e  $I$ , obtemos duas equações de segunda ordem:

$$d^2V(x, j\omega)/dx^2 - (R+j\omega L)(G+j\omega C)V(x, j\omega) = 0 \quad (3.16)$$

$$d^2I(x, j\omega)/dx^2 - (R+j\omega L)(G+j\omega C)I(x, j\omega) = 0 \quad (3.17)$$

Estas expressões são mais simples que as equações (3.8) e (3.9) descritas anteriormente, e as suas soluções em termos de  $V$  e  $I$ , e em função de  $x$ , podem ser escritas directamente através de expressões simples.

As equações (3.16) e (3.17) encontram solução no domínio das frequências, através de expressões do tipo:

$$V(x, j\omega) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} \quad (3.18)$$

$$I(x, j\omega) = Z_c^{-1} (A_2 e^{-\gamma x} - A_1 e^{\gamma x}) \quad (3.19)$$

onde  $Z_c(j\omega) = [Z(j\omega)Y^{-1}(j\omega)]^{1/2} = [(R + j\omega L)/(G + j\omega C)]^{1/2}$ , representa a impedância característica,  $\gamma(j\omega) = [Z(j\omega)Y(j\omega)]^{1/2} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$  e onde  $Z(j\omega) = R + j\omega L$  e  $Y(j\omega) = G + j\omega C$ . Estas expressões possuem duas parcelas que correspondem a ondas com direcções opostas, nomeadamente  $e^{-\gamma x}$  é devida ao sinal aplicado na entrada da linha, enquanto que a parcela  $e^{\gamma x}$  representa a onda reflectida.

Para uma linha de transmissão com comprimento  $l$  é usual adoptar-se as variáveis da distância até ao seu final dada por:

$$y = l - x \quad (3.20)$$

Se  $V_2$  e  $I_2$  representarem a tensão e a corrente no fim da linha de transmissão então, a transformada de Fourier das equações (3.4) e (3.5) na coordenada  $y$  são dadas por:

$$V(x, j\omega) = V_2 ch(\gamma y) + I_2 Z_c sh(\gamma y) \quad (3.21)$$

$$I(x, j\omega) = V_2 Z_c^{-1} sh(\gamma y) + I_2 ch(\gamma y) \quad (3.22)$$

Desta forma, para uma impedância de carga  $Z_2(j\omega)$  obtém-se  $V_2(j\omega) = Z_2(j\omega) I_2(j\omega)$  sendo a impedância de entrada da linha de transmissão  $Z_i(j\omega)$  dada por:

$$Z_i(j\omega) = [Z_2 ch(\gamma y) + Z_c sh(\gamma y)] [Z_2 Z_c^{-1} sh(\gamma y) + ch(\gamma y)]^{-1} \quad (3.23)$$

Tipicamente são considerados três casos no final da linha, nomeadamente curto circuito, circuito aberto e linha adaptada, que simplificando-se a equação (3.23), resultam em:

$$V_2 = 0, \quad Z_2(j\omega) = 0, \quad Z_i(j\omega) = Z_c(j\omega) th(\gamma y) \quad (3.24a)$$

$$I_2 = 0, \quad Z_2(j\omega) = \infty, \quad Z_i(j\omega) = Z_c(j\omega) cth(\gamma y) \quad (3.24b)$$

$$Z_2(j\omega) = Z_c(j\omega), \quad Z_i(j\omega) = Z_c(j\omega) \quad (3.24c)$$

Uma perspectiva clássica consiste em estudar as linhas isentas de perdas, ou seja, quando  $R = 0$  e  $G = 0$  (situação frequente nos sistemas de potência) e aproximá-las no domínio das frequências, originando redes com elementos de ordem inteira. As equações transcendentais (3.23) e (3.24), conduzem a expressões de ordem fraccionária. Por exemplo, no caso de uma linha adaptada, em que  $R, C, L, G \in \mathfrak{R}^+$ , podemos obter capacidades e indutâncias de ordem fraccionária 0,5, segundo as seguintes expressões:

$$L = 0, G = 0 \Rightarrow Z_c(j\omega) = \left[ (j\omega)^{-1} RC^{-1} \right]^{1/2} \quad (3.25a)$$

$$R = kL, G = kC (k \in \mathfrak{R}) \Rightarrow Z_c(j\omega) = \left[ RL^{-1} \right]^{1/2} \quad (3.25b)$$

$$R = 0, C = 0 \Rightarrow Z_c(j\omega) = \left[ j\omega LG^{-1} \right]^{1/2} \quad (3.25c)$$

Sabe-se que para as baixas frequências temos  $\omega \rightarrow 0$ , resultando  $th(\gamma l) \rightarrow \gamma l$ ,  $cth(\gamma l) \rightarrow (\gamma l)^{-1}$  e para as altas frequências temos  $\omega \rightarrow \infty$ , resultando  $th(\gamma l) \rightarrow 1$ ,  $cth(\gamma l) \rightarrow 1$ . Assim, pode-se obter as seguintes aproximações para os casos de curto circuito e de circuito aberto:

$$Z_i(j\omega) = \begin{cases} Z(j\omega)l, & \omega \rightarrow 0 \\ Z_c(j\omega), & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.26a)$$

$$Z_i(j\omega) = \begin{cases} [Y(j\omega)l]^{-1}, & \omega \rightarrow 0 \\ Z_c(j\omega), & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.26b)$$

Conclui-se que ambos os casos aproximam a condição (3.24c) às altas frequências. Estes resultados sugerem a implementação de impedâncias de ordem fraccionária, que de alguma forma poderão ser aplicadas em circuitos eléctricos como, por exemplo, em sistemas de microondas.

No decorrer deste trabalho, mais propriamente no Capítulo 5, irão ser apresentados estudos relacionados com impedâncias de ordem fraccionária, com propriedades dieléctricas para a obtenção de condensadores fraccionários e com estruturas fractais.



### 3.3. Difusão de Calor

Em muitas aplicações industriais é importante que a distribuição da temperatura ao longo dos vários componentes da área de trabalho seja o mais uniforme possível. É clara a dificuldade existente em determinar a distribuição da temperatura no interior dos materiais ou dos sistemas. No entanto, a medição da temperatura nas suas superfícies é uma rotina comum. Desta forma, detectou-se o problema da observabilidade e do controlo da distribuição da temperatura ao longo das superfícies disponíveis dos materiais.

O sistema de difusão de calor é representado por uma equação diferencial parcial (EDP) linear [Courant, Hilbert, (1962)], dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.27)$$

onde  $k$  representa a difusividade,  $t$  o tempo,  $u$  a temperatura e  $(x, y, z)$  as coordenadas cartesianas no espaço. A difusividade  $k$  é dada por  $k = \frac{K}{c\rho}$  sendo  $K$  a condutividade térmica,  $c$  o calor específico e  $\rho$  a densidade.

Este sistema envolve a integração de uma EDP do tipo parabólica (ver Anexo B), para a qual a teoria clássica das EDP parabólicas garante a existência de uma solução única [Stanley, (1993)].

No âmbito deste trabalho é estudada uma superfície plana perfeitamente isolada onde se aplica uma temperatura constante  $U_0$  em  $x = 0$  e analisa-se a difusão de calor ao longo da coordenada horizontal  $x$ , pelo que a equação (3.27) passa agora a ser simplesmente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.28)$$

A difusão de calor, sob as condições previamente apresentadas, é caracterizada por um modelo de ordem não inteira. De facto, a solução da EDP no domínio  $s$  corresponde à expressão:

$$U(x,s) = \frac{U_0}{s} G(s), \quad G(s) = e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}} \quad (3.29)$$

onde  $x$  é a coordenada no espaço,  $U_0$  representa as condições de fronteira (ver Anexo B) e  $G(s)$  é a função de transferência do sistema. Como se pode comprovar, a equação (3.29) apresenta o factor  $\sqrt{s}$ , pelo que se verifica que este sistema possui características de ordem fraccionária 0,5.

A solução do sistema (3.29), no domínio dos tempos, é dada pela equação:

$$u(x,t) = U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) = U_0 \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-u^2} du \right] \quad (3.30)$$

onde  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du$ .

No decorrer da pesquisa efectuada, para selecção do método numérico com vista à resolução de equações às derivadas parciais utilizando métodos às diferenças finitas, verificou-se que nem todos os algoritmos se revelam estáveis perante a variação dos parâmetros das equações às diferenças finitas [Crank, (1956)], [Curtis, (1999)].

No caso do método explícito, que para a equação (3.28) se traduz por:

$$u[j+1,i] = (u[j,i+1] + u[j,i-1])r + (1-2r)u[j,i] \quad (3.31)$$

onde  $r = \frac{K\Delta t}{c\rho\Delta x^2}$ ,  $\{\Delta x, \Delta t\}$  e  $\{i, j\}$  são respectivamente os incrementos e os índices

de integração para o espaço e para o tempo, verifica-se que, quando o parâmetro  $r$  da equação (3.31) assume valores superiores a 0,5, o sistema torna-se instável. Assim, optou-se por outra metodologia que garantisse a estabilidade do sistema para todos os valores de  $r$ . Aplicou-se então, à equação (3.28) o método numérico de integração implícita designado por *Crank-Nicholson* [Crank, (1956)], que permite a utilização de qualquer valor para a constante  $r$ , solucionando os problemas inerentes às equações parabólicas. O método de Crank-Nicholson aplicado à equação (3.28) conduz à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} -ru[j+1,i+1] + (2+r)u[j+1,i] - ru[j+1,i-1] = \\ ru[j,i+1] + (2-r)u[j,i] + ru[j,i-1] \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde,  $r = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ,  $\{\Delta x, \Delta t\}$  e  $\{i, j\}$  são respectivamente, os incrementos e os índices de integração para o espaço e para o tempo [Machado, *et al.*, (2005a)].

Utilizando este método de integração numérica estuda-se de seguida, a difusão de calor no domínio dos tempos e no domínio das frequências. Para tal, aplica-se na entrada do sistema um degrau unitário  $R(s) = 1/s$ , e estuda-se o sinal teórico descrito pela equação (3.30)  $g(t)$  e o sinal numérico  $\tilde{g}(t)$  dado pela expressão (3.32), ambas no domínio dos tempos, para  $x = 3,0$  m e  $k = 0,042 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , Figura 3.2. Pela análise desta figura, verifica-se a existência de uma disparidade entre os dois sinais, nomeadamente um menor ganho de  $\tilde{g}(t)$ . O estudo de ambos os sinais no domínio das frequências, também para

$x = 3,0 \text{ m}$  e  $k = 0,042 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , Figura 3.3, revelou uma diferença às baixas frequências, sendo bastante idênticos às altas frequências, corresponde à introdução de perdas adicionais às baixas frequências [Curtis, (1999)], [Stanley, (1993)].

A diferença entre estes dois sinais está relacionada com o facto de na equação (3.28) termos uma derivada de segunda ordem relativamente ao espaço, pelo que, após se efectuar a primeira derivada se obtém uma constante, surgindo após a segunda derivada um valor nulo, que se traduz num declive também nulo, surgindo por isso, uma recta horizontal paralela ao eixo real.

O problema atrás referido torna-se substancialmente maior quando a distância relativamente ao ponto onde se excita o sistema aumenta.

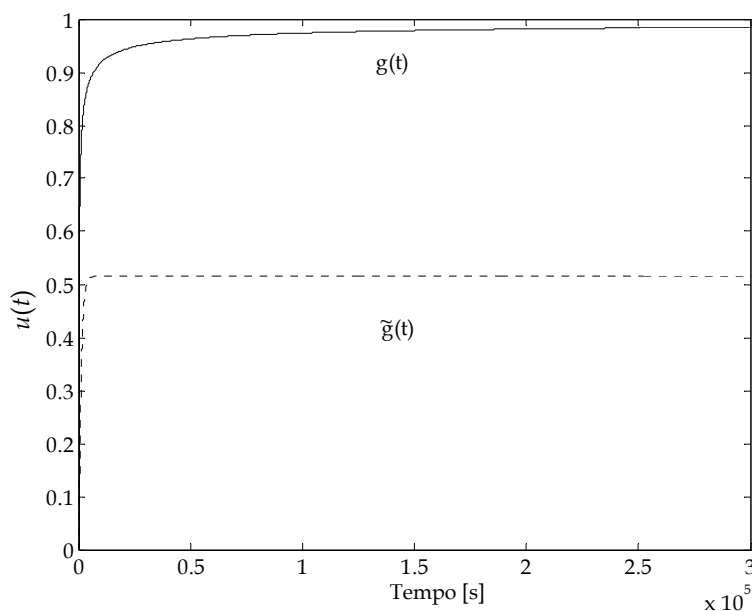


Figura 3.2 - Resposta temporal de  $g(t)$  e de  $\tilde{g}(t)$  para  $x = 3,0 \text{ m}$  e  $k = 0,042 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

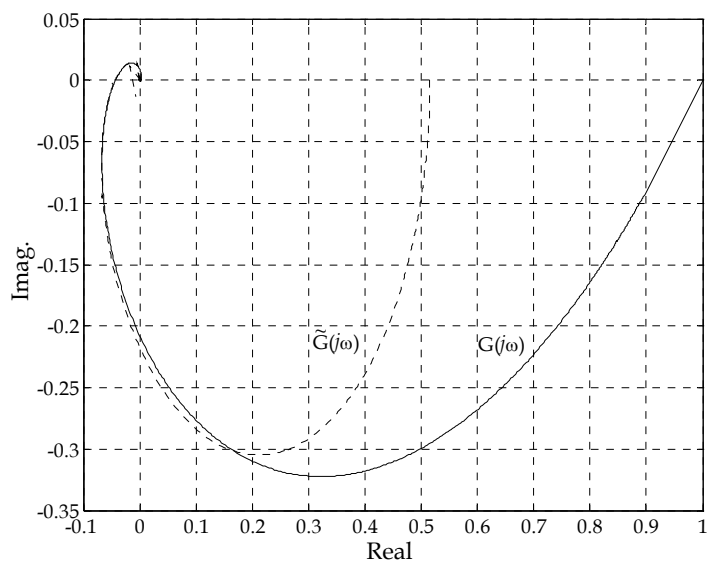


Figura 3.3 - Diagrama polar de  $G(j\omega)$  e de  $\tilde{G}(j\omega)$  para  $x = 3,0$  m e  $k = 0,042$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>.

Por outro lado, verifica-se que o diagrama polar em malha aberta da Figura 3.3, revela similaridades com um filtro passa baixo com um tempo de atraso. Nesta ordem de ideias, considerou-se o controlo do sistema de calor com vários algoritmos diferentes, que vão ser descritos na secção a seguir apresentada.

### 3.4. Estratégias de Controlo para o Sistema de Difusão de Calor

A escolha dos valores apropriados para os parâmetros de um controlador PID, por forma a obterem-se desempenhos satisfatórios no sistema, é um procedimento complexo. De facto, não existem ajustes globais óptimos, já que estes dependem não só do critério usado, mas também do sistema que está a ser estudado [Zhuang, Atherton, (1993)].

São várias as técnicas de sintonia de controladores existentes no entanto, as mais usadas foram desenvolvidas por Ziegler e Nichols em 1942, por Cohen e Coon em 1953 e por Shinskey em 1979. Estes investigadores basearam as suas técnicas em modelos matemáticos do processo com ordens o mais baixo possível, nomeadamente um modelo de um processo com uma constante de tempo e um atraso na resposta do sistema ao degrau unitário, representado por uma função de transferência:

$$\hat{G}_{ZNMA} = \frac{K_{Modelo}}{\tau s + 1} e^{-sT} \quad (3.33)$$

Este modelo (3.33) é um dos mais adequados para a maioria dos problemas de controle de processos industriais. Os parâmetros deste modelo são determinados através da resposta do processo a uma variação em degrau na entrada, com uma amplitude  $M$ . Os parâmetros  $T$  e  $\tau$  podem ser calculados através de uma análise gráfica no domínio dos tempos do sistema a controlar (Figura 3.4), baseado na tangente ao ponto de inclinação máxima. Assim, o ponto de intersecção dessa tangente com o eixo dos tempos, corresponde ao valor de  $T$ .

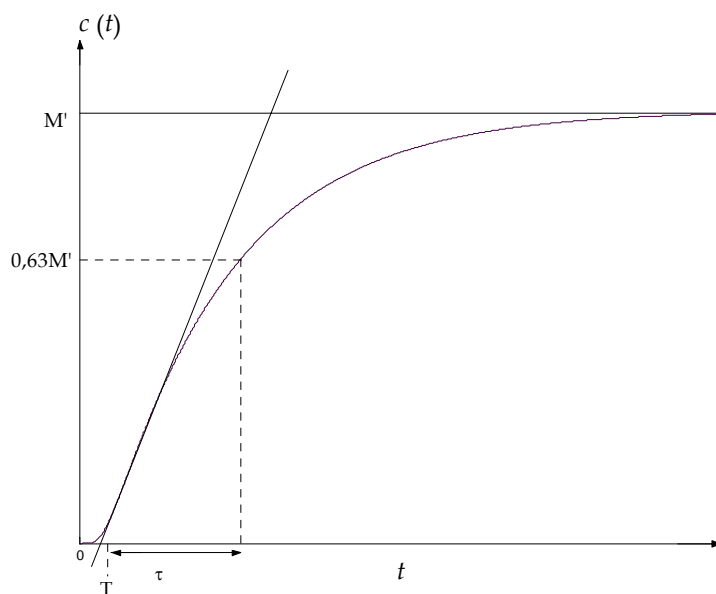


Figura 3.4 - Aproximação de  $c(t)$  pelo método (3.33).

Por sua vez, a resposta do sistema a uma entrada em degrau unitário aplicada em  $t = 0$  atinge 63,2% do seu valor final no instante  $t = t'$ , sendo a constante de tempo do modelo dada por  $\tau = t' - T$ , onde  $c(t') = 0,632M'$ . O parâmetro  $K_{Modelo} = M'/M$  é de cálculo directo.

As heurísticas de Ziegler-Nichols em malha aberta (ZNMA) são baseadas no modelo de primeira ordem com atraso, dado pela equação (3.33), encontrando-se na Tabela (3.1) as correspondentes fórmulas de sintonia dos controladores PID, onde  $R_r = \frac{K_{Modelo}}{\tau}$ . Esta metodologia de sintonia foi uma das adoptadas neste trabalho.

Tabela 3.1 - Fórmulas de sintonia do controlador PID.

Controlador	Parâmetro	Ziegler-Nichols (malha aberta)
<b>P</b>	$K$	$\frac{1}{T R_r}$
<b>PI</b>	$K$	$\frac{0,9}{T R_r}$
	$T_i$	$3,33 T$
<b>PID</b>	$K$	$\frac{1,2}{T R_r}$
	$T_i$	$2 T$
	$T_d$	$0,5 T$

Tendo estes conceitos por base, nesta secção são consideradas cinco estratégias para o controlo do sistema de difusão de calor. Nas subsecções 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.5 analisa-se o sistema da Figura 3.5 onde se estuda o controlador proporcional  $P_{ZNMA}$  e o controlador proporcional, integral e diferencial  $PID_{ZNMA}$ , ambos sintonizados através do método de Ziegler–Nichols em malha aberta (ZNMA), e o controlador fraccionário  $PID^\beta$  sintonizado através da minimização dos índices de desempenho designados por integral do quadrado do erro (ISE) e integral do quadrado do erro multiplicado pelo tempo (ITSE).

Por sua vez, nas subsecções 3.4.4, 3.4.6 e 3.4.7 adopta-se uma estrutura designada por Predictor de Smith (PS), representada na Figura 3.6, com um controlador  $PID^\beta$  ( $PS\_PID^\beta$ ). Nestas duas últimas subsecções, o modelo de aproximação  $\hat{G}$  adoptado no PS é obtido, numa primeira fase, através das heurísticas do esquema de ZNMA, representado por  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{ZNMA}]$  e numa segunda fase, através da minimização do erro quadrático entre  $\tilde{G}(j\omega)$  e  $\hat{G}(j\omega)$ , no domínio das frequências, e designado por  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$ .

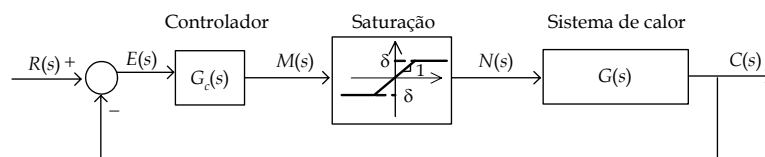


Figura 3.5 - Sistema em malha fechada com um controlador  $G_c(s)$ .



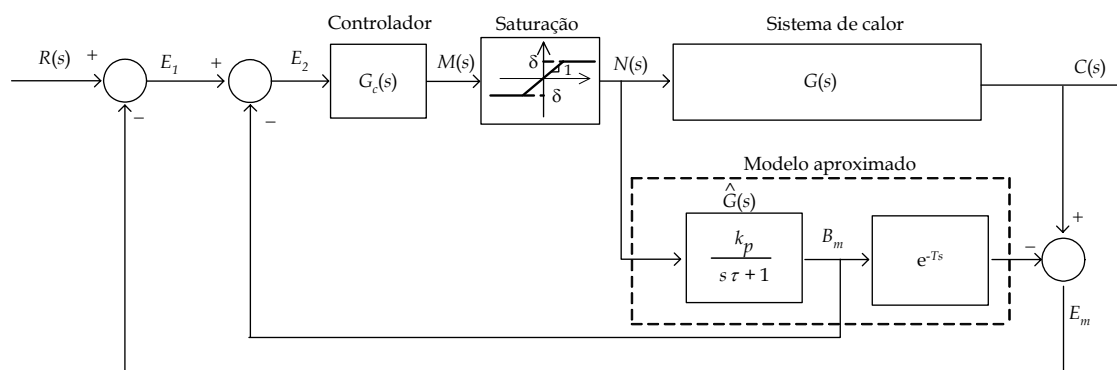


Figura 3.6 - Sistema em malha fechada do preditor de Smith com um controlador  $G_c(s)$ .

No entanto, e antes de se proceder à descrição das estratégias adoptadas neste estudo, presentes nas secções 3.4.2 até à 3.4.7, na próxima subsecção são apresentados os conceitos fundamentais do cálculo fraccionário que servem de base ao estudo descrito nas subsecções seguintes. De referir ainda, que alguns destes conceitos, e nomeadamente algumas das expressões, foram já apresentadas no Capítulo 2. No entanto, entendeu-se necessária a sua inclusão nesta secção para facilitar a leitura do texto subsequente.

É sabido que no PS, se for estabelecido um modelo preciso do processo, por forma a que a diferença entre o sistema e o modelo aproximado seja baixa, então, a resposta do sistema será claramente melhorada.

A Figura 3.7 ilustra o diagrama polar do modelo teórico  $G(j\omega)$  e do modelo numérico  $\tilde{G}(j\omega)$ , obtidos respectivamente através das equações (3.30) e (3.32), bem como os modelos de aproximação  $\hat{G}_{ZNMA}(j\omega)$  e  $\hat{G}_{POLAR}(j\omega)$ .

Em todas as estruturas de controlo é ainda investigado o efeito de um actuador incluindo um efeito não linear de saturação, (Figura 3.8 e equação 3.34) no desempenho do sistema em malha fechada. Este problema surge

principalmente quando ocorrem grandes variações do sinal de referência ou em processos com grandes alterações na carga. Nestes casos surge um erro inicial muito grande e, portanto, a saturação assume aqui um papel limitativo do sinal de saída do controlador [Richards, (1979)], [Dorf, Bishop, (1990)], [Carvalho, (2000)].

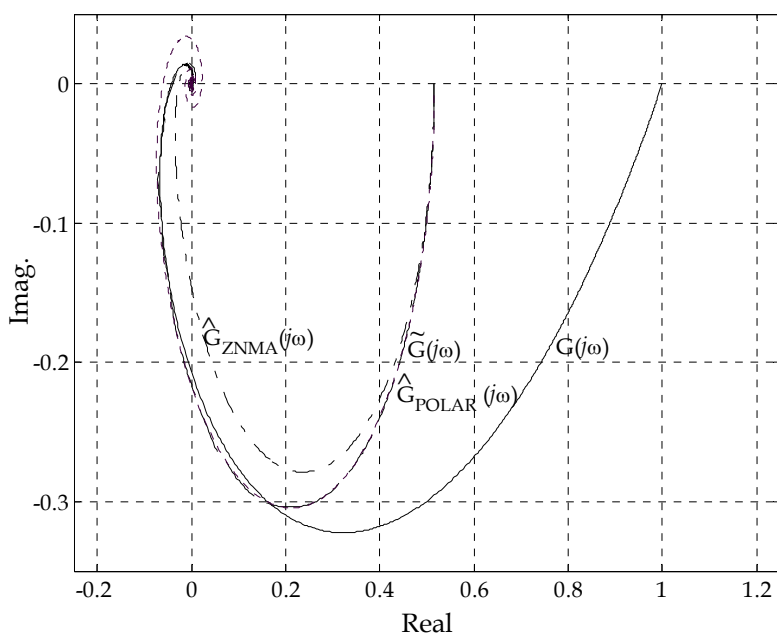


Figura 3.7 - Diagrama polar de  $G(j\omega)$ ,  $\tilde{G}(j\omega)$ ,  $\hat{G}_{ZNMA}(j\omega)$  e  $\hat{G}_{POLAR}(j\omega)$ , para  $x = 3,0$  m e  $k = 0,042 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

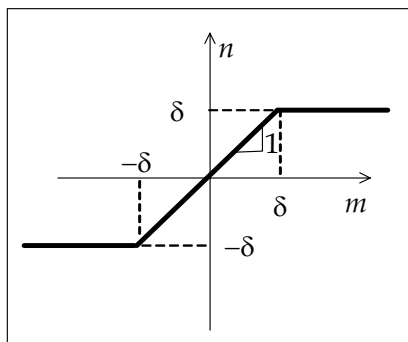


Figura 3.8 - Bloco do actuador de saturação.

$$n(m) = \begin{cases} m, & |m| < \delta \\ \delta \operatorname{sign}(m), & |m| \geq \delta \end{cases} \quad (3.34)$$

Foram ainda analisados dois índices que quantificam o desempenho do sistema, baseados na amplitude do erro da resposta do sistema, a saber, o integral do quadrado do erro (ISE) e o integral do quadrado do erro multiplicado pelo tempo (ITSE), definidos pelas seguintes expressões:

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} [r(t) - c(t)]^2 dt \quad (3.35a)$$

$$\text{ITSE} = \int_0^{\infty} t[r(t) - c(t)]^2 dt \quad (3.35b)$$

Poderiam ter sido usados outros critérios de desempenho tais como o integral do erro absoluto (IAE) ou o integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo (ITAE). No entanto, no caso do sistema de difusão de calor os índices ISE e ITSE produziram melhores resultados, pelo que foram estes os adoptados no decorrer deste estudo. Mais ainda, o critério ITSE permite-nos estudar a influência do tempo de simulação no valor do erro produzido pelo sistema.

Um outro índice que permite medir o desempenho do sistema, e que também foi adoptado neste estudo, consiste na energia  $E_m$  do sinal de saída do controlador  $m(t)$ , dada pela expressão:

$$E_m = \int_0^{T_e} m^2(t) dt \quad (3.36)$$

onde  $T_e$  é a janela de tempo suficientemente larga para que a saída do sistema  $c(t)$  estabilize em regime permanente.

### 3.4.1 Sistemas de Controlo de Ordem Fraccionária

Os sistemas de controlo de ordem fraccionária são caracterizados por equações diferenciais que possuem, no sistema dinâmico e/ou no algoritmo de controlo, um integral e/ou uma derivada de ordem fraccionária. Devido ao facto destes operadores serem definidos por funções de transferência irracionais seja no domínio da transformada de Laplace, seja no domínio dos  $Z$ , encontram-se frequentemente problemas na avaliação das simulações [Machado, (1997)], [Barbosa, *et al.*, (2003)]. Desta forma, quando se analisam sistemas de ordem fraccionária, normalmente adoptam-se aproximações contínuas ou discretas de ordem inteira dos operadores de ordem fraccionária [Battaglia, *et al.*, (2000)], [Barbosa, *et al.*, (2004)], [Petrás, Vinagre, (2002)], [Podlubny, *et al.*, (2003)].

De seguida faz-se uma breve descrição das aproximações discretas de ordem inteira dos operadores de ordem fraccionária.

Uma alternativa às definições de Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov, que se revela útil na análise de sistemas de controlo de ordem fraccionária, é-nos dada pelo método da transformada de Laplace. Considerando nulas as condições iniciais, a integração fraccionária é definida nos domínios de Laplace e de Fourier,  $F(s) = L\{f(t)\}$  e  $F(j\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ , respectivamente por:

$$L\{ {}_a D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s), \quad \alpha \in \mathfrak{R} \quad (3.37a)$$

$$\mathfrak{F}\{ {}_a D_t^\alpha f(t) \} = (j\omega)^\alpha F(j\omega), \quad \alpha \in \mathfrak{R} \quad (3.37b)$$

Um importante aspecto dos algoritmos de ordem fraccionária pode ser ilustrado através do sistema de controlo elementar representado na Figura 3.9, com uma função de transferência em malha aberta  $G(s) = Ks^{-\alpha}$  ( $1 < \alpha < 2$ ).

O digrama de Bode em malha aberta da amplitude e da fase possuem respectivamente um declive de  $-20\alpha$  dB/dec e uma fase constante de  $-\alpha\pi/2$  rad [Barbosa, *et al.*, (2006)]. Desta forma, o sistema em malha fechada possui uma margem de fase constante de  $MF = \pi(1-\alpha/2)$  rad que é independente do ganho  $K$  do sistema. Igualmente, esta importante propriedade é também ilustrada através do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) apresentado na Figura 3.10 ( $K \geq 0$ ). De facto, quando  $1 < \alpha < 2$ , o LGR segue a relação  $\pi - \pi/\alpha = \cos^{-1} \zeta$ , onde  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento, independente do ganho  $K$ . Desta forma, o sistema em malha fechada mantém-se robusto mesmo quando se verificam variações do ganho exibindo respostas com propriedades de amortecimento constante [Barbosa, *et al.*, (2004)], [Chen, *et al.*, (2003)].

Se considerarmos a função de controlo dada por:

$$\begin{aligned} a_n D_t^{\alpha n} y(t) + \dots + a_1 D_t^{\alpha 1} y(t) + a_0 D_t^{\alpha 0} y(t) = \\ = b_m D_t^{\beta m} u(t) + \dots + b_1 D_t^{\beta 1} u(t) + b_0 D_t^{\beta 0} u(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{R}$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{R}$ .

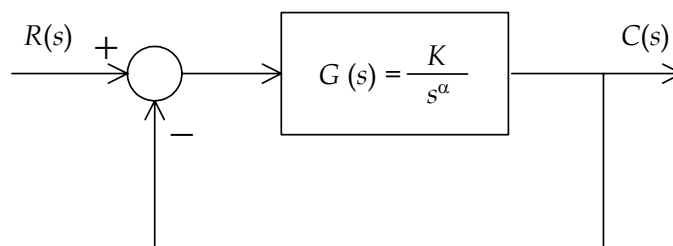


Figura 3.9 - Sistema de controlo elementar de ordem fraccionária  $\alpha$  com realimentação unitária.

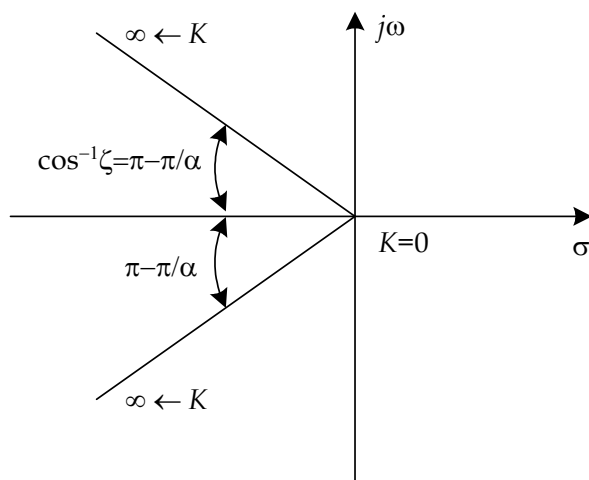


Figura 3.10 - LGR de  $G(j\omega)$  para  $1 < \alpha < 2$ ,  $K \geq 0$ .

Pela transformada de Laplace, pode-se obter uma função de transferência fraccionária, no domínio das frequências:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m(s)^{\beta_m} + \dots + b_1(s)^{\beta_1} + b_0(s)^{\beta_0}}{a_n(s)^{\alpha_n} + \dots + a_1(s)^{\alpha_1} + a_0(s)^{\alpha_0}} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k(s)^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k(s)^{\alpha_k}} \quad (3.39)$$

No entanto, na prática, o mais comum é considerar um controlador de ordem inteira. Isto deve-se ao facto do modelo da planta já poder ter sido obtido através de um modelo de ordem inteira de “senso comum”. Em outros casos, o objectivo é aplicar controladores de ordem fraccionária (COF) para aumentar o desempenho do controlo do sistema. Tomando como exemplo os controladores PID convencionais, a versão de ordem fraccionária, designada por controlador  $PI^\alpha D^\beta$ , foi proposto por [Podlubny, (1999)], como uma generalização do controlador PID inteiro, com o integrador de ordem real  $\alpha$  e um diferenciador de ordem real  $\beta$ . O estudo destes controladores no domínio temporal foi realizado por [Podlubny, (1999)] e o estudo no domínio das

frequências efectuado por [Petráš, (1999)]. A fórmula do controlador  $PI^\alpha D^\beta$  no domínio dos tempos vem dada por:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} D_t^{-\alpha} e(t) + T_d D_t^\beta e(t) \right] \quad (3.40)$$

onde  $u(t)$  corresponde ao sinal de saída do controlo, e  $e(t)$  representa o sinal de erro, obtido através da diferença entre a entrada e a saída do sistema, ao qual se aplica as acções de correcção. O parâmetro  $K_p$  representa o ganho de proporcionalidade,  $T_i$  a constante de tempo de integração,  $T_d$  a constante de tempo da diferenciação,  $\alpha$  e  $\beta$  as ordens fraccionárias do integrador e do diferenciador. Os parâmetros do controlador a serem sintonizados são o  $K_p$ , o  $T_i$ , o  $T_d$ , o  $\alpha$  e o  $\beta$ .

A função de transferência dos controladores fraccionários no domínio de Laplace é dada por:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} s^{-\alpha} + T_d s^\beta \right], \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (3.41)$$

onde, se forem consideradas as seguintes combinações dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , se obtêm os casos clássicos:

- ❖ controlador PID para  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ ;
- ❖ controlador PI para  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ ;
- ❖ controlador PD para  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ .

Por sua vez, as combinações seguintes originam os algoritmos fraccionários:

- ❖ controlador  $PI^\alpha$  para  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta = 0$ ;
- ❖ controlador  $PD^\beta$  para  $\alpha = 0$  e  $0 < \beta < 1$ ;

- ❖ controlador  $PI^\alpha D$  para  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta = 1$ ;
- ❖ controlador  $PID^\beta$  para  $\alpha = 1$  e  $0 < \beta < 1$ ;
- ❖ controlador  $PI^\alpha D^\beta$  para  $0 < \alpha < 1$  e  $0 < \beta < 1$ .

Os controladores  $PI^\alpha D^\beta$  possuem uma maior flexibilidade e dão a oportunidade de se obterem melhores ajustes das propriedades dinâmicas do controlador de ordem fraccionária. Como se pode visualizar na Figura 3.11, a estrutura interna dos controladores de ordem fraccionária consiste numa ligação paralela das componentes proporcional, integral e derivativa [Dorf e Bishop, (1990)]. Da análise da estrutura da Figura 3.11, é possível constatar que a implementação deste tipo de controladores na forma analógica é fácil, se se souber construir o circuito analógico correspondente a  $s^\alpha$ .

Na subsecção 3.4.1.1 é demonstrado como se pode solucionar este problema, através da aplicação de aproximações racionais pela expansão em fracções contínuas.

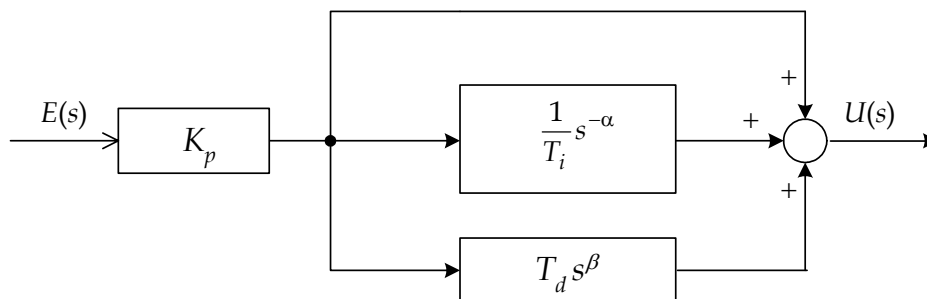


Figura 3.11 - Estrutura geral do controlador  $PI^\alpha D^\beta$ .



Com o uso do controlador  $PI^\alpha D^\beta$  (3.40) é esperado obter-se uma melhoria do desempenho do sistema devido ao facto, de se ter um maior número de parâmetros na sintonia. A Figura 3.12 ilustra a passagem de quatro pontos, no caso do controlador PID inteiro, para um quadrado no caso do controlador PID fraccionário [Vinagre, *et al.*, (2001)].

### 3.4.1.1 Aproximações aos Operadores de Ordem Fraccionária

Neste trabalho são adoptadas aproximações discretas de ordem inteira ao elemento fundamental  $s^\alpha$  ( $\alpha \in \mathfrak{R}$ ) do controlador de ordem fraccionária. A aproximação discreta, usualmente aplicada para a obtenção dos equivalentes operadores contínuos do tipo  $s^\alpha$ , adopta funções geradoras de Euler, Tustin e Al-Alaoui [Barbosa, *et al.*, (2006)] apresentadas na Tabela (3.2). Nesta tabela  $T_c$  representa o período de amostragem.

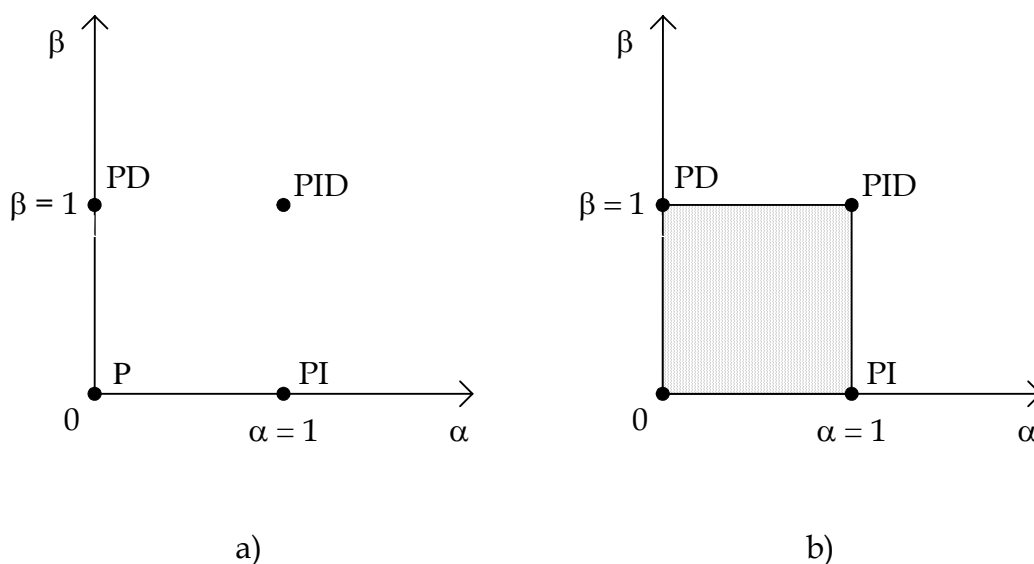


Figura 3.12 - Controlador PID: a) inteiro, b) fraccionário.

Tabela 3.2 - Métodos de discretização de  $s \rightarrow z$ .

Método	Aproximação $H^\alpha(z^{-1})$
Euler Grünwald-Letnikov	$s^\alpha \approx \left( \frac{1 - z^{-1}}{T_c} \right)^\alpha$
Tustin	$s^\alpha \approx \left( \frac{2}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$
Al-Alaoui	$s^\alpha \approx \left( \frac{8}{7T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1} / 7} \right)^\alpha$

Os métodos de discretização directos correspondentes aos operadores discretos de ordem fraccionária utilizam a expansão em séries de potência (ESP), na qual as funções são do tipo polinomial, ou a expansão em fracções contínuas (EFC), na qual as funções são fracções racionais (razão de dois polinómios). As aproximações do tipo racional, obtidas através da razão de dois polinómios, convergem frequentemente de uma forma mais rápida do que as aproximações do tipo polinomial e possuem uma convergência no domínio complexo mais ampla. Assim, pela utilização do operador de Euler  $\omega(z^{-1}) = (1 - z^{-1})/T_c$  e, efectuando a expansão em série de potências de  $[\omega(z^{-1})]^\alpha = [(1 - z^{-1})/T_c]^\alpha$ , obtém-se a fórmula de discretização correspondente à definição de Grünwald-Letnikov:

$$D^\alpha(z^{-1}) = \left( \frac{1 - z^{-1}}{T_c} \right)^\alpha = h^\alpha(0) + h^\alpha(1)z^{-1} + \dots + h^\alpha(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h^\alpha(k)z^{-k} \quad (3.42)$$

onde  $h^\alpha(k)$  é a sequência da resposta impulsional dada pela expressão ( $k \geq 0$ ):

$$h^\alpha(k) = \left(\frac{1}{T_c}\right)^\alpha \binom{k - \alpha - 1}{k} \quad (3.43)$$

A aproximação do tipo racional pode ser obtida através da aproximação de Padé à sequência da resposta impulsional (3.43)  $h^\alpha(k)$ , obtendo-se a função de transferência discreta:

$$H(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \quad (3.44)$$

onde  $m \leq n$  e os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  são determinados através da minimização de um critério de erro previamente estabelecido. Usualmente, o índice de desempenho corresponde à minimização da soma dos erros quadráticos dos primeiros  $m+n+1$  valores entre as duas respostas impulsionais, nomeadamente, a desejada  $h^\alpha(k)$  e a aproximada  $h(k)$ , ou seja do erro:

$$Erro = h^\alpha(k) - h(k) \quad (3.45)$$

Desta forma, obtém-se uma aproximação que faz um ajuste perfeito da resposta impulsional  $h^\alpha(k)$  para os primeiros  $m+n+1$  valores de  $k$  [Jesus, *et al.*, (2006)].

Refira-se ainda que a função (3.44) é obtida considerando-se o operador de Euler. No entanto, a utilização de outros tipos de esquemas de discretização originam exactamente o mesmo resultado. Mais ainda, a função (3.44) representa um filtro linear, causal e invariante no tempo.

### 3.4.2 Controlador $P_{ZNMA}$

Num primeiro estudo analisa-se o sistema da Figura 3.5 onde o controlador é constituído apenas pela componente proporcional (*i. e.*,  $G_c(s) = K_p$ ), sintonizado através do método ZNMA. As heurísticas ZNMA conduziram ao seguinte modelo:

$$\hat{G}_{ZNMA}(s) = \frac{0,52}{162s + 1} e^{-28s} \quad (3.46)$$

e, conseqüentemente, num ganho proporcional do controlador  $K_p = 11,221$ .

O correspondente gráfico do LGR está ilustrado na Figura 3.13, estando na Figura 3.14 a respectiva resposta temporal para  $R(s) = 1/s$  e  $x = 3$  m.

Verifica-se que o sistema com o  $P_{ZNMA}$  não produz resultados satisfatórios, revelando uma sobreelongação  $ov$  apreciável, bem como um tempo de estabelecimento  $t_s$ , um tempo de subida  $t_r$  e um tempo de atraso  $t_d$  elevados. De facto, obtém-se  $\{t_s, t_r, t_p, ov(\%), t_d\} = \{74,0; 20,7; 49,2; 40,0; 7,2\}$ , onde  $t_p$  representa o tempo de pico.

Com o objectivo de se medir o desempenho do sistema sob acção do controlador  $P_{ZNMA}$ , foram estudados os índices ISE, ITSE e  $E_m$ , tendo-se obtido  $(ISE; ITSE; E_m) = (84,683; 93261,859; 4685,654)$  com uma janela de tempo de  $T_e = 700$  s.

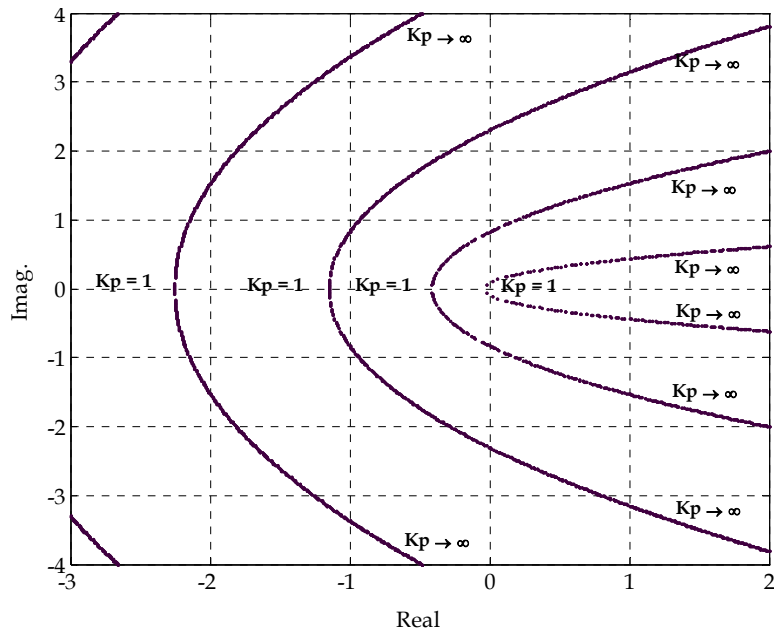


Figura 3.13 - LGR de  $G(s) = e^{-x\sqrt{s/k}}$  com  $G_c(s) = K_p$ ,  $x = 3,0$  m,  $k = 0,042$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>.

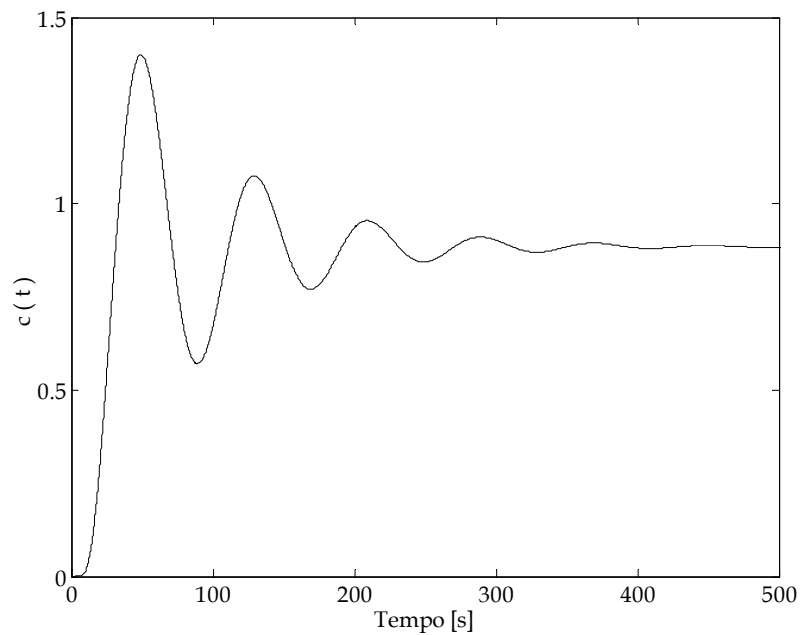


Figura 3.14 - Resposta temporal para  $R(s) = 1/s$  e  $K_p = 11,221$ .

Como era de esperar, o controlador P é incapaz de eliminar o erro em regime permanente  $e_{ss}$ , para uma entrada do sistema em degrau. Para se reduzir  $e_{ss}$  é necessário aumentar o ganho  $K_p$  mas, em geral, esta estratégia leva a um aumento de  $t_s$  e, em alguns casos, à instabilidade. Assim, para o sistema de difusão de calor decidiu-se adoptar um controlador PID (subsecção 3.4.3), já que a acção integral conduz a um  $e_{ss}$  nulo, quando na entrada do sistema se introduz um degrau e desde que o sistema seja estável. Por outro lado, a componente derivativa permite melhorar os efeitos dinâmicos das acções P e I.

### 3.4.3 Controlador $PID_{ZNMA}$

Nesta subsecção analisa-se o sistema em malha fechada com um controlador PID convencional (3.41), isto é com  $\alpha = \beta = 1$ . Os parâmetros ( $K_p, T_i, T_d$ ) são sintonizados através do método de ZNMA, pelo que o modelo resultante é o mesmo da subsecção anterior (3.46), resultando  $\{K_p; T_i; T_d\} = \{13,46; 56,0; 14,0\}$ .

Tal como anteriormente é aplicado um degrau unitário à entrada do sistema  $r(t)$  em  $x = 0$  m e a saída  $c(t)$  é analisada em  $x = 3$  m (Figura 3.15), sem considerar a saturação do actuador ( $\delta = \infty$ ).

Verifica-se que o sistema sob a acção do  $PID_{ZNMA}$  apresenta uma resposta em regime permanente com erro nulo; todavia, a resposta no regime transitório é muito fraca, revelando um  $ov$  significativo, e valores elevados de  $t_s$ ,  $t_r$  e  $t_d$  [Jesus, *et al.*, (2006)] obtendo-se  $\{t_s; t_r; t_p; ov(\%); t_d\} = \{575,9; 4,19; 15,12; 89,26; 3,1\}$ .

Com o objectivo de se avaliar o desempenho do sistema com o controlador  $PID_{ZNMA}$ , foram estudados os valores dos índices ISE, ITSE, e  $E_m$ , resultando  $(ISE; ITSE; E_m) = (22,67; 421,41; 366117,35)$  para uma janela temporal de  $T_e = 700$  s.

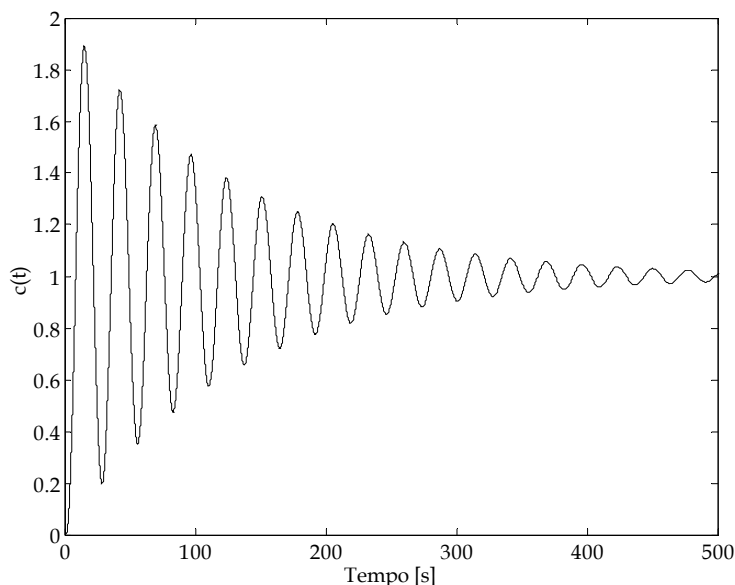


Figura 3.15 - Resposta do sistema ao degrau unitário em malha fechada, com o algoritmo  $PID_{ZNMA}$ ,  $x = 3,0$  m.

Os fracos resultados obtidos indicam que o método de sintonia não é o mais adequado para o controlo do sistema considerado. Nesta perspectiva, é estudada a adopção de uma estrutura com PS por forma a se obter um controlo mais eficiente.

#### 3.4.4 Controlador $PS\_PID_{ZNMA}$

Nesta subsecção adoptou-se um controlador PID inserido numa estrutura de predictor de Smith (Figura 3.6). Este algoritmo constitui uma técnica de compensação do atraso na resposta temporal de sistemas, pelo que se torna muito eficiente na melhoria do controlo de muitos processos [Smith, (1957)], [Yonghong, Cauwenberghe, (1999)], [Majhi, Atherton, (1999)], [Jesus, *et al.*, (2006)].

A Figura 3.16 descreve a resposta temporal do  $PS\_PID$  para  $x = 3,0$  m quando se aplica na entrada do sistema um degrau unitário ( $R(s) = 1/s$ ) em

$x = 0,0$  m. Para uma melhor comparação com o algoritmo estudado na anterior subsecção 3.4.3, a Figura 3.16 também ilustra a saída do sistema do circuito realimentado simples, nas mesmas condições do PS.

É evidente que a estrutura PS produz um melhor desempenho na resposta transitória; no entanto, e mais uma vez, os resultados obtidos não são totalmente satisfatórios, indicando que o método de sintonia do controlador não é o mais adequado para o controlo do sistema [Machado, *et al.*, (2005b)], [Jesus, *et al.*, (2007)]. Nesta perspectiva, foi proposto o uso de controladores de ordem fraccionária, sintonizados através da minimização dos índices ISE e ITSE por forma a se obter um controlo mais eficiente deste tipo de sistemas.

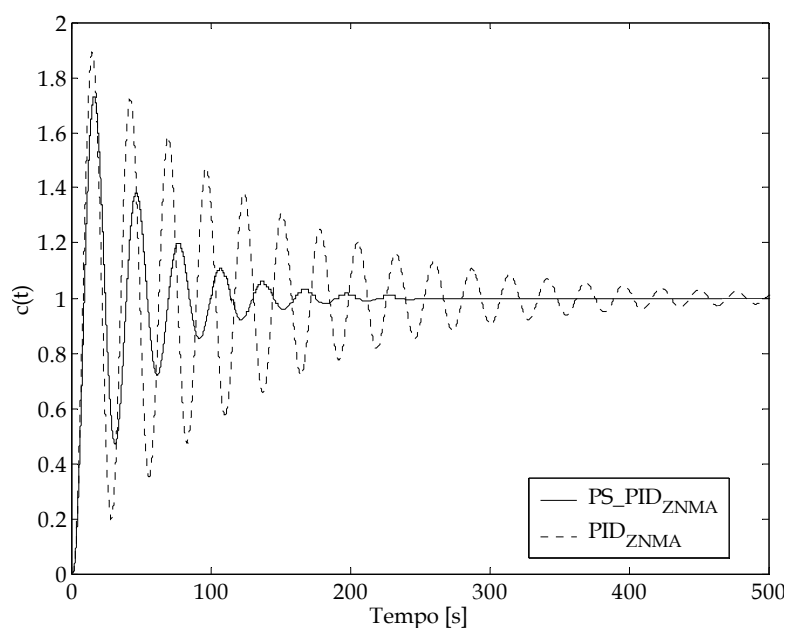


Figura 3.16 - Resposta do sistema ao degrau unitário em malha fechada para PS\_PID\_ZNMA e PID\_ZNMA,  $x = 3,0$  m.



### 3.4.5 $PID^\beta$ : Controlador Sintonizado Através dos Índices de Optimização ISE e ITSE

Nesta subsecção analisa-se o sistema de difusão de calor sob a acção de um controlador fraccionário  $PI^\alpha D^\beta$ , dado por (3.41), com  $\alpha = 1$ . Com a acção integral de ordem  $\alpha = 1$  garante-se que o  $e_{ss}$  é nulo, pelo que se estuda somente a influência da componente derivativa de ordem fraccionária  $\beta$ .

A componente derivativa fraccionária  $T_d s^\beta$ , da equação (3.41), foi implementada através da função de transferência racional e discreta de Padé de 4ª ordem dada por (3.44). Considera-se um período de amostragem de  $T_c = 0,1$  s, e uma sintonia do controlador  $PID^\beta$  através da minimização dos índices ISE (3.35a) e ITSE (3.35b).

Nesta ordem de ideias, aplica-se na entrada do sistema um degrau de amplitude unitária  $R(s) = 1/s$  em  $x = 0,0$  m, sem incluir o módulo de saturação, e desenvolve-se uma simulação para 3000 segundos, tomando  $T_e = 700$  s no cálculo dos índices. A Figura 3.17 ilustra a variação dos parâmetros do controlador fraccionário ( $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ ) em função da ordem derivativa  $\beta$ , quando se minimiza o erro através dos critérios ISE e ITSE. Os pontos nos gráficos representam os correspondentes valores do controlador clássico  $PID_{ZNMA}$  descrito na subsecção 3.4.3.

Os gráficos revelam que para  $\beta < 0,4$  os parâmetros ( $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ ) são ligeiramente diferentes para os critérios ISE e ITSE; no entanto, para  $\beta \geq 0,4$  os dois critérios conduzem a valores muito próximos. Estes resultados indicam a grande influência no sistema dinâmico de uma derivada de fraca ordem, que se traduz num elevado intervalo de tempo, até se obter uma saída com valores próximos do final.

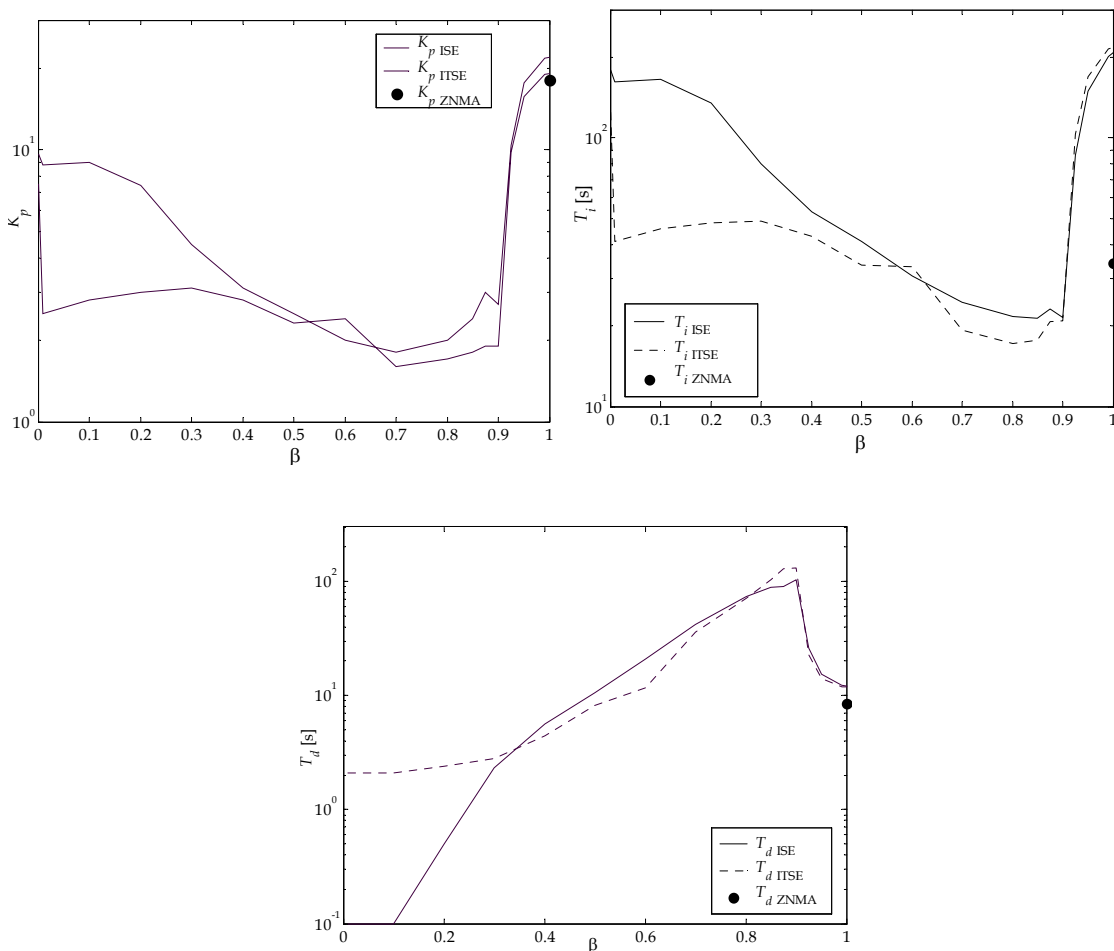


Figura 3.17 - Valor de  $(K, T_i, T_d)$  versus  $\beta$  do  $PID^\beta$ , para os critérios ISE e ITSE, sem saturação ( $\delta = \infty$ ). Os pontos representam o caso do controlador  $PID_{ZNMA}$ .

Para melhor se ilustrar o desempenho do  $PID^\beta$ , adicionou-se ao sistema uma saturação (Figura 3.8) inserida em série com a saída do controlador.

O desempenho do controlador foi avaliado para diferentes valores de  $\delta$ , nomeadamente para  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ , onde o último valor corresponde ao sistema sem saturação. Nas simulações usaram-se os mesmos parâmetros do controlador fraccionário, obtidos sem se considerar a saturação.

As Figuras 3.18 e 3.19 ilustram a resposta temporal do sistema em malha fechada e as correspondentes saídas do controlador  $m(t)$ , para o algoritmo  $PID^\beta$  sintonizado na perspectiva dos índices ISE e ITSE, respectivamente para  $\delta = 40$  e  $\delta = \infty$ . As sintonias correspondentes à minimização destes índices conduzem aos valores para o ISE:  $\{K_p; T_i; T_d; \beta\} \equiv \{3; 23; 90,6; 0,875\}$  e para o ITSE:  $\{K_p; T_i; T_d; \beta\} \equiv \{1,8; 17,6; 103,6; 0,85\}$ .

A resposta temporal do controlador  $PID^\beta$  revela uma acentuada diminuição da sobreelongação quando comparado com o controlador  $PID_{ZNMA}$ , revelando um boa resposta transitória e um erro nulo em regime permanente. Estes resultados demonstram a eficácia dos algoritmos fraccionários quando são usados para controlar sistemas, também eles de ordem fraccionária. Mais ainda, a resposta temporal do sistema e a saída do controlador são melhorados quando se considera a saturação.

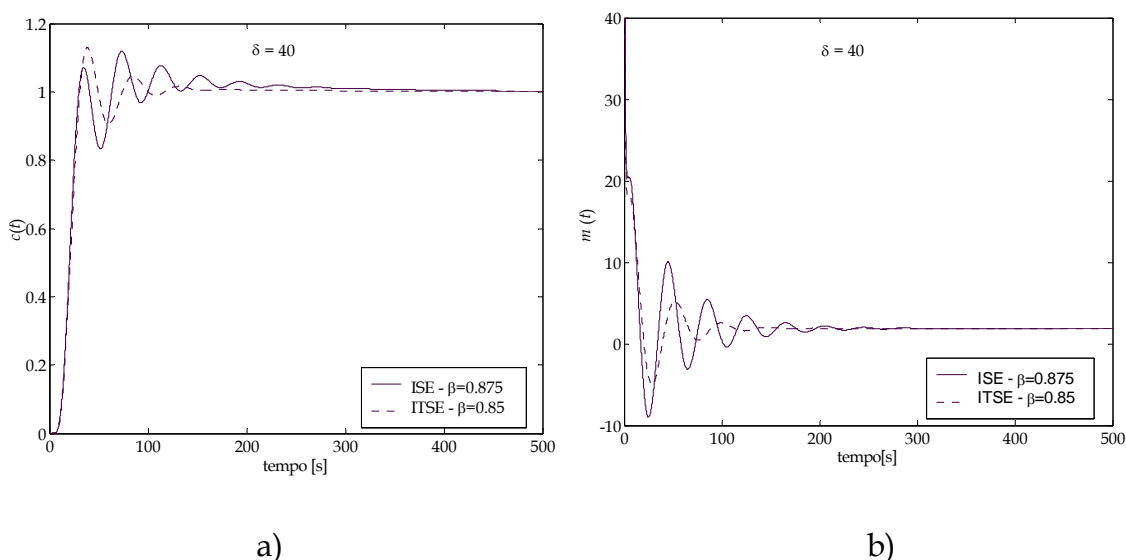


Figura 3.18 - Resposta temporal a) do sistema em malha fechada e b) da saída do controlador, para os índices ISE e ITSE, com o controlador  $PID^\beta$ ,  $\delta = 40$  e  $x = 3,0$  m.

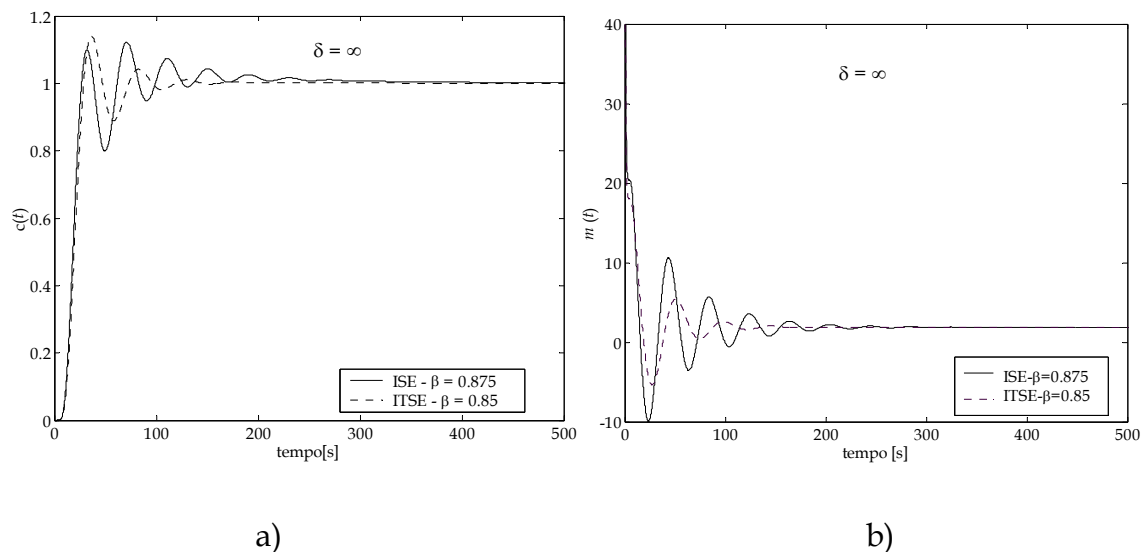


Figura 3.19 - Resposta temporal a) do sistema em malha fechada e b) da saída do controlador, para os índices ISE e ITSE, com o controlador  $PID^\beta$ ,  $\delta = \infty$  e  $x = 3,0$  m.

As Figuras 3.20 e 3.21 ilustram a variação de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  e do  $\sigma v(\%)$  versus  $\beta$ , da resposta do sistema em malha fechada sintonizada através da minimização dos índices ISE e ITSE.

Os gráficos revelam várias regiões distintas. Mais ainda, é evidente a impossibilidade de minimizar simultaneamente todos os valores. No entanto, para  $\beta_{ISE} \approx 0,875$  e para  $\beta_{ITSE} \approx 0,85$  obtêm-se um bom compromisso entre todas as possibilidades.

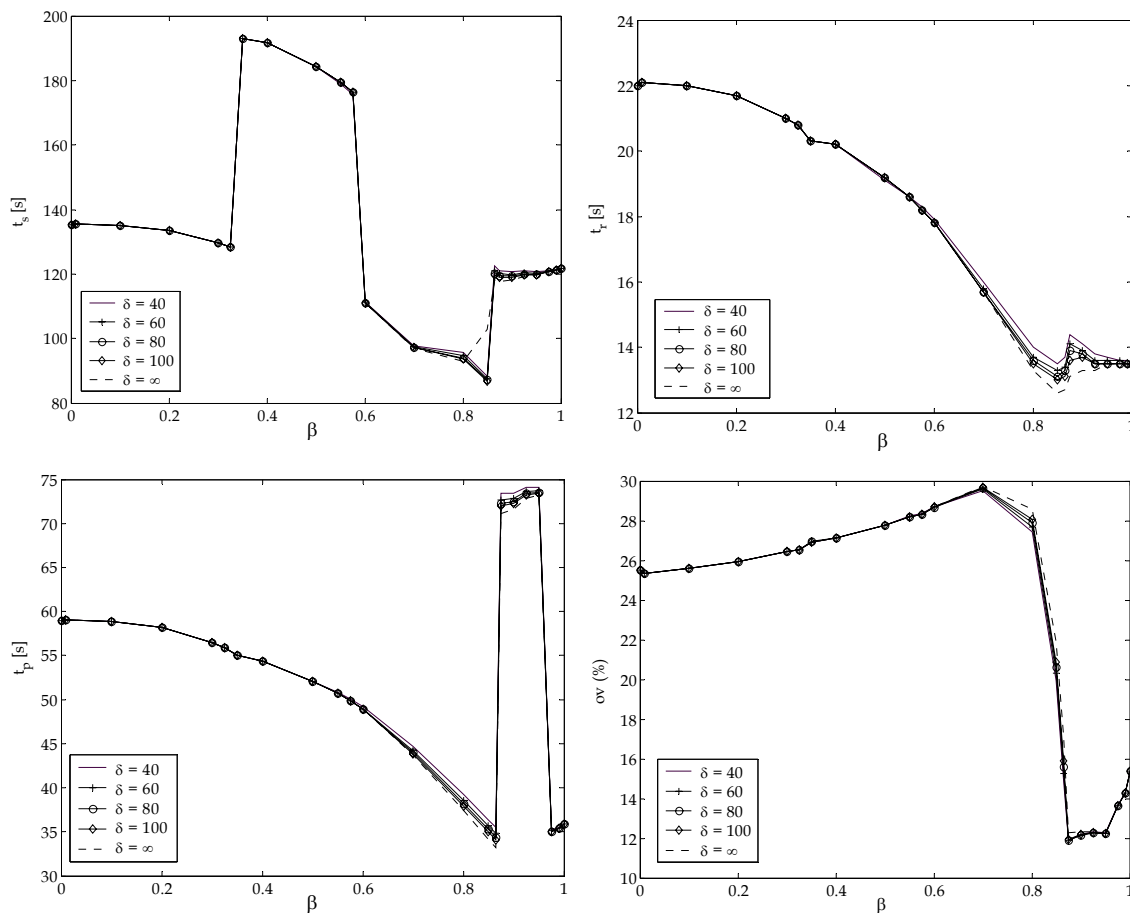


Figura 3.20 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $\sigma_v$ (%) versus  $\beta$  da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador  $PID^\beta$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

Os gráficos das Figuras 3.22 e 3.23 permitem-nos analisar e comparar a evolução de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  com o  $\sigma_v$ (%), para o ISE e o ITSE. Com a ajuda destes gráficos pode-se decidir, qual o melhor valor de  $\beta$  para o qual o compromisso entre o  $\sigma_v$ (%) e qualquer um dos outros parâmetros da resposta temporal, corresponde ou se aproxima mais dos objectivos pretendidos.

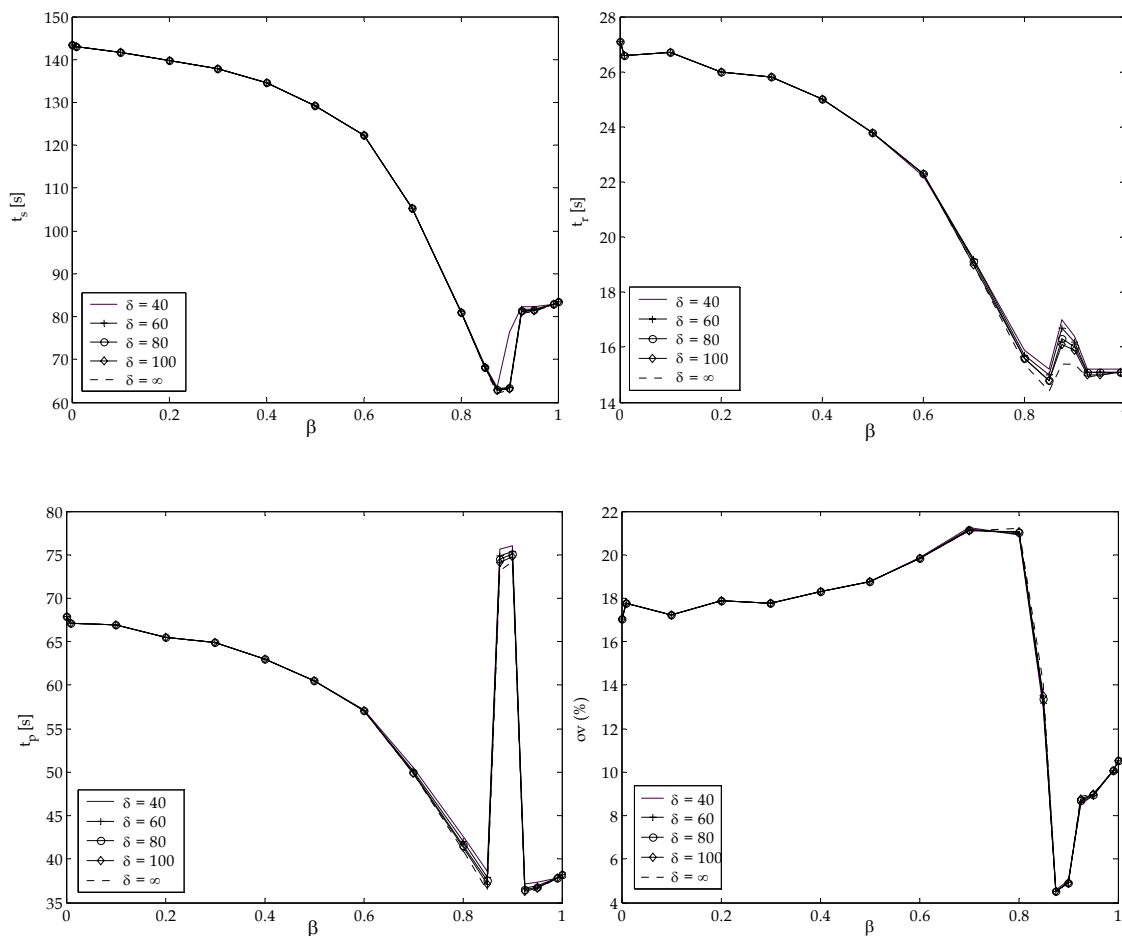


Figura 3.21 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $ov$ (%) versus  $\beta$  da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador  $PID^\beta$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

A energia  $E_m$  (3.36) na saída  $m(t)$  do controlador  $PID^\beta$  foi também analisada. A Figura 3.24 ilustra a variação de  $E_m$  em função dos índices ISE e ITSE, para  $0 \leq \beta \leq 1$ . Como se pode verificar, a energia varia suavemente para os diferentes valores de  $\delta$  quando se considera uma determinada ordem  $\beta$ .

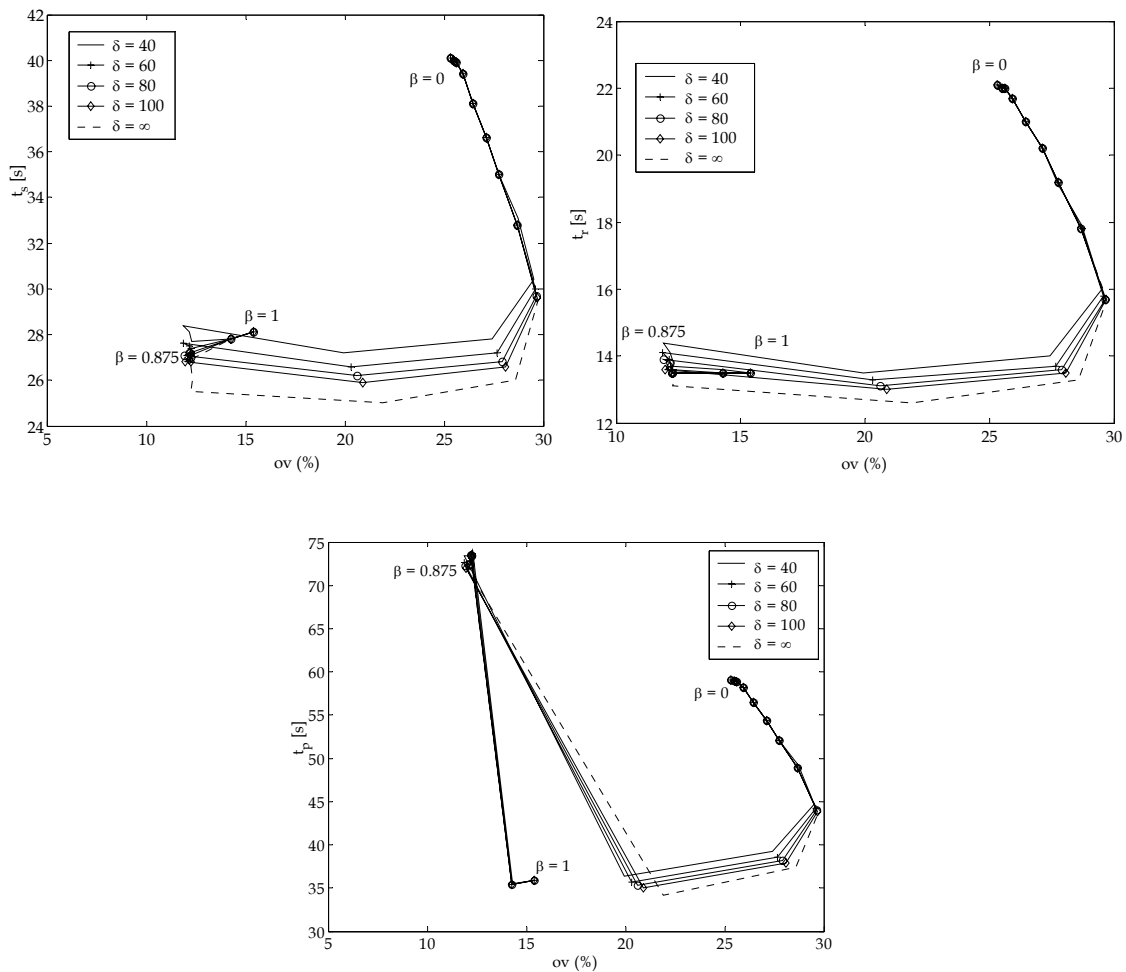


Figura 3.22 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  versus  $ov$ (%) da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador  $PID^\beta$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

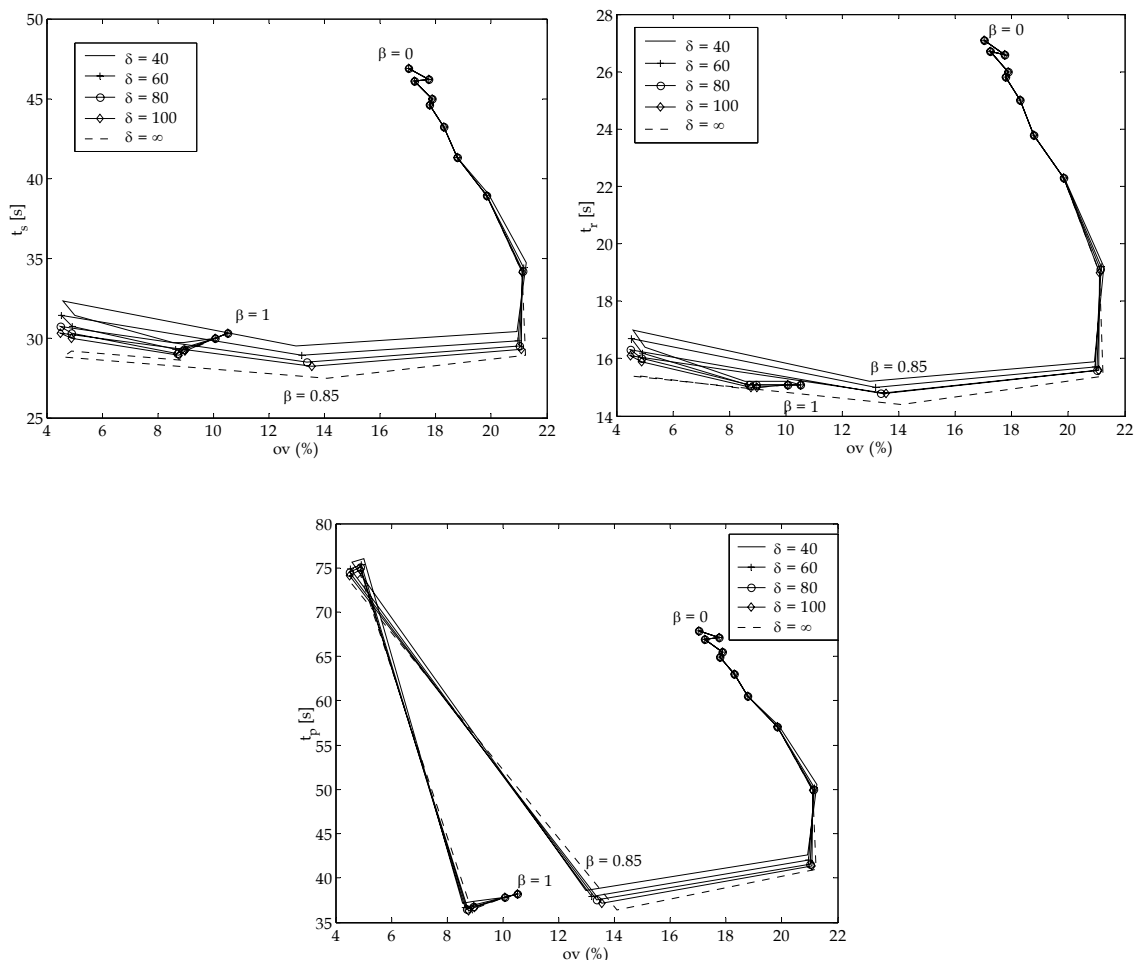


Figura 3.23 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  versus  $ov(\%)$  da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador  $PID^\beta$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

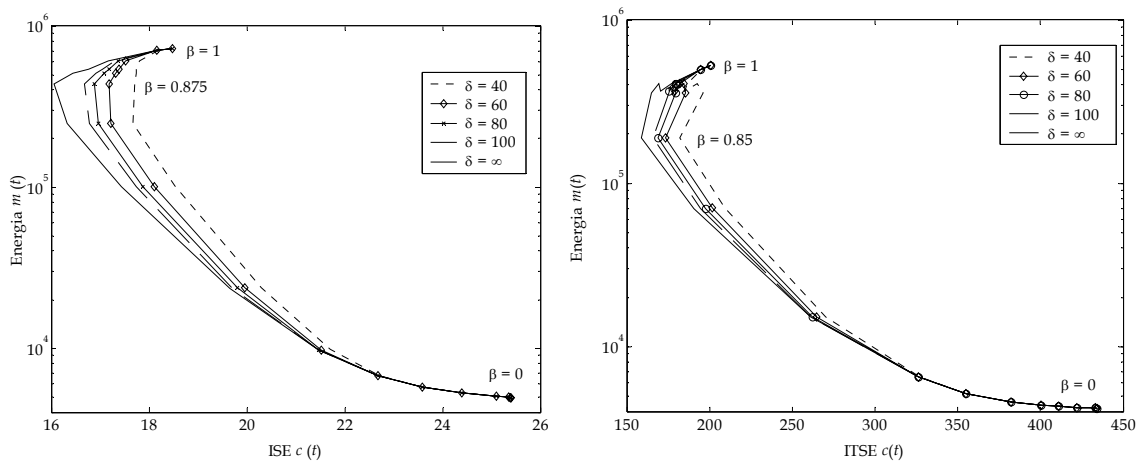


Figura 3.24 - Energia  $E_m$  versus ISE e ITSE para  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $x = 3,0$  m.



No entanto, se for fixada a saturação  $\delta$ , verifica-se que a energia  $E_m$  aumenta significativamente com  $\beta$ . Por outro lado, verifica-se que o valor de ISE diminui com  $\delta$  para  $\beta \leq 0,875$ , enquanto que para  $\beta > 0,875$  o ISE aumenta muito rapidamente. As mesmas conclusões podem ser esboçados relativamente ao critério ITSE, para o valor  $\beta = 0,85$ .

Quando se comparam os dois índices verifica-se que, geralmente, os valores para o ITSE são maiores do que os correspondentes para o ISE. Este aspecto deve-se ao facto de se necessitar de um largo tempo de simulação por forma a estabilizar-se o sistema.

Em conclusão, para  $0,85 \leq \beta \leq 0,875$  obtém-se a melhor sintonia do controlador fraccionário  $PID^\beta$ , revelando um desempenho superior ao demonstrado pelo esquema com o controlador PID de ordem inteira. As respostas temporais revelam uma acentuada diminuição da *sobreelongação*, quando comparado com o PID inteiro.

Nas subsecções 3.4.6 e 3.4.7 a seguir apresentadas estuda-se a estrutura de controlo PS com um  $PID^\beta$  sintonizado através dos índices de desempenho ISE e ITSE. No primeiro caso o modelo do sistema inserido no PS é obtido através do estudo de  $\tilde{G}_{ZNMA}(j\omega)$  no domínio dos tempos, e no segundo caso, o modelo baseia-se em  $\tilde{G}_{POLAR}(j\omega)$  no domínio das frequências.

O estudo com a estrutura PS visa verificar se este conjunto estrutura/controlador apresenta benefícios no desempenho do sistema.

### 3.4.6 *PS\_PID<sup>β</sup>: Modelo Obtido por ZNMA e o Controlador Sintonizado Através dos Índices de Optimização ISE e ITSE*

Nesta subsecção adopta-se um controlador fraccionário PID<sup>β</sup> inserido na estrutura PS ilustrada previamente na Figura 3.6.

A função de transferência  $\hat{G}(s)$ , inserida no segundo ramo do PS, consiste num modelo aproximado de primeira ordem com atraso, obtido através das heurísticas de ZNMA, e representado pela equação (3.46) já utilizada na subsecção 3.4.2.

O PS\_PID<sup>β</sup> foi sintonizado através da minimização dos critérios ISE e ITSE, e a sua eficiência avaliada para  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ . Nas simulações que incluem a saturação, mantiveram-se os valores dos parâmetros do controlador PID fraccionário obtidos inicialmente, ou seja, sem se considerar a saturação.

A Figura 3.25 revela a variação de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  do PS\_PID<sup>β</sup> em função da ordem de derivação  $\beta$ , para os critérios de erro ISE e ITSE, sem a existência de saturação.

Por sua vez, as Figuras 3.26 e 3.27 ilustram as respostas temporais do sistema em malha fechada para  $x = 3,0$  m, quando se aplica um degrau unitário na entrada do sistema  $R(s) = 1/s$  em  $x = 0,0$  m, para o PS\_PID<sup>β</sup>,  $\delta = 40$  e  $\delta = \infty$ . Para os índices ISE e ITSE, ilustram-se as respostas temporais correspondentes ao melhor valor de  $\beta$ , nomeadamente  $(\beta_{ISE}; \beta_{ITSE}) = (0,5; 0,7)$  para o PS\_PID<sup>β</sup>, e  $(\beta_{ISE}; \beta_{ITSE}) = (0,875; 0,85)$  para o controlador PID<sup>β</sup> da subsecção anterior.

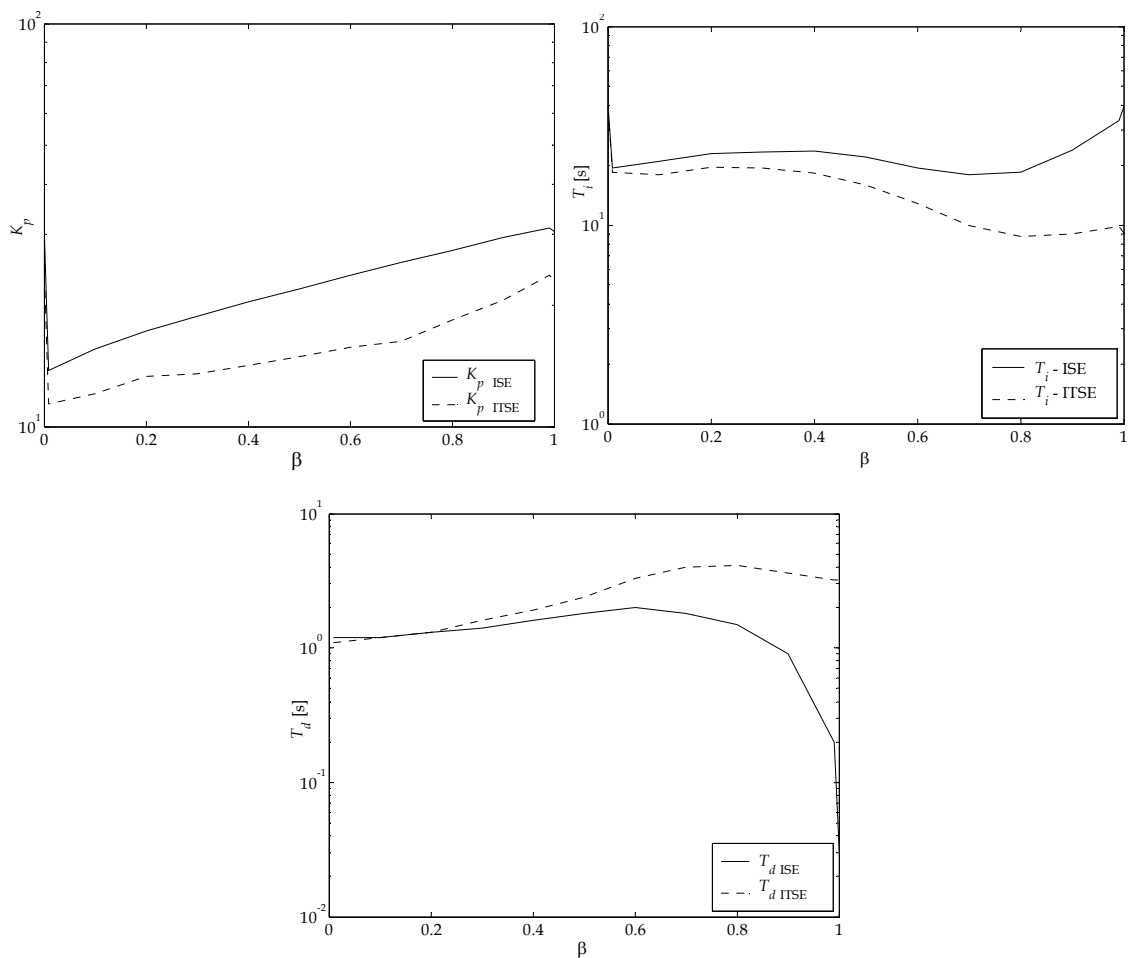


Figura 3.25 - Valor de  $(K_p, T_i, T_d)$  versus  $\beta$  do PS\_PID <sup>$\beta$</sup> , para os critérios ISE e ITSE ( $\delta = \infty$ ).

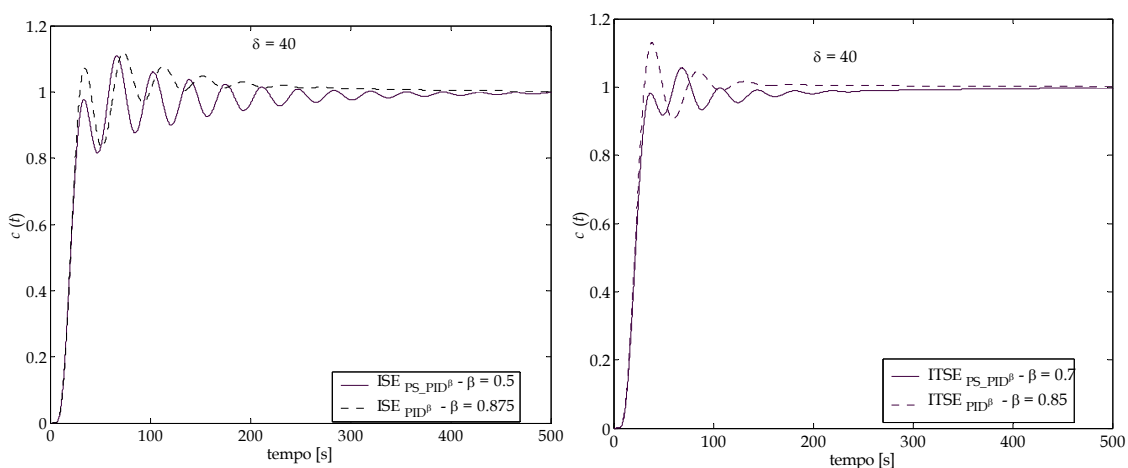


Figura 3.26 - Resposta do sistema em malha fechada ao degrau unitário para o PS\_PID <sup>$\beta$</sup>  e para o PID <sup>$\beta$</sup> , para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de  $\beta$ ,  $\delta = 40$ ,  $x = 3,0$  m.

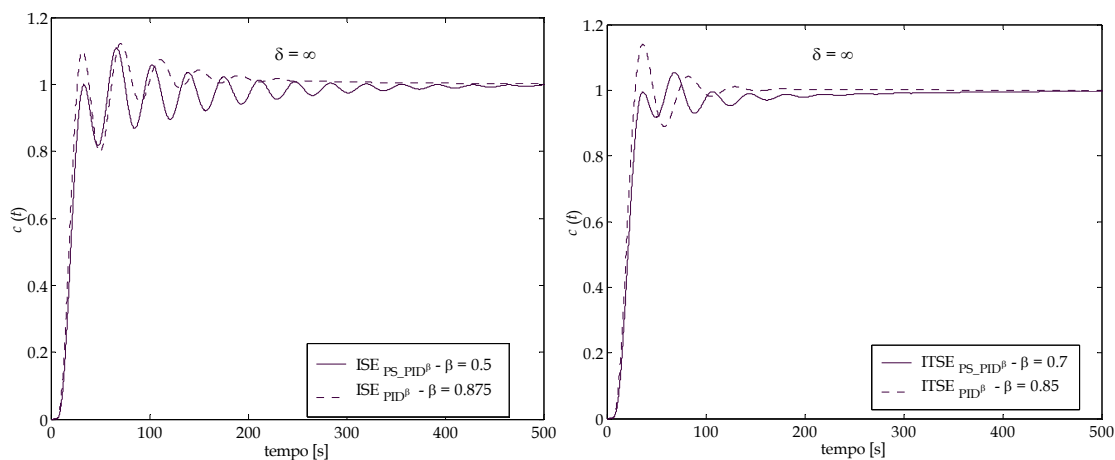


Figura 3.27 - Resposta do sistema em malha fechada ao degrau unitário para o PS\_PID<sup>β</sup> e para o PID<sup>β</sup>, para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de β, δ = ∞, x = 3,0 m.

Nestas figuras verifica-se que o controlador PID<sup>β</sup> apresenta melhores resultados na resposta transitória do sistema, do que os obtidos para o PS\_PID<sup>β</sup>, nomeadamente um valor menor de  $t_s$ , e valores similares para  $t_r$  e  $t_d$ . No entanto, o valor de  $ov(\%)$  é menor para o controlador PS\_PID<sup>β</sup>.

As Figuras 3.28 e 3.29 descrevem a variação dos parâmetros da resposta transitória,  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  e  $ov(\%)$  versus β, para o PS\_PID<sup>β</sup>  $[\hat{G}_{ZNMA}]$  sintonizado através da minimização dos índices ISE e ITSE.

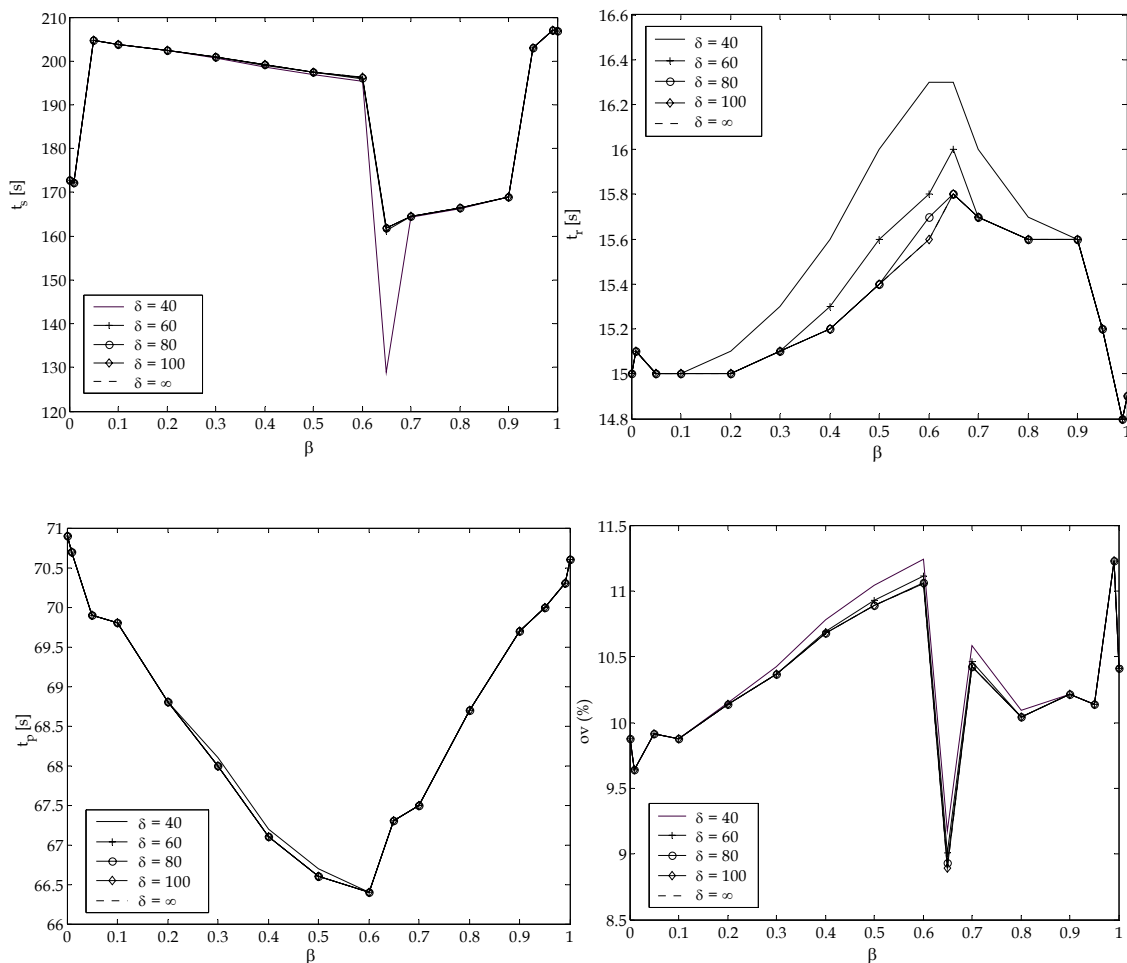


Figura 3.28 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_{pr}$ ,  $ov$ (%) versus  $\beta$  da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{ZNMA}]$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

Mais uma vez, os gráficos revelam a existência de várias regiões. As situações que revelaram um melhor compromisso entre a ordem de derivação fraccionária  $\beta$  e os índices de otimização são  $\beta_{ISE} \approx 0,5$  e  $\beta_{ITSE} \approx 0,7$ .

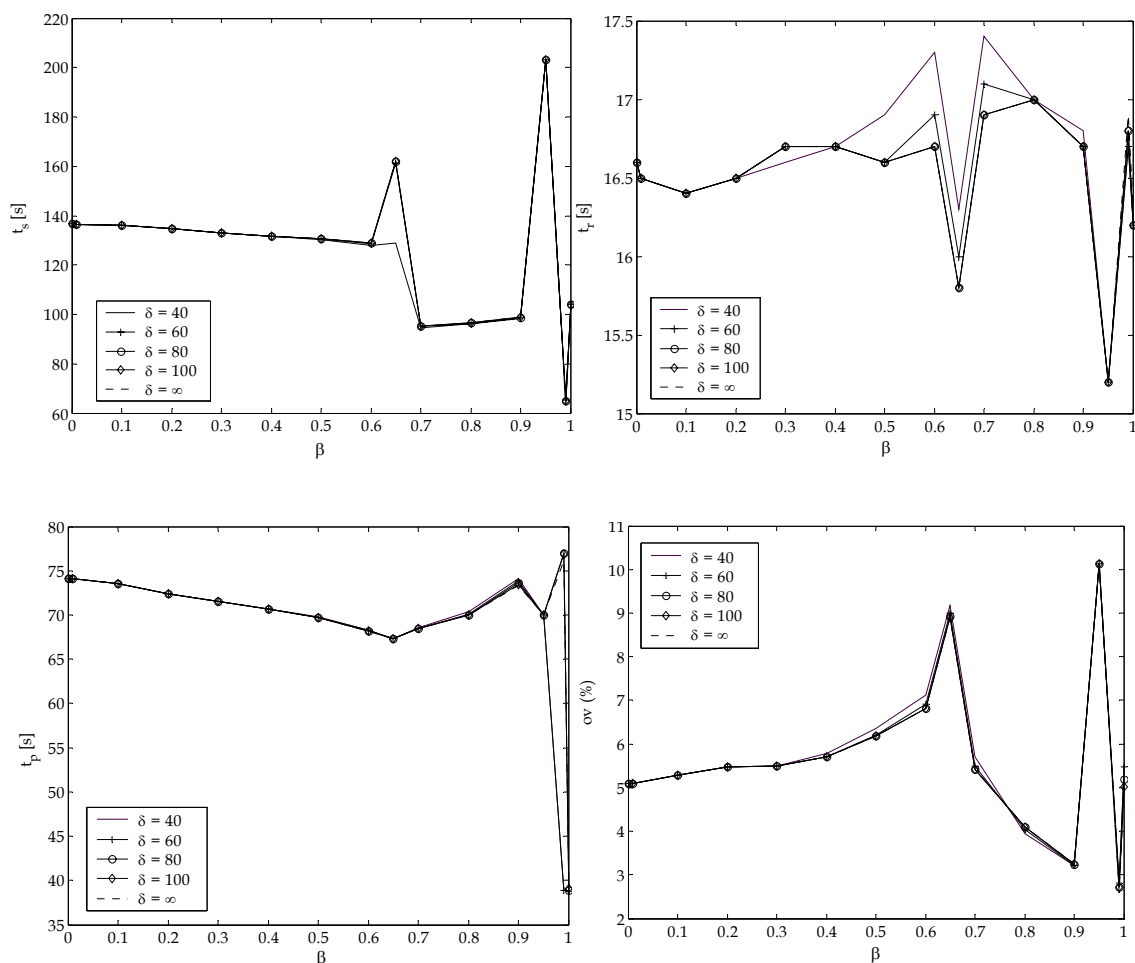


Figura 3.29 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $ov$ (%) versus  $\beta$  da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador  $PS\_PID^\beta [\hat{G}_{ZNMA}]$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

Tanto para os valores de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $ov$ (%) versus  $\beta$  obtidos através do ISE, como para os valores obtidos através de ITSE, verifica-se a existência de valores piores para o caso de  $\beta$  ser de ordem inteira, o que nos leva a confirmar os benefícios do uso dos algoritmos fraccionários.

A Figura 3.30 ilustra a relação entre a energia da acção de controlo  $E_m$  e os índices ISE e ITSE. Uma vez mais verifica-se que o melhor caso se obtêm para  $(\beta_{ISE}; \beta_{ITSE}) = (0,5; 0,7)$ .

Baseados nestes resultados conclui-se que o algoritmo  $PID^\beta$  conduz a resultados superiores aos do  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{ZNMA}]$ . Mais ainda, o controlador  $PID^\beta$  revela-se vantajoso, já que a sua implementação é consideravelmente mais simples do que a do algoritmo PS.

O tempo de atraso observado na resposta temporal do PS, revela um ajuste insuficiente entre o modelo do sistema  $\tilde{G}(j\omega)$  e a aproximação de primeira ordem  $\hat{G}_{ZNMA}(j\omega)$ .

Nesta ordem de ideais, decidiu-se repetir o estudo com o PS adoptando um modelo de aproximação de primeira ordem mas, agora, resultante da aproximação entre o  $\tilde{G}(j\omega)$  e  $\hat{G}(j\omega)$  no domínio das frequências conforme apresentado na subsecção 3.4.7 (ver Figura 3.7).

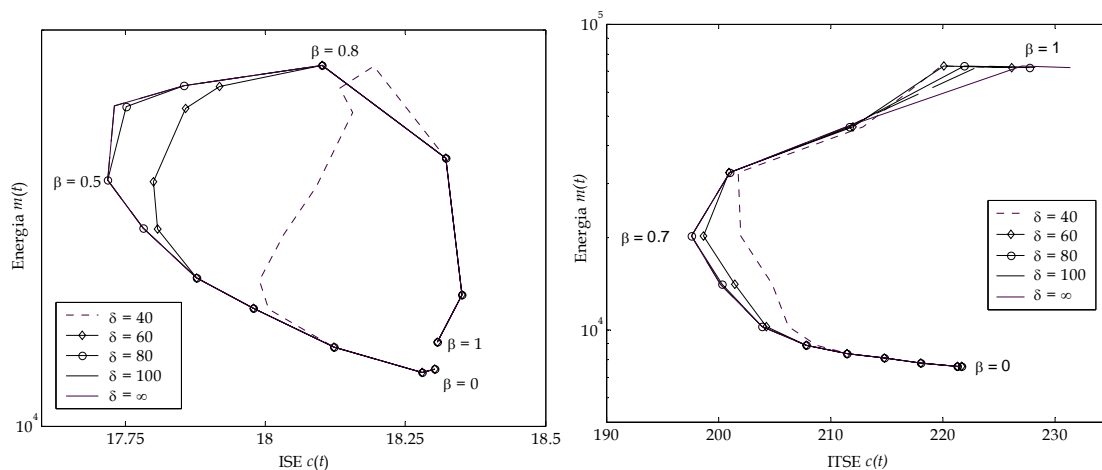


Figura 3.30 - Energia  $E_m$  versus ISE e ITSE para  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m e  $0 \leq \beta \leq 1$ .

### 3.4.7 PS\_PID<sup>β</sup>: Modelo Obtido Através do Diagrama Polar e Controlador Sintonizado pelos Índices de Optimização ISE e ITSE

Nesta secção o modelo da aproximação  $\hat{G}(s)$ , inserido no segundo ramo do PS, consistindo num modelo de primeira ordem com atraso, tem os parâmetros estimados minimizando o erro quadrático entre  $\tilde{G}(j\omega)$  e  $\hat{G}(j\omega)$ . Na Figura 3.7 podem-se visualizar os dois casos, sendo a função de transferência  $\hat{G}(j\omega)$  dada por:

$$\hat{G}_{\text{POLAR}}(s) = \frac{0,52}{139s + 1} e^{-28s} \quad (3.47)$$

O controlador PS\_PID<sup>β</sup> é, mais uma vez, sintonizado através dos critérios ISE e ITSE sem considerar a existência de saturação  $\delta = \infty$ . A Figura 3.31 ilustra a variação dos parâmetros  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  do controlador PID<sup>β</sup> em função da ordem de derivação  $\beta$ , para o ISE e para o ITSE.

As Figuras 3.32 e 3.33 apresentam a resposta do sistema em malha fechada para  $x = 3,0$  m quando se aplica um degrau unitário na entrada do sistema  $R(s) = 1/s$  no ponto  $x = 0,0$  m. No algoritmo PS\_PID<sup>β</sup> são adoptados os valores óptimos de  $\beta$ , nomeadamente  $\beta_{\text{ISE}} = 0,4$  e  $\beta_{\text{ITSE}} = 0,55$  para o PS\_PID<sup>β</sup> $[\hat{G}_{\text{POLAR}}]$ ,  $\beta_{\text{ISE}} = 0,5$  e  $\beta_{\text{ITSE}} = 0,7$  para o PS\_PID<sup>β</sup> $[\hat{G}_{\text{ZNMA}}]$ , e  $\beta_{\text{ISE}} = 0,875$  e  $\beta_{\text{ITSE}} = 0,85$  para o PID<sup>β</sup>. Para ambos os critérios, são apresentadas as respostas temporais para  $\delta = 40$  e para  $\delta = \infty$ .



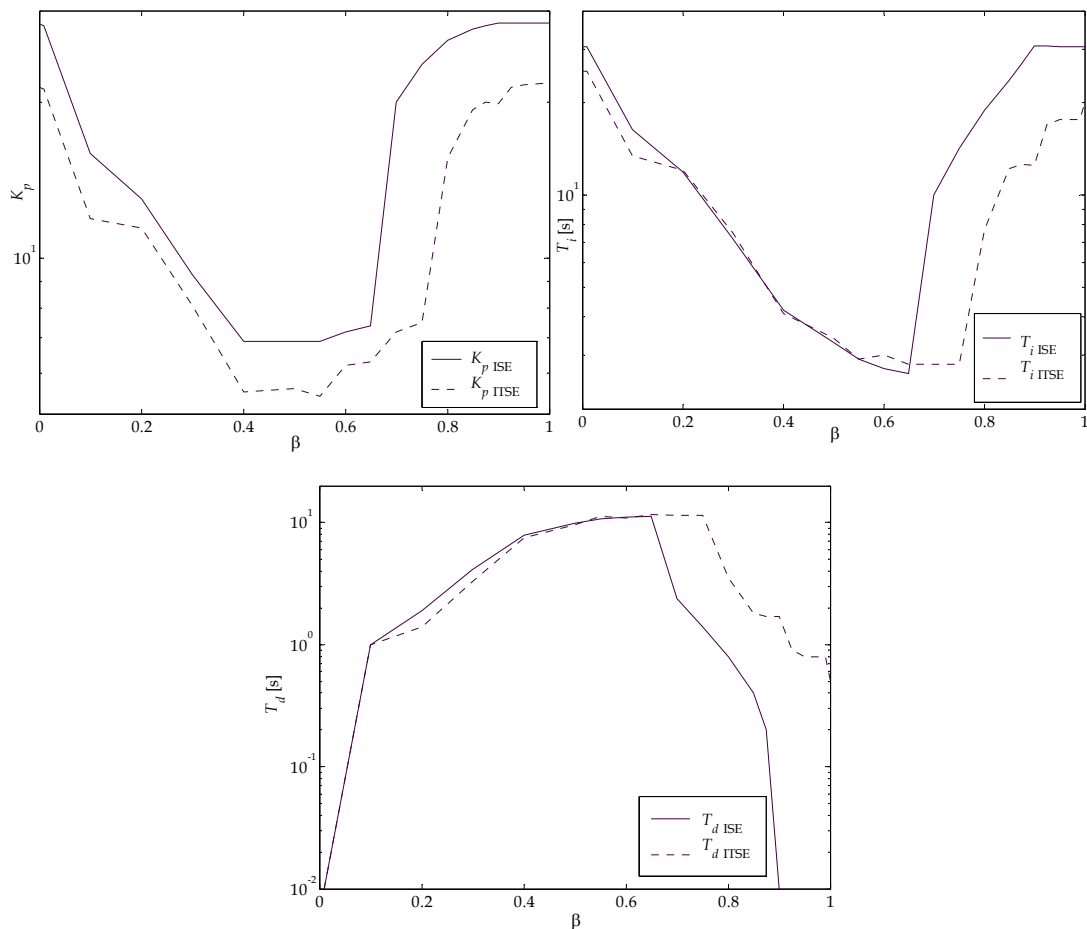


Figura 3.31 - Valor de  $(K_p, T_i, T_d)$  versus  $\beta$  do PS\_PID $^\beta$ , para os critérios ISE e ITSE ( $\delta = \infty$ ).

Uma vez mais os gráficos revelam uma melhor resposta transitória quando se aplica apenas o controlador PID $^\beta$ , nomeadamente valores mais reduzidos de  $t_s$ , enquanto que os valores de  $t_d$  e  $t_r$  são aproximadamente idênticos para todos os casos.

As Figuras 3.34 e 3.35 ilustram a variação dos parâmetros da resposta transitória  $\{t_s, t_r, t_p, \sigma v(\%)\}$  para o sistema em malha fechada com PS\_PID $^\beta$   $[\hat{G}_{\text{POLAR}}]$  sintonizado através da minimização dos índices ISE e ITSE.

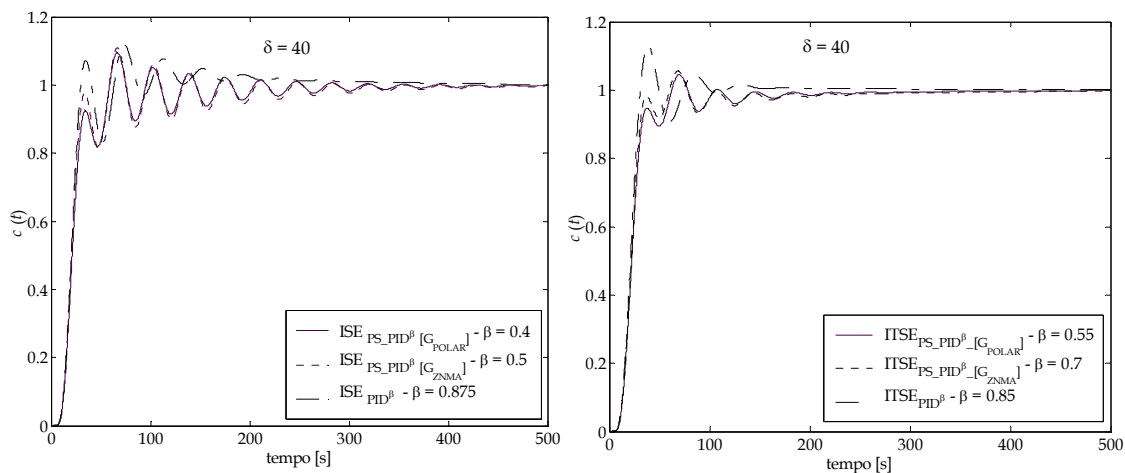


Figura 3.32 - Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada para o  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$ , para o  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{ZNMA}]$  e para o  $PID^\beta$ , para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de  $\beta$  em todos os casos,  $\delta = 40$ ,  $x = 3,0$  m.

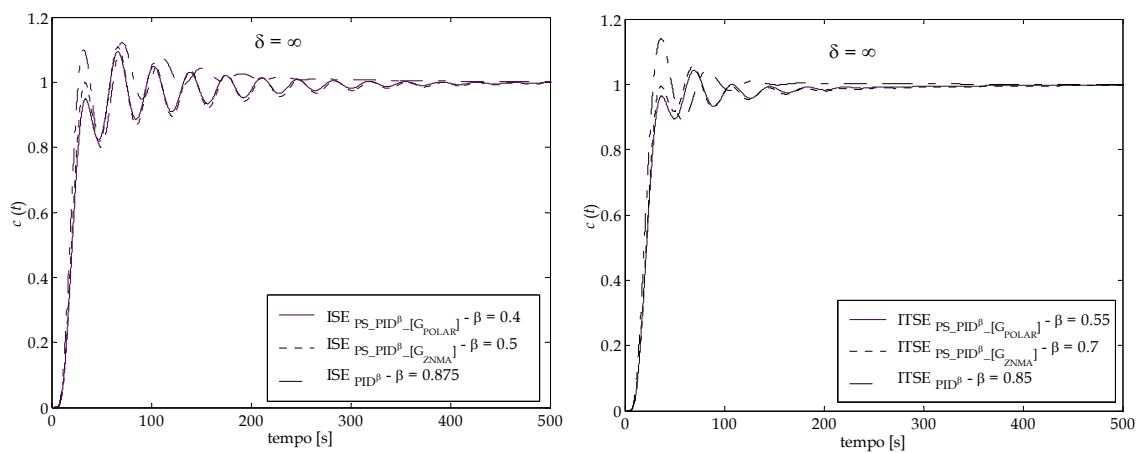


Figura 3.33 - Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada para o  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$ , para o  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{ZNMA}]$  e para o  $PID^\beta$ , para o ISE e para o ITSE, e para os valores óptimos de  $\beta$  em todos os casos,  $\delta = \infty$ ,  $x = 3,0$  m.

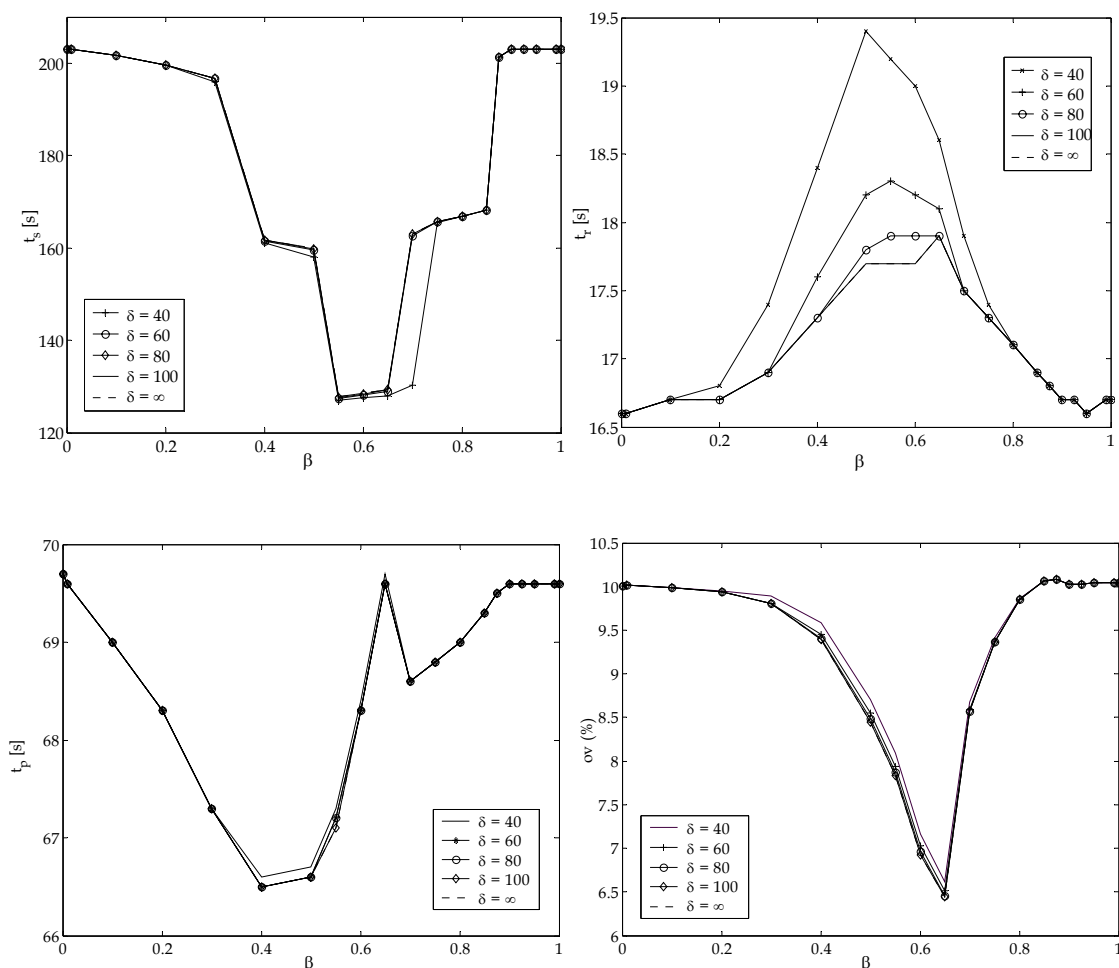


Figura 3.34 - Valor de  $t_{sr}$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $ov$ (%) versus  $\beta$  da resposta temporal do sistema em malha fechada com o controlador  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$ , para o ISE,  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$  e  $x = 3,0$  m.

O melhor compromisso que se obtém para as distintas regiões encontradas nos gráficos corresponde a  $\beta_{ISE} \approx 0,5$  e  $\beta_{ITSE} \approx 0,75$ .

As Figuras 3. 36 e 3.37 revelam a relação existente entre os parâmetros  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  versus  $ov$ (%), tanto para o ISE como para o ITSE. A análise destes gráficos permite seleccionar os valores dos parâmetros  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ , da resposta temporal, que possuem um melhor compromisso com os correspondentes valores do  $ov$ (%).

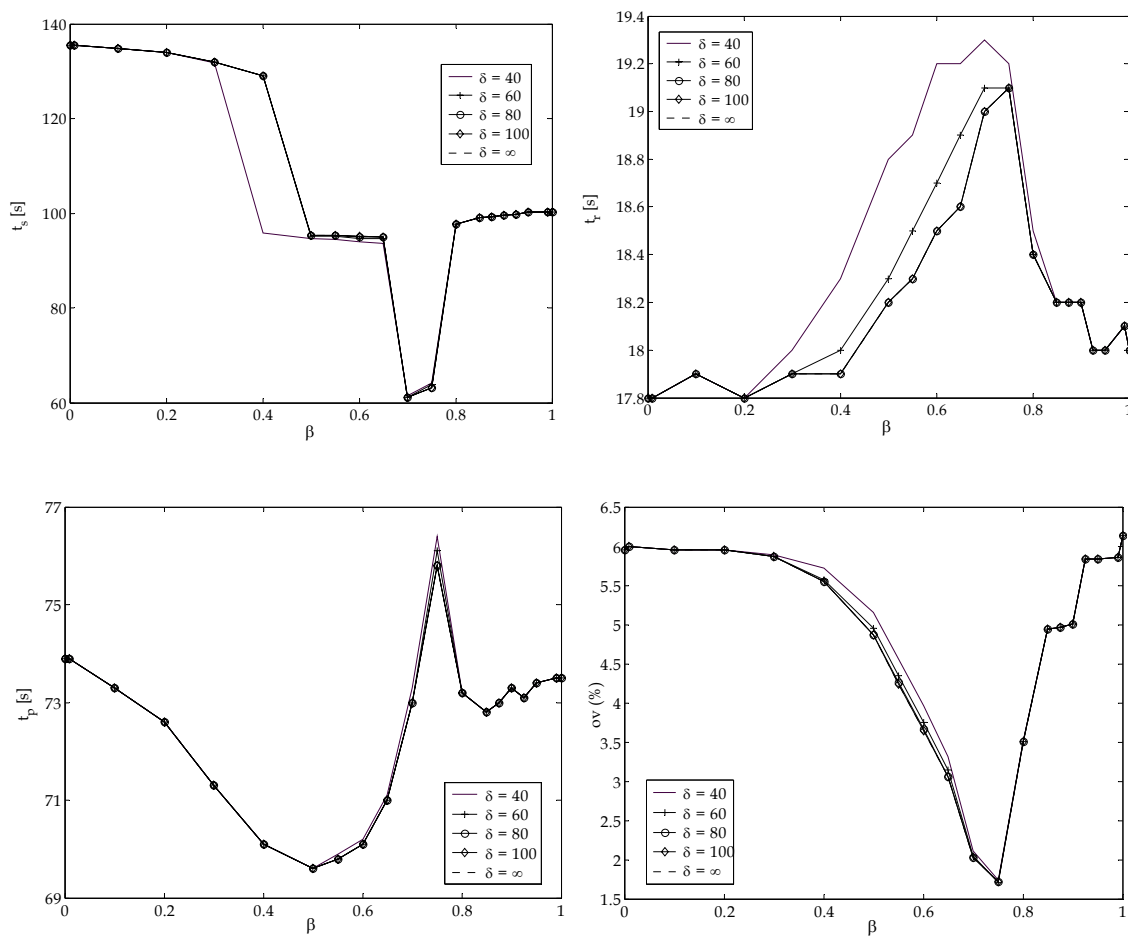


Figura 3.35 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $ov$ (%) versus  $\beta$  da resposta temporal do sistema em malha fechada com o controlador  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$ , para o ITSE,  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$  e  $x = 3,0$  m.

A Figura 3.38 revela a relação existente entre  $E_m$  e ISE e ITSE. O melhor caso para  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$  ocorre quando  $(\beta_{ISE}; \beta_{ITSE}) = (0,4; 0,55)$ .

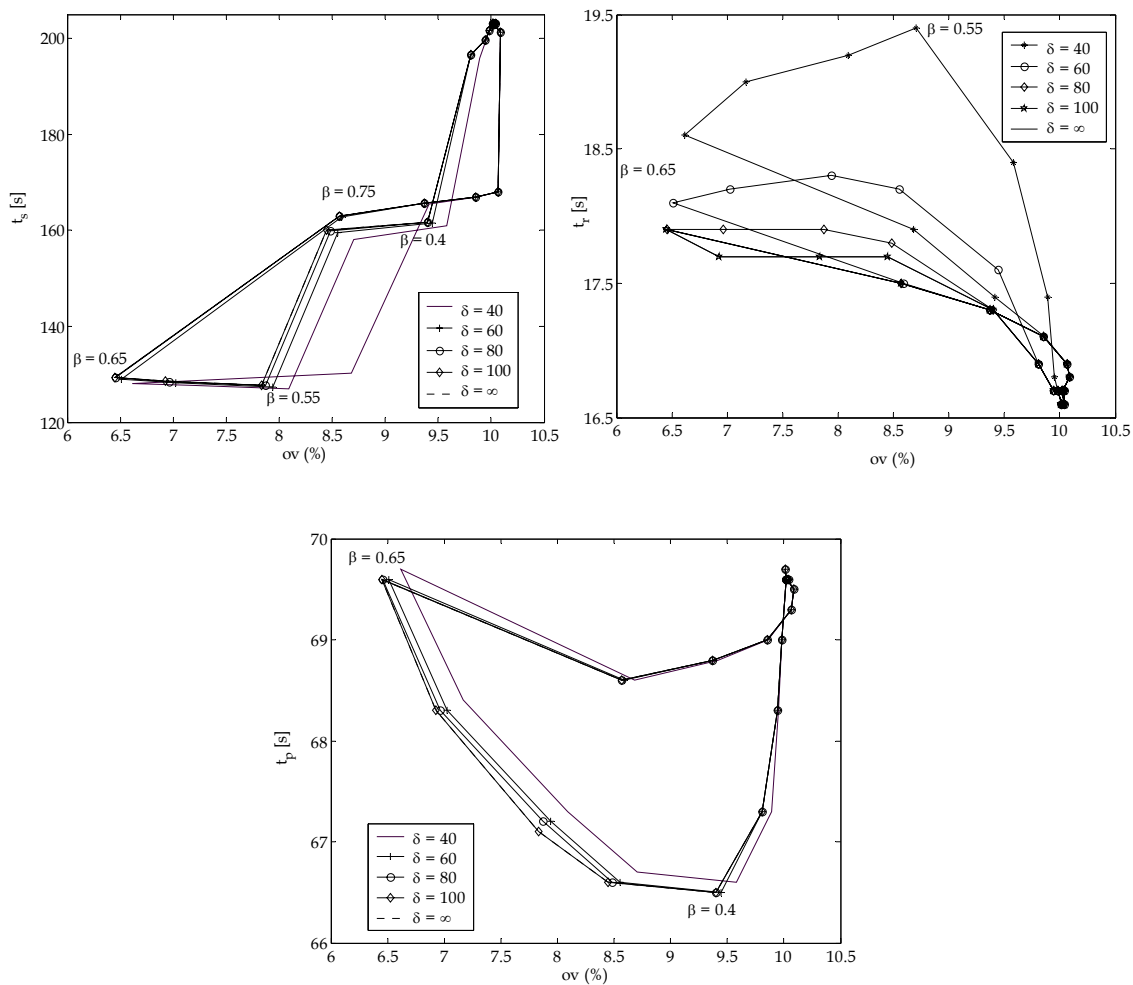


Figura 3.36 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  versus  $ov$ (%) da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ISE, com o controlador  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

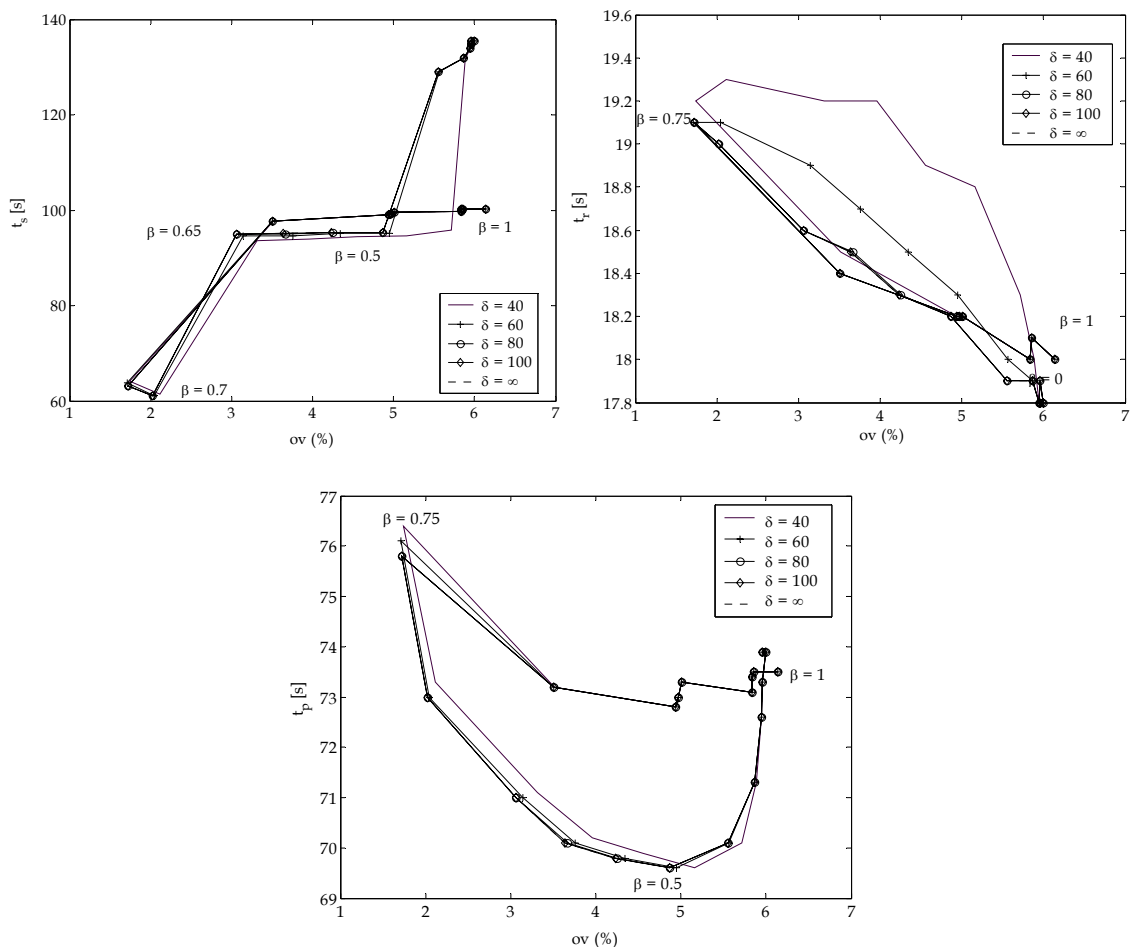


Figura 3.37 - Valor de  $t_s$ ,  $t_r$ ,  $t_p$  versus  $ov(\%)$  da resposta temporal do sistema em malha fechada para o ITSE, com o controlador  $PS\_PID^\beta[\hat{G}_{POLAR}]$ , quando  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m.

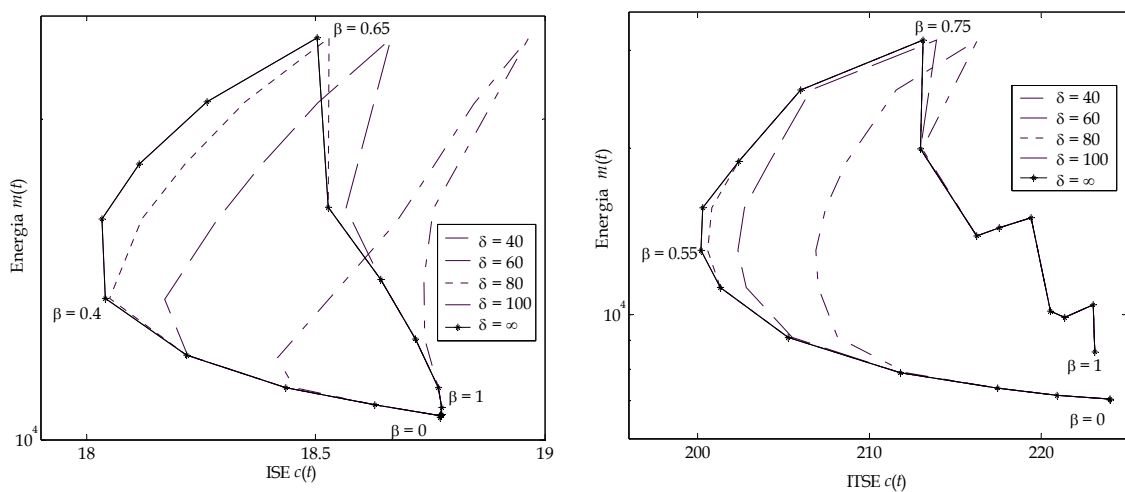


Figura 3.38 - Energia  $E_m$  versus ISE e ITSE para  $\delta = \{40, 60, 80, 100, \infty\}$ ,  $x = 3,0$  m e  $0 \leq \beta \leq 1$ .

No caso do controlador PID<sup>β</sup> estar inserido numa estrutura PS, verificou-se que os dois modelos adoptados são insuficientes para os objectivos pretendidos. Desta forma, para um eficiente uso do PS é necessário considerar-se um modelo que se aproxime ainda melhor do sistema de difusão de calor. Nesta linha de ideias, a adopção de um modelo de ordem fraccionária  $\hat{G}(s)$  constitui uma das directivas de desenvolvimento futuro.

### 3.5. Conclusões

Neste capítulo demonstrou-se que os conceitos associados ao cálculo fraccionário constituem um paradigma capaz de “ver” fenómenos físicos numa perspectiva diferente das metodologias tradicionais. Nesta linha de pensamento estudaram-se dois sistemas envolvendo o fenómeno de difusão, nomeadamente as linhas eléctricas de transmissão e os sistemas de difusão de calor.

O estudo das linhas eléctricas de transmissão, revelou que a respectiva impedância possui uma ordem de fraccionalidade de 0,5 e as características às altas frequências sugerem o desenvolvimento de novas expressões de ordem fraccionária.

O sistema de difusão de calor foi o segundo sistema estudado, tendo-se verificado ser também este descrito por um operador de ordem fraccionária  $s^{0,5}$ . Foram apresentadas seis estratégias de controlo, nomeadamente controladores de ordem inteira e fraccionária, e uma estrutura de PS incluindo modelos da aproximação de primeira ordem com atraso obtidos, seja através das heurísticas de ZNMA aplicadas à resposta temporal do sistema, seja através da minimização do erro quadrático, no domínio das frequências, entre as formulações numérica  $\tilde{G}(j\omega)$  e analítica  $\hat{G}(j\omega)$ . A dinâmica destas estruturas e

algoritmos de controlo foram analisadas numa perspectiva do cálculo fraccionário.

Verificou-se que a adopção dos controladores de ordem fraccionária é justificada pelo seu superior desempenho, particularmente quando usados na dinâmica de sistemas de ordem fraccionária, como foi o caso do sistema de difusão de calor estudado no âmbito deste trabalho.

Concluiu-se ainda que, adoptando uma estrutura de controlo PID<sup>β</sup> simples, se pode obter resultados melhores dos que os resultantes de uma estrutura com PS, usado frequentemente para melhorar sistemas com tempo de atraso. Estes resultados constituem mais uma achega para o uso dos algoritmos de controlo PID de ordem fraccionária já que são fáceis de implementar.

Em conclusão, verificou-se que as estruturas de ordem fraccionária capturam fenómenos e propriedades que os clássicos de ordem inteira negligenciam de certa forma. Este estudo revela-se assim de importância no desenvolvimento, na modelização e no controlo de sistemas adoptando metodologias de ordem fraccionária.



## Referências

---

- Adler Richard B., Lan Jen Chu, Robert M. Fano (1969). *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, The M.I.T. Press.
- Barbosa Ramiro S., J. A. T. Machado and Isabel M. Ferreira, (2003). *A Fractional Calculus Perspective of PID Tuning*. Proc. of the ASME Int. 19th Biennial Conf. on Mechanical Vibration and Noise, Chicago, Illinois, USA.
- Barbosa Ramiro S., J. A. T. Machado, Isabel M. Ferreira, (2004). Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function. *Nonlinear Dynamics*, **38** (1/4), pp. 305-321.
- Barbosa Ramiro S., J. A. Tenreiro Machado, Manuel F. Silva, (2006). Time domain design of fractional differintegrators using least-squares. *Signal Processing*, Elsevier, **86** (10).
- Battaglia J. L., O. Cois, L. Puigsegur, A. Oustaloup, (2001). Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, **44**, pp. 2671-2680.
- Battaglia Jean-Luc, Ludovic Le Ly, J. Batsale, A. Oustaloup and O. Cois., (2000). Utilisation de Modèles d'Identification non Entiers pour la Résolution de Problèmes Inverses en Conduction. *Int. Journal Therm. Science*, **39**, pp. 374–389.
- Carvalho J. L. Martins, (2000). *Sistemas de Controle Automático*. LTC - Livros técnicos e científicos editora S. A.

Chen YangQuan, ChuanHua Hu, Kevin L. Moore, (2003). Relay Feedback Tuning of Robust PID controllers with Iso-Damping Property. IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics – part B, **35** (1), pp. 23-31.

Chipman Robert A., (1968). *Transmission lines*. Schaum's outline series in engineering, McGraw-Hill.

Courant R., D. Hilbert, (1962). *Methods of Mathematical Physics, Partial Differential Equations*. Wiley Interscience II, New York.

Crank J., (1956). *The Mathematics of Diffusion*. Oxford Univ. Press, London.

Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, (1999). *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley, USA.

Dorf R. C., R. H. Bishop, (1990). *Modern Control Systems*. Addison-Wesley, New York.

Heaviside Olivier, (1893). *Electromagnetic Theory*. London.

Jesus Isabel S., Ramiro S. Barbosa, J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha, (2006). *Strategies for the Control of Heat Diffusion Systems Based on Fractional Calculus*. IEEE -ICCC 2006 – IEEE International Conference on Computational Cybernetics, pp. 3-8, Estónia.

Jesus Isabel S., J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha, (2007). *Fractional Dynamics and Control of Heat Diffusion Systems*. MIC 2007 – The 26th IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control, Áustria.

Kraus John D., Daniel A. Fleisch, (1999). *Electromagnetics with Applications*. McGraw-Hill, 5<sup>o</sup>. edição, Singapura.

- Machado J. A. Tenreiro, (1997). Analysis and Design of Fractional-Order Digital Control Systems. *SAMS Journal Systems Analysis, Modelling, Simulation*, 27, pp. 107–122.
- Machado J. A. Tenreiro, Ramiro S. Barbosa, Manuel F. Silva, Lino M. Figueiredo, Isabel S. Jesus, Alexandra F. Galhano, (2004a). *Application of Fractional Calculus in the System Modelling and Control*. First International Conference on Knowledge Engineering “ICKEDS”, pp. 445-452, Portugal.
- Machado J. T., Isabel Jesus, (2004b). A Suggestion From the Past?. *Fractional Calculus & Applied Analysis – FCAA, An International Journal for Theory and Applications*, vol. 7 (4), pp. 403-407.
- Machado J. T., Isabel Jesus, (2005a). *Fractional Order Dynamics in Some Distributed Parameter Systems*. International Conference on Modelling, Identification, and Control “MIC2005”, pp. 29-34, Áustria.
- Machado J. T., Isabel Jesus, J. Boaventura Cunha, József K. Tar, (2005b). *Fractional Dynamics and Control of Distributed Parameter Systems*. Intelligent Systems at the Service of Mankind. vol. 2, pp. 295-305, Ubooks.
- Majhi S., D. P. Atherton, (1999). Modified Smith predictor and controller for processes with time delay. *IEE proc. Control Theory Appl.* 146 (5), pp. 359-366.
- Podlubny, (1999). Fractional-order systems and  $PI^\lambda D^\mu$ -controllers. *IEEE Trans. Automatic Control* vol. 44(1), pp. 208-214.
- Podlubny, Igor, Ivo Petras, Blas M. Vinagre, YangQuan Chen, Paul O’Leary, Lubomir Dorcak, (2003). Realization of fractional order controllers. *Acta Montanistica Slovaca*, 8 (3), pp. 233- 235.

- Petráš Ivo, (1999). The fractional-order controller: Methods for their synthesis and application. *Journal of Electrical Engineering*, **50** (9-10), pp. 284-288.
- Petrás Ivo, Blas M. Vinagre (2002). Practical application of digital fractional-order controller to temperature control. *Acta Montanistica Slovaca*, **7** (2), pp. 131–137.
- Richards R. J., (1979). *An introduction to dynamics & control*. Longman, Londres.
- Smith, O. J. M., (1957). Closed Control of Loops with Dead Time. *Chemical Engineering process*, **53**, pp. 217-219.
- Stanley J. Farlow (1993). *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Wiley.
- Vinagre Blas M., Ivo Petráš, Igor Podlubny, YangQuan Chen, (2001a). Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control. *Journal of Vibration and Control-Special issue on fractional order calculus*. Elsevier.
- Vinagre Blas M., Ivo Petráš, P. Merchan, L. Dorcak, (2001b). *Two digital realizations of fractional controllers: application to temperature control of a solid*. ECC2001, pp. 1764-1767.
- Yen, Chu-Sun, Zvonko Fazarinc, Richard L. Wheeler, (1982). Time-domain skin-effect model for transient analysis of lossy transmission lines. *IEEE*, **70** (7), pp. 750-757.
- Yonghong Tan, Achiel Van Cauwenberghe, (1999). Neural network based  $d$ -step ahead predictors for nonlinear systems with time delay. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **12**, pp. 21-35.

Zhuang M., D. P. Atherton, (1993). Automatic tuning of optimum PID controllers. *IEE proceedings-Part D: Control Theory and Applications* **140** (3), pp. 216-224.



# *Capítulo 4*

---

## ***ELECTROMAGNETISMO***

A teoria do campo electromagnético é a disciplina que estuda as cargas, em repouso ou em movimento, criando correntes e campos electromagnéticos. Este estudo é fundamental para o conhecimento da engenharia electrotécnica e da física e é indispensável para a compreensão, desenho e operação de sistemas com antenas, circuitos com microondas, radio-frequência, comunicações ópticas, circuitos eléctricos, dispositivos electrónicos, conversores de energia electromecânica e, mesmo, nos computadores. A teoria dos circuitos requerida no estudo da engenharia electrotécnica é um caso especial da teoria electromagnética e é válida quando as dimensões físicas de um circuito são pequenas quando comparadas com os comprimentos de onda.

O estudo do electromagnetismo inclui, simultaneamente, os aspectos teóricos e de aplicação. Os conceitos teóricos foram desenvolvidos, por vários cientistas, durante os anos que decorreram entre 1750 e 1850 dos quais se salientam Faraday, Ampère, Gauss, Lenz, Coulomb, Volta, que elaboraram um conjunto de equações baseadas inicialmente em experiências de condução. Posteriormente, estas equações foram combinadas por um físico e matemático

escocês, de seu nome James Clerk Maxwell, num conjunto de quatro equações vectoriais designadas por equações de Maxwell. Estas equações expressam as leis básicas da electricidade e do magnetismo e, segundo as demonstrações formuladas por Maxwell, estes dois fenómenos possuem aspectos electromagnéticos complementares. Maxwell demonstrou que os campos eléctrico e electromagnético viajam pelo espaço na forma de ondas e que se propagam com velocidade constante.

Neste capítulo são apresentadas as equações de Maxwell, bem como outros assuntos de interesse para a compreensão do estudo efectuado no domínio dos sistemas electromagnéticos de ordem fraccionária, nomeadamente o efeito pelicular, as correntes de *Eddy*, ou *Foucault*, e o potencial eléctrico.

O efeito pelicular (EP) é um dos fenómenos físicos que pode ser descrito através das equações de Maxwell. O primeiro estudo do EP foi desenvolvido por Lord Kelvin em 1887, mas foram vários os cientistas que deram importantes contributos para a melhor compreensão deste efeito. O EP define a tendência de, a altas frequências, a corrente eléctrica se distribuir num condutor de forma a que a sua densidade perto da superfície seja maior do que a que possui no seu núcleo. Este fenómeno aumenta a resistência efectiva do condutor com a frequência da corrente. Este efeito é mais pronunciado em sistemas de radio-frequência, especialmente em antenas e em linhas de transmissão [Yen, *et al.*, (1982)], mas pode também afectar o desempenho de equipamentos de som de alta fidelidade por atenuação da sua gama de tons.

O fenómeno de EP pode ser reduzido se forem empregues vários condutores, já que assim se aumenta a área da superfície efectiva do condutor. É fácil verificar que, no vácuo, a variação no espaço dos campos é muito menor do que a variação espacial num metal. Desta forma, nos estudos conduzidos



para avaliar estes campos num condutor, a variação espacial do comprimento de onda fora do condutor pode ser ignorada.

Usualmente, o raio de curvatura da superfície de um condutor pode ser muito maior do que a profundidade de penetração PP (do inglês: *Skin depth*). Para analisar este fenómeno foram aplicadas as equações de Maxwell que descrevem as soluções para estes campos. Porém, é muito frequente considerarem-se alguns parâmetros tais como a capacidade ou a indutância por unidade de comprimento, e as suas relações com os sinais que descrevem a velocidade de propagação ou a impedância característica do sistema.

No âmbito deste trabalho aplicam-se as funções de Bessel para calcular os valores da impedância  $Z$  em cabos eléctricos. Para os valores das impedâncias, efectuam-se vários estudos das aproximações a estas impedâncias para faixas de frequências altas e baixas. Verifica-se a natureza fraccionária de ordem 0,5 dos fenómenos envolvidos.

Outro estudo efectuado e descrito neste capítulo prende-se com o potencial eléctrico. São aplicados os conceitos do cálculo fraccionário e alguns aspectos do electromagnetismo ao potencial eléctrico estático e é desenvolvido um método de aproximação de ordem fraccionária ao potencial eléctrico. O método de aproximação criado é determinado através de dois algoritmos, um dos quais através de uma metodologia clássica de programação, e o outro através da aplicação de algoritmos genéticos, que têm por objectivo otimizar o erro da aproximação do esquema proposto. Estes dois algoritmos são comparados e tecidas as respectivas conclusões.

Tendo por base o exposto, este capítulo é organizado da seguinte forma. Na secção 4.1 são apresentadas algumas definições e conceitos necessários ao bom entendimento do trabalho desenvolvido, nomeadamente as equações de Maxwell nas formas diferencial e integral, o efeito pelicular (EP), a

profundidade de penetração (PP) e as correntes de *Eddy* (CE). Na secção 4.2 são apresentados os conceitos de EP e CE sendo discutida a sua ordem fraccionária. A secção 4.3 define os conceitos associados ao potencial eléctrico e estabelece uma análise e síntese de múltiplos de ordem fraccionária. A aproximação de funções de transferência de ordem fraccionária através de expressões de ordem inteira potencia o estudo das expressões clássicas do potencial eléctrico estático na perspectiva do CF. Baseado nesta reavaliação, na secção 4.4 são descritos dois métodos numéricos para a implementação de aproximações ao potencial eléctrico de ordem fraccionária, a saber um algoritmo clássico e um algoritmo genético. Finalmente, na última secção são tecidas as conclusões relativas a este capítulo.

## **4.1 Definições**

### **4.1.1 Equações de Maxwell**

Em 1873 James Clerk Maxwell compilou as leis de Ampère, de Faraday e de Gauss (para os campos eléctrico e magnético), num conjunto de quatro equações, que passaram a ser designadas por *Equações de Maxwell*. Maxwell unificou assim a teoria do electromagnetismo. Ele também adicionou outro termo à equação do Ampère, por forma a incluir a variação do tempo com o deslocamento da densidade de corrente ( $\partial\mathbf{D}/\partial t$ ), possuindo este termo as mesmas dimensões que a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  ( $\text{A m}^{-2}$ ), Figura 4.1.

Os campos eléctrico e magnético são normalmente definidos como vectores tendo, consequentemente, amplitude e direcção [Balanis, 1989].

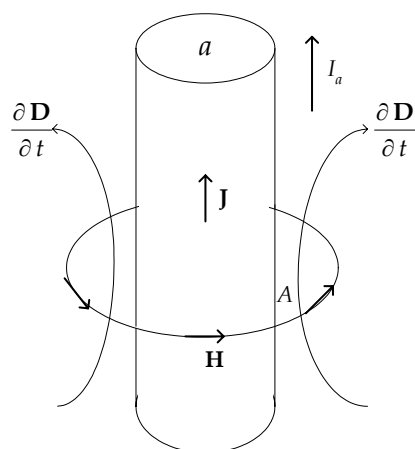


Figura 4.1 - Variáveis que servem de base às equações de Maxwell.

As equações de Maxwell podem ser descritas sob as formas diferencial ou integral sendo abordadas nas duas subsecções seguintes.

#### 4.1.1.1 Equações Diferenciais de Maxwell

A forma diferencial das equações de Maxwell é a mais usada para resolver problemas do valor limite (ou de fronteira) em problemas electromagnéticos. Estas expressões são usadas para descrever e analisar vectores de campo, densidades de corrente e densidades de carga num ponto do espaço e num instante de tempo. Para que estas expressões sejam válidas é necessário considerar que os vectores de campo possuem solução única, são limitados, são funções contínuas no tempo e no espaço e exibem derivadas contínuas. Os vectores de campo associados às ondas electromagnéticas possuem estas características, excepto quando surgem alterações acentuadas na distribuição de carga e na densidade de corrente. As discontinuidades nas distribuições de cargas ou de corrente ocorrem, usualmente, na ligação entre meios onde existem alterações discretas nos parâmetros eléctricos. As variações do vector de campo através das fronteiras (ligações) são descritas como discontinuidades na distribuição de cargas e/ou correntes, pelo que são normalmente designadas

por condições de fronteira. Para uma descrição completa dos vectores de campo num ponto, e para um dado instante de tempo, é necessário não só as equações diferenciais de Maxwell, mas também as condições de fronteira associadas. Na forma diferencial, as equações de Maxwell são dadas por:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ , e  $\mathbf{J}$  representam respectivamente, os vectores da intensidade do campo eléctrico, densidade do fluxo eléctrico, intensidade do campo magnético, densidade do fluxo magnético e densidade de corrente, os escalares  $\rho$  e  $t$  representam a densidade de carga e a variável tempo e  $\nabla$  representa o operador nabla definido por  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ , onde  $\partial$  representa a derivada parcial em ordem ao espaço tridimensional de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

O desfasamento da densidade de corrente eléctrica  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , foi introduzida por Maxwell para completar as leis estáticas de Ampère,  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ .

No caso dos dieléctricos, parte do deslocamento da densidade de corrente foi visto como um movimento agrupado de cargas criando uma verdadeira corrente. Devido a isto, é conveniente considerar completamente, mesmo em espaço livre,  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  como um termo do deslocamento de densidade de corrente.

Devido à simetria das equações de Maxwell, o termo  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  da equação (4.1) é designado como o deslocamento magnético da densidade de corrente.

Como complemento às quatro equações de Maxwell, existe uma outra equação que descreve as variações de densidade de corrente  $\mathbf{J}_{dc}$  e de densidade de carga  $\rho$ . Através de uma relação não independente, esta equação é referida como uma equação de continuidade, devido ao facto de relacionar o fluxo de corrente fora de um volume pequeno (no limite, um ponto) com o índice de diminuição de carga. A expressão seguinte descreve o aqui mencionado:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{dc} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.5)$$

A equação de continuidade (4.5) pode ser obtida através da equação de Maxwell (4.1).

#### 4.1.1.2 Forma Integral das Equações de Maxwell

A forma integral das equações de Maxwell descreve as relações dos vectores de campo, densidade de carga e densidade de corrente através de uma dada região do espaço. Estas equações são utilizadas para resolver problemas do valor de fronteira electromagnéticos em sistemas que possuam simetrias complexas, tais como geometrias cilíndricas e esféricas.

As formas integrais das equações de Maxwell podem ser derivadas das suas formas diferenciais pela utilização dos teoremas de Stokes e da divergência. Para um vector arbitrário  $\mathbf{A}$ , o teorema de Stokes refere que *a linha integral ao vector  $\mathbf{A}$  ao longo de um caminho fechado  $C$ , é igual ao integral do produto do vector  $\mathbf{A}$  com a normal à superfície  $\mathbf{S}$ , que possui como fronteira o contorno  $C$* . O teorema de Stokes pode ser escrito da seguinte forma:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \quad (4.6)$$

O teorema da divergência refere que para um qualquer vector arbitrário  $\mathbf{A}$ , a superfície integral fechada da componente normal do vector  $\mathbf{A}$  através da superfície  $\mathbf{S}$  é igual ao volume integral da divergência de  $\mathbf{A}$  através do volume  $V$  encerrado por  $\mathbf{S}$ . A equação seguinte descreve este teorema:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv \quad (4.7)$$

Aplicando o integral de superfície a ambos os lados da equação (4.1) podemos escrever:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.8)$$

Aplicando o teorema de Stokes (4.6) ao lado esquerdo da equação anterior, esta reduz-se a:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.9)$$

que é referida como a equação de Maxwell na forma integral derivada da lei de Faraday.

Na ausência de densidade de corrente electromagnética, a lei de Faraday refere que a força electromotriz (*fem*) que aparece aos terminais de um circuito aberto é igual ao tempo necessário para diminuir o fluxo magnético associado.

Aplicando um procedimento similar, pode-se demonstrar que a forma integral correspondente a (4.2) pode ser escrita na forma:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.10)$$

a qual é usualmente referida como a equação de Maxwell na forma integral correspondente à Lei de Ampère. A lei de Ampère, refere que a linha integral do campo magnético através de um percurso fechado é igual à corrente por ele envolvida.

As outras duas equações de Maxwell na forma integral podem ser obtidas através da correspondente forma diferencial, usando o seguinte procedimento. Primeiro aplica-se o volume integral a ambos os membros da equação (4.3) obtendo-se:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv = \iiint_V \rho \, dv \quad (4.11)$$

Aplicando o teorema da divergência, dado pela equação (4.7), ao lado esquerdo da equação anterior, esta reduz-se a:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho \, dv \quad (4.12)$$

que é usualmente referida como a equação de Maxwell do campo eléctrico devida à Lei de Gauss.

De uma forma similar, a forma integral de (4.4) é dada por:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.13)$$

a qual é usualmente referida com a equação de Maxwell do campo magnético devida à Lei de Gauss. A correspondente forma integral da equação de continuidade na forma diferencial, dada por (4.5), pode ser escrita como:

$$\oiint_S \mathbf{J}_{ic} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dv \quad (4.14)$$

As equações de Maxwell nas formas diferencial e integral são resumidas na Tabela 4.1 a seguir apresentada.

### 4.1.2 Efeito Pelicular

O efeito pelicular (EP) (do inglês: *Skin Effect*) é um fenómeno que se verifica a altas frequências onde a corrente eléctrica se distribui não uniformemente no seio de um condutor, sendo a densidade de corrente junto à superfície superior à existente no núcleo do mesmo. Este fenómeno em corrente alternada origina um aumento efectivo da resistência do condutor com o aumento da frequência, comparativamente com uma resistência do condutor do mesmo tipo em corrente contínua ou a baixas frequências.

Tabela 4.1 - Equações de Maxwell nas formas diferencial e integral.

Leis	Forma Diferencial	Forma Integral
Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$
Gauss para o Campo Eléctrico	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv$
Gauss para o Campo Magnético	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$



O efeito EP pode ser reduzido se se aplicarem vários condutores em vez de um só. Este procedimento aumenta a área efectiva da superfície do condutor. Este fenómeno torna-se mais acentuado em sistemas de rádio-frequência, especialmente em antenas e em linhas de transmissão. Este efeito foi inicialmente explicado por Lord Kelvin em 1887, tendo posteriormente outros cientistas estudado o fenómeno como, por exemplo, Nikola Tesla.

Para um meio homogéneo, linear e isotrópico podem-se estabelecer as seguintes relações:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (4.17)$$

onde  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  representam respectivamente, a permitividade eléctrica, a permeabilidade magnética e a condutividade.

Começemos por considerar um condutor cilíndrico com raio  $r_0$  conduzindo uma corrente eléctrica  $I$  paralelamente ao seu eixo longitudinal. Num condutor, mesmo a altas frequências, o termo  $\partial\mathbf{D}/\partial t$  pode ser desprezado quando o comparamos com o termo de condutividade  $\mathbf{J}$  ou, por outras palavras, o deslocamento de corrente é muito menor do que a condução de corrente. Desta forma, para uma distância radial  $r < r_0$ , a aplicação das equações de Maxwell, nomeadamente, a aplicação do teorema de Ampère a um contorno circular de raio  $r$  (Figura 4.2) resulta na expressão (4.18a), pelo que se se calcular a sua derivada obtemos a equação (4.18b). A derivação da equação (4.18b) em ordem ao tempo  $\partial\mathbf{H}/\partial t$  leva por sua vez à expressão (4.18c) [Küpfmüller, (1939)], [Bessonov, (1939)]:

$$2\pi r \mathbf{H} = 2\pi \sigma \int_0^r \mathbf{E} r \, dr \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.18c)$$

Para um campo sinusoidal podemos adoptar a notação complexa  $E = \sqrt{2} \tilde{E} e^{i\omega t}$ , onde  $j = \sqrt{-1}$ , obtendo-se:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} + q^2 \tilde{E} = 0 \quad (4.19)$$

com  $q^2 = -j\omega\sigma\mu$ .

A equação (4.19) é um caso particular das equações de Bessel que, para o caso em estudo, possui uma solução do tipo:

$$\tilde{E} = \frac{q}{2\pi r_0 \sigma} \frac{J_0(qr)}{J_1(qr_0)} I, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (4.20)$$

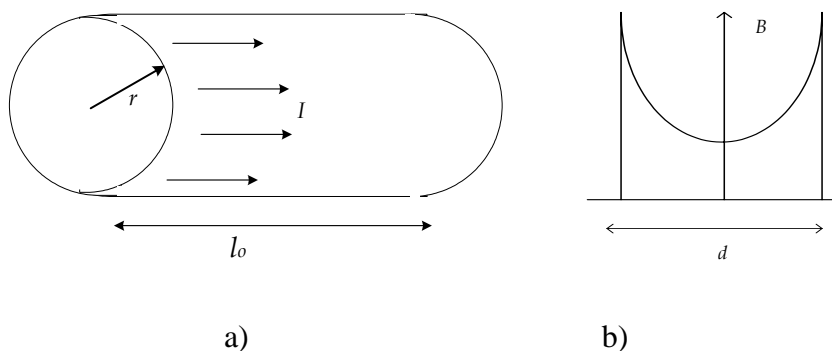


Figura 4.2 - Condutor cilíndrico: a) vista lateral, b) corte longitudinal.

onde  $J_0$  e  $J_1$  das funções de Bessel de variável complexa de primeira espécie são de ordem 0 e 1, respectivamente.

A equação (4.20) estabelece a definição de EP que consiste em obter uma densidade de corrente não uniforme, nomeadamente, baixas densidades próximo do eixo do condutor e altas densidades na superfície do mesmo, quando a frequência  $\omega$  aumenta.

A determinação do EP pode ser obtida através da medição da profundidade de penetração (PP) (do inglês: *Skin Depth*) dada pela expressão:

$$\delta = \left( \frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

correspondendo  $\delta$  à distância abaixo da superfície do condutor, para a qual o valor do seu campo é reduzido para  $e^{-1}$ .

A tensão total é  $\tilde{Z}I = \tilde{E}I$ , que para um condutor com comprimento  $l_0$ , leva a:

$$\tilde{Z} = \tilde{E} = \frac{ql_0}{2\pi r_0 \sigma} \frac{J_0(qr_0)}{J_1(qr_0)} \quad (4.22)$$

onde  $\tilde{Z}$  é a equivalente impedância eléctrica complexa.

Conhecendo-se as séries de Taylor [Abramowitz e Stegun, (1965)]:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \dots, \quad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \dots \quad (4.23)$$

e, para grandes valores de  $x$ , a expansão assintótica:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.24)$$

podemos obter as aproximações de  $\tilde{Z}$  para as baixas e altas frequências:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{Z} \approx \frac{l_0}{\pi r_0^2 \sigma} \quad (4.25)$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{Z} \approx \frac{l_0}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + j) \quad (4.26)$$

No EP clássico, o caminho livre  $l$  por onde os electrões podem transitar entre eventos consecutivos é menor do que a profundidade de penetração  $\delta$ . Desta forma, para  $\delta \ll l$  temos uma relação local e o valor de  $\mathbf{J}$  para um dado ponto é determinado apenas pelo valor de  $\mathbf{E}$  nesse ponto. A lei de Ohm, dada pela expressão (4.17), origina que EP seja  $\delta \sim \omega^{-1/2}$ , e a impedância  $Z = R + jX$  é tal que  $R = X \sim \omega^{1/2}$ .

Para temperaturas muito baixas o fenómeno comporta-se de modo diferente. Para o efeito pelicular anómalo (EPA)  $\delta \ll l$  a relação entre  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{E}$  não é local e os electrões estão sujeitos ao campo apenas durante uma parte do seu trajecto entre duas colisões com os iões do metal, e consequentemente, origina uma fraca conductividade [Casalbuoni e Hamburg, (2005)], [Podobedoc, (2003)]. A profundidade de penetração anómala é dada por  $\delta \sim \omega^{-1/3}$ , e a impedância  $Z = R + jX$  é tal que  $R = X / \sqrt{3} \sim \omega^{2/3}$ . No âmbito deste trabalho apenas foi focado o EP mas a extensão do método proposto no caso do EPA é directa.

### 4.1.3 Correntes de “Eddy”

Quando a corrente alternada (CA) flui através dos condutores, geram-se as correntes de *Eddy* (CE) (do inglês: *Eddy Currents*), resultantes do efeito da indução de Faraday. De acordo com a lei de Lenz, as CE tendem a opor-se às mudanças induzidas no campo.

A energia perdida devido às CE no interior de materiais ferromagnéticos de dispositivos CA aumenta a energia perdida nos processos de magnetização, sendo proporcional à área do ciclo histerético. Com a finalidade de diminuir o efeito das CE em dispositivos CA de ferro, o interior é vulgarmente constituído por folhas finas ou lâminas de ferro isoladas electricamente umas das outras. Assim, as CE são confinadas a folhas individuais, e as perdas de potência são reduzidas. Através do empilhamento de um número suficiente de folhas em paralelo a relutância total do circuito magnético pode ser reduzida para valores desejados. Para reduzir as CE a um valor mínimo, são usados condutores de ferro em vez das folhas, enquanto que para frequência de rádio é usualmente empregue películas de ferro.

Um importante efeito resultante da indução de Faraday é a geração das CE [Kip, (1969)]. Considere-se, por exemplo, o que acontece quando fluem correntes alternadas através de um condutor de secção circular, como o representado na Figura 4.3. Algumas linhas do campo magnético  $\mathbf{B}$  resultantes são também apresentadas. Algumas destas linhas encontram-se dentro do condutor.

Quando a corrente muda de sentido formam-se forças electromotrizes ( $fem$ ) devido à variação de fluxo  $d\phi/dt$  induzindo-se CE no condutor. Pelo princípio de Lenz, estas CE diminuem a magnitude de  $d\phi/dt$ . No entanto,  $d\phi/dt$  irá ser reduzido se o  $\phi$  no metal for reduzido, e a concentração da corrente na superfície do condutor acompanhar esta situação. É fácil de demonstrar que o campo fora do condutor não é afectado por esta alteração da distribuição de corrente.

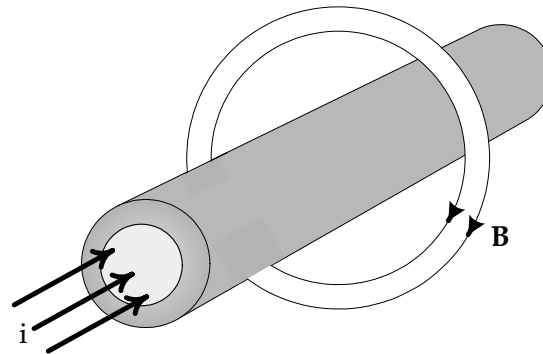


Figura 4.3 - Linhas de campo magnético em torno de uma corrente uniforme num condutor.

O conceito físico EP descrito anteriormente e algumas ferramentas matemáticas podem ser adoptadas em sistemas mais complexos. Por exemplo, o fenómeno físico que estamos a analisar, usualmente encontrado nas máquinas eléctricas, tais como transformadores e motores, pode ser modelado aplicando uma aproximação idêntica à apresentada anteriormente para o EP.

Consideremos o circuito magnético de um máquina eléctrica constituída por um núcleo em ferro laminado (Figura 4.4). Cada uma das folhas de metal ferromagnético com permeabilidade  $\mu$ , possuindo uma altura  $d$  e uma largura  $b$  ( $b \gg d$ ), forma um circuito magnético fechado com um comprimento médio  $l_0$ .

Para um núcleo magnético com um enrolamento formado por  $n$  espiras, através do teorema de Ampère temos  $H_0 = nI/l$  onde  $l$  representa o comprimento da linha de força média. A tensão induzida no enrolamento para o fluxo total  $\Phi_t$  é dado por  $u_i = n(d\Phi_t)/dt$ , ou através da notação complexa  $U_i = j\omega n\Phi_t$ . O fluxo  $\Phi_t$  representa a soma de todos os fluxos que atravessam os enrolamentos metálicos.

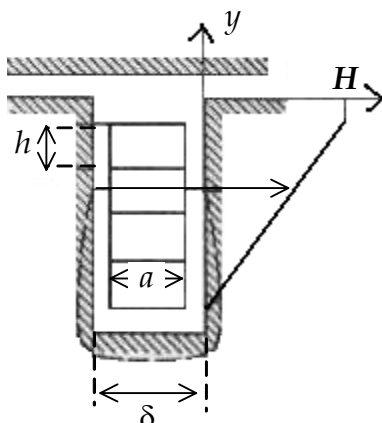


Figura 4.4 - Núcleo de ferro laminado.

Então o fluxo total que atravessa toda a secção é representado por um vector complexo e é dado pela expressão

$$\bar{\Phi} = \int_{-0,5d}^{+0,5d} b \bar{B} dy = \frac{2\mu b H_0}{(1+j)\beta d} \text{th}[\beta(1+j)d/2].$$

Esta expressão permite determinar a

contribuição do núcleo ferromagnético na impedância do veio, [Küpfmüller, (1939)]:

$$\tilde{Z} = \frac{U_i}{I} = \frac{2\mu ab j\omega n^2}{(1+j)\beta l d} \tanh\left[(1+j)\beta \frac{d}{2}\right] \quad (4.27)$$

onde  $\beta = \sqrt{\omega\sigma\mu/2}$ .

Alternativamente, a expressão (4.27) pode ser rescrita por:

$$\tilde{Z} = \frac{\mu ab n^2}{l_0} \omega \frac{[\sinh(\beta d) - \sin(\beta d)] + j[\sinh(\beta d) + \sin(\beta d)]}{(\beta d)[\cosh(\beta d) + \cos(\beta d)]} \quad (4.28)$$

A impedância  $\tilde{Z}$  pode ser aproximada às baixas e altas frequências por:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{Z} \approx j\omega \frac{\mu_{ab} n^2}{l_0} \quad (4.29)$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{Z} \approx \frac{\mu_{ab} n^2}{l_0} \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}} (1 + j) \quad (4.30)$$

Mais uma vez, obtém-se claramente uma dependência de  $\tilde{Z}$  de ordem igual a 0,5 (*i. e.*  $\tilde{Z} \sim \omega^{1/2}$ ). Todavia, a aproximação padrão procura traduzir a impedância por uma relação dependente da frequência, através de um equivalente consistindo numa resistência  $R$  e numa indutância  $L$ , dada por  $R + j\omega L = \tilde{Z}$ .

## 4.2 Perspectiva Fraccionária do EP e do CE

Nesta secção, as expressões obtidas para o EP e para o fenómeno de *Eddy* vão ser reavaliadas na perspectiva do cálculo fraccionário.

No caso do EP, para evitar a complexidade da equação transcendente (4.22), a aproximação mais usual na engenharia electrotécnica consiste em considerar a resistência  $R$  e a indutância  $L$  dada por  $R + j\omega L = \tilde{Z}$ . No entanto, embora usado extensamente, este método é claramente inadequado devido aos valores dos parâmetros do modelo  $\{R, L\}$  variarem com a frequência. Mais ainda, (4.26) revela a natureza de meia derivada do fenómeno dinâmico, que a altas frequências (*i. e.*,  $\tilde{Z} \sim \omega^{1/2}$ ) não é capturada por uma aproximação de ordem inteira. Uma possível aproximação que permite eliminar estes problemas é adoptar o cálculo fraccionário [Aubourg e Mengue, (1998)], [Canat e Faucher, (2003)], [Machado e Jesus, (2004)], [Malpica *et. al.*, (2004)], [Benchellal *et. al.*, (2004)]. Juntando as duas expressões assintóticas (4.25) e (4.26), pode-se



estabelecer vários tipos de aproximações [Machado *et. al.*, (2005a)], [Machado *et. al.*, (2006b)], nomeadamente as duas expressões seguintes:

$$\tilde{Z}_{a1} \approx \frac{l_0}{\pi r_0^2 \sigma} \left[ j\omega \left( \frac{r_0}{2} \right)^2 \mu \sigma + 1 \right]^{1/2} \quad (4.31)$$

$$\tilde{Z}_{a2} \approx \frac{l_0}{\pi r_0^2 \sigma} \left\{ \left[ j\omega \left( \frac{r_0}{2} \right)^2 \mu \sigma \right]^{1/2} + 1 \right\} \quad (4.32)$$

Para verificar a viabilidade das aproximações (4.31) e (4.32), definiram-se os erros relativos da forma polar, da amplitude e da fase, através das seguintes expressões:

$$\varepsilon_{Rk}(\omega) = \left( \tilde{Z} - \tilde{Z}_{ak} \right) / \left| \tilde{Z} \right| \quad (4.33)$$

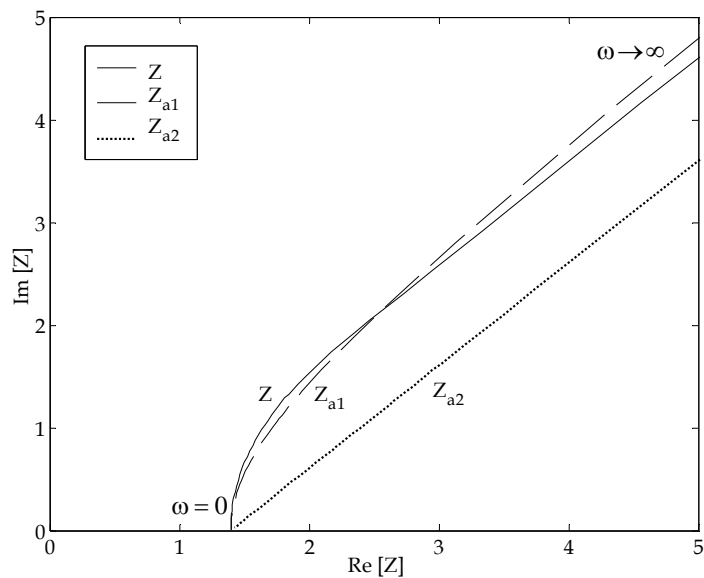
$$\varepsilon_{Mk} = \text{Mod}\{\varepsilon_{Rk}(\omega)\} \quad (4.34)$$

$$\varepsilon_{\phi k} = \text{Fase}\{\varepsilon_{Rk}(\omega)\} \quad (4.35)$$

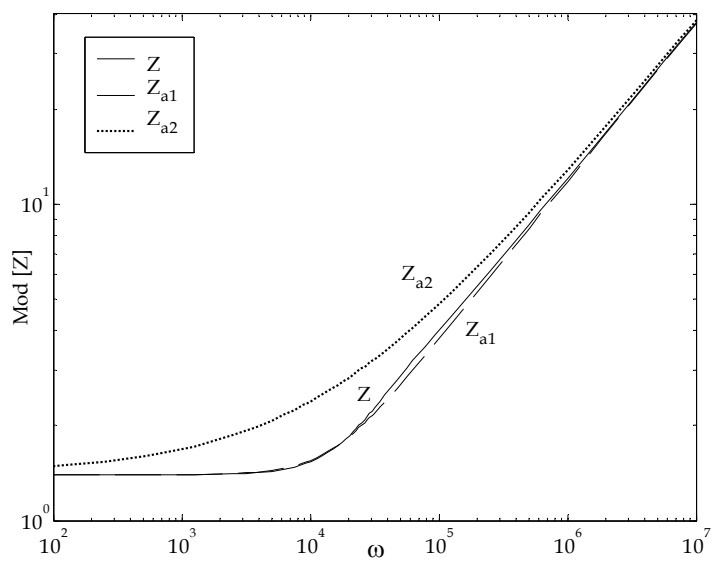
onde o índice  $k = \{1, 2\}$  representa os dois tipos de aproximações.

A Figura 4.5 compara o diagrama polar com os diagramas de Bode da amplitude e da fase para as expressões (4.22), (4.31) e (4.32), revelando um bom ajuste nos dois casos.

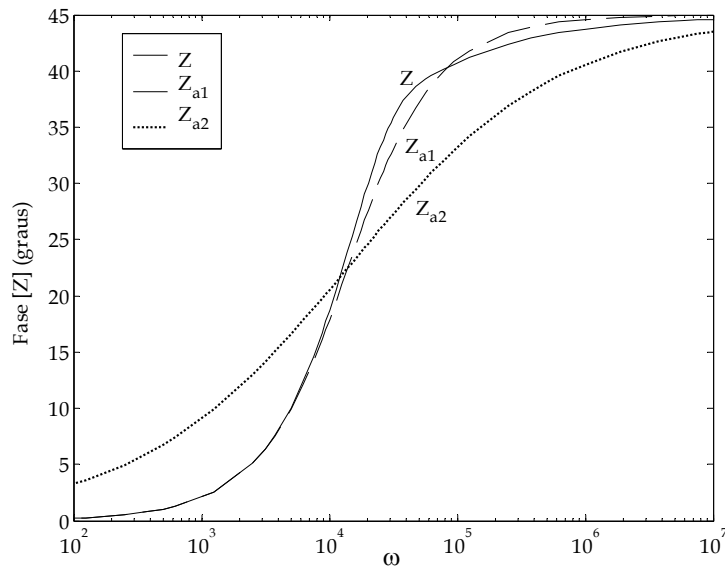
Por outro lado, a Figura 4.6 ilustra os erros relativos obtidos respectivamente no gráfico polar e nos diagramas de Bode da amplitude e da fase. Estas figuras revelam que os resultados obtidos através da expressão (4.31) possuem uma melhor aproximação do que os obtidos com a aplicação da equação (4.32), a qual apresenta um maior erro no meio da faixa de frequências.



a)

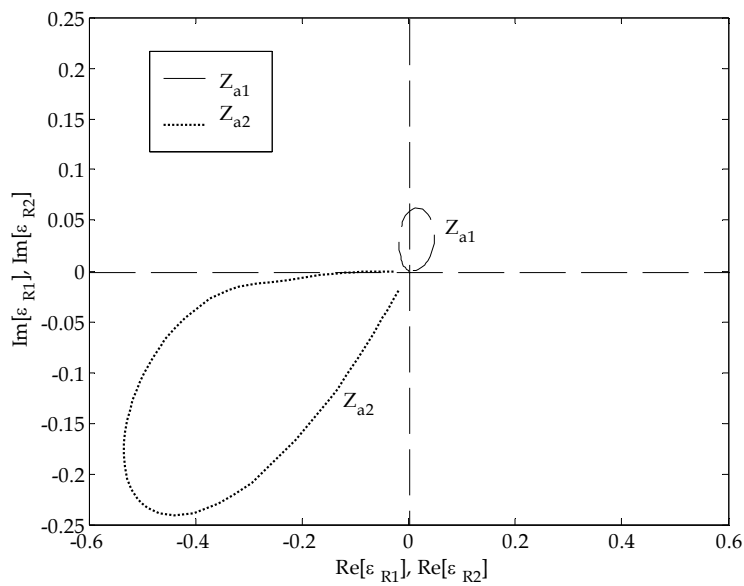


b)

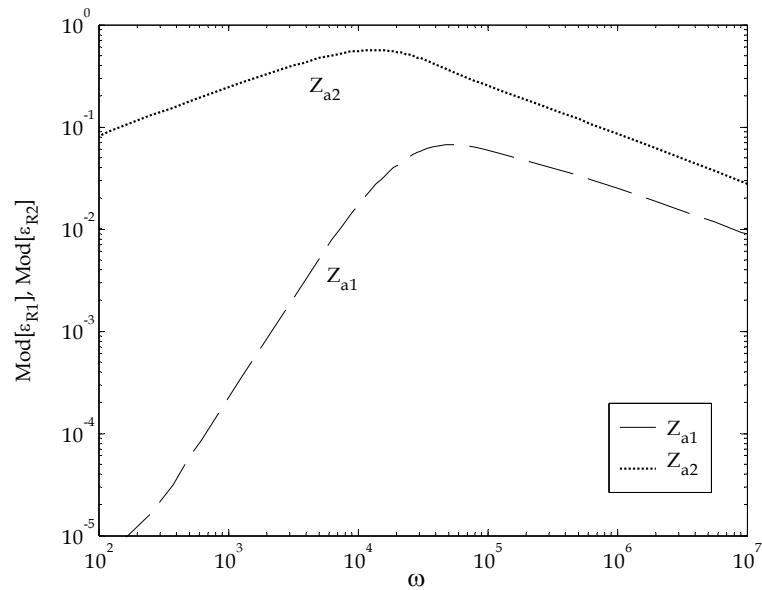


c)

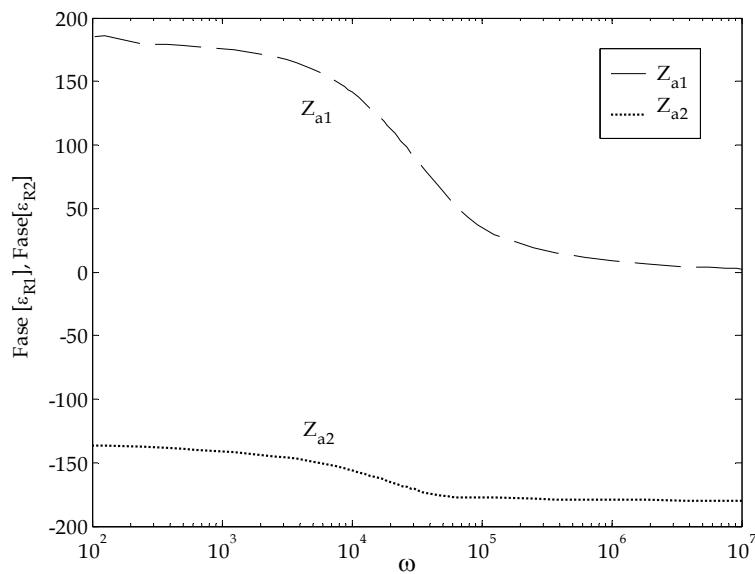
Figura 4.5 - Diagramas da impedância eléctrica teórica  $\tilde{Z}(i\omega)$  e das duas funções de aproximação  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.31) e (4.32) com:  $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}$ ,  $l_0 = 10^3 \text{ m}$ ,  $r_0 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\mu = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$ : a) Polar, b) Amplitude de Bode e c) Fase de Bode.



a)



b)



c)

Figura 4.6 - Erros relativos: a) Polar, b) Amplitude e c) Fase para as duas expressões de aproximações  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.31) e (4.32).

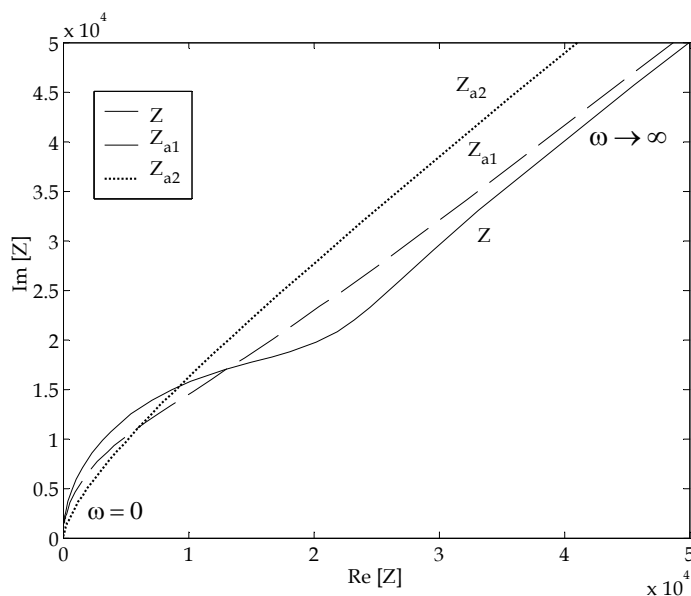
A expressão (4.27) pode também ser reavaliada, tendo por base as ferramentas do cálculo fraccionário.

Uma aproximação que permite evitar os problemas impostos pela expressão transcendente (4.27) consiste em juntar as duas expressões assintóticas (4.29) e (4.30). Desta forma, pode-se estabelecer vários tipos de aproximações, nomeadamente as duas funções que a seguir se apresentam:

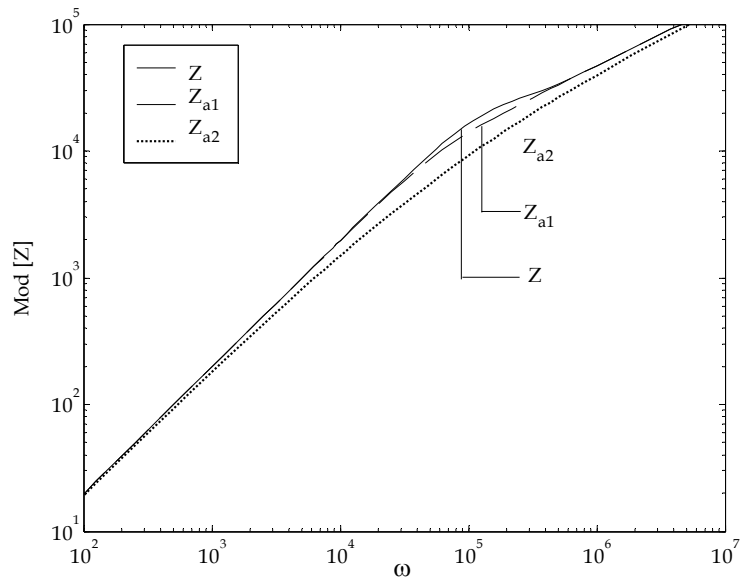
$$\tilde{Z}_{a1} \approx \frac{i\omega\mu ab n^2}{l_0} \left[ j\omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mu\sigma + 1 \right]^{-1/2} \quad (4.36)$$

$$\tilde{Z}_{a2} \approx \frac{i\omega\mu ab n^2}{l_0} \left\{ \left[ j\omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mu\sigma \right]^{-1/2} + 1 \right\} \quad (4.37)$$

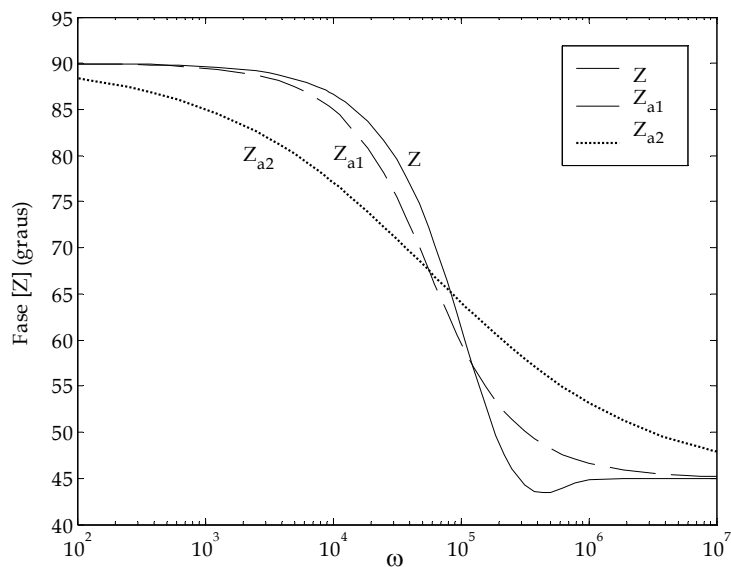
A Figura 4.7 compara o gráfico polar e os diagramas de Bode da amplitude e da fase correspondentes às equações (4.27), (4.36) e (4.37). Esta figura revela um bom ajuste nos dois casos analisados.



a)



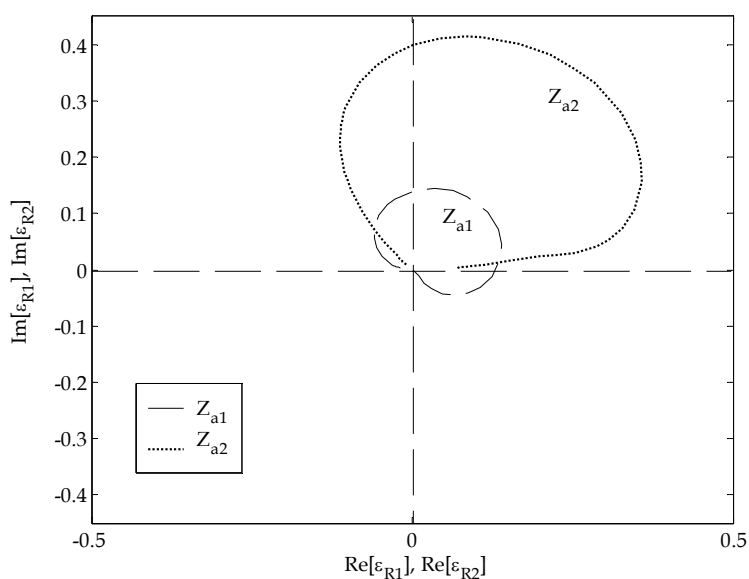
b)



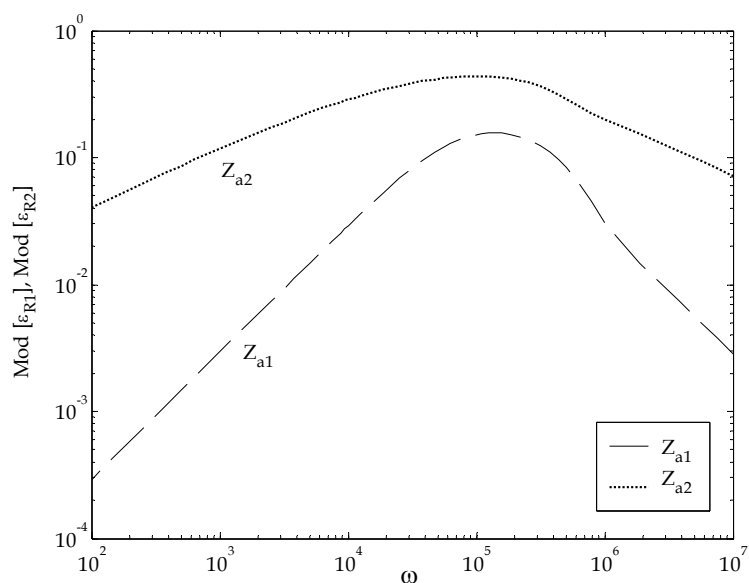
c)

Figura 4.7 - Diagramas da impedância eléctrica teórica  $\tilde{Z}(i\omega)$  e das duas funções de aproximação  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.36) e (4.37) com:  $l_0 = 1,0$  m,  $a = 0,28$  m,  $b = 0,28$  m,  $d = 2,0 \cdot 10^{-3}$ ,  $n = 100$ ,  $\sigma = 7,0 \cdot 10^4 \Omega^{-1}$  m,  $\mu = 200 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6}$  H m $^{-1}$ : a) Polar, b) Amplitude de Bode e c) Fase de Bode.

Na Figura 4.8 são ilustrados respectivamente os erros relativos dos gráficos polar, da amplitude e da fase. Estas figuras, revelam que os resultados obtidos através da expressão (4.36) possuem uma melhor aproximação, comparativamente com as obtidas com a equação (4.37), que apresenta maiores erros no meio da faixa de frequências.



a)



b)

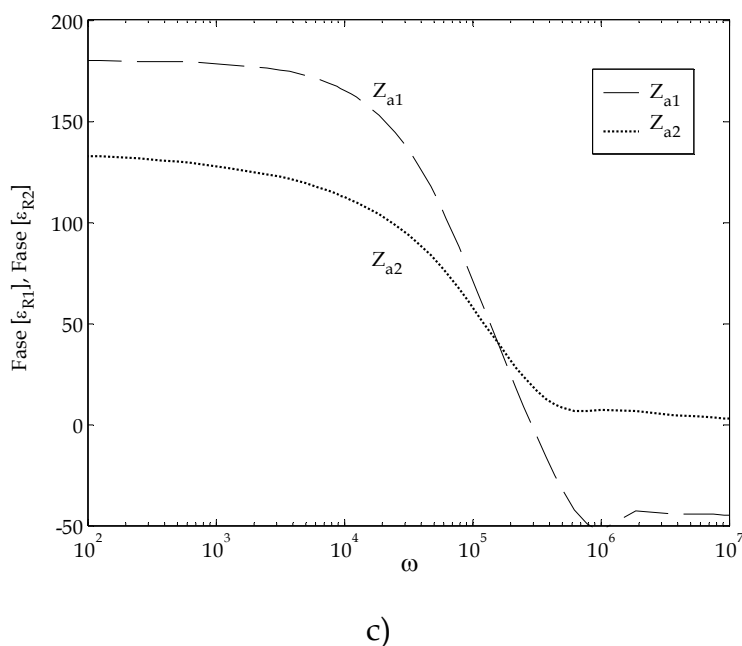


Figura 4.8 - Erros relativos: a) Polar, b) Amplitude e c) Fase para as duas expressões de aproximações  $\tilde{Z}_{a1}$ ,  $\tilde{Z}_{a2}$  correspondentes a (4.36) e (4.37).

Deste estudo pode concluir-se que apesar do electromagnetismo clássico envolver somente derivadas de ordem inteira, para atingir uma interpretação mais completa, somos conduzidos a utilizar modelos que requerem uma perspectiva do cálculo fraccionário.

Outro aspecto de interesse prende-se com o facto de, em todos os casos, se terem obtido modelos fraccionários de ordem igual a "0,5". Desta forma, o significado de  $D^\alpha$  para o caso particular de  $\alpha = 1/2$ , e a sua relação com o cálculo de ordem inteira, levam-nos a concluir que este aspecto é devido à geometria particular dos fenómenos abordados. Assim, a análise de diferentes geometrias de condutores e a sua relação com os valores distintos dos modelos de ordem fraccionária constitui uma perspectiva de desenvolvimento futuro deste estudo.



### 4.3 Potencial Eléctrico

Uma análise recente sobre alguns fenómenos presentes nos sistemas eléctricos, tais como motores, transformadores e linhas de transporte [Canat e Faucher, (2003)], [Benchellal, *et al.*, (2004)], [Malpica, *et al.*, (2005)], [Machado, *et al.*, (2005a)], [Machado, *et al.*, (2005b)], e a motivação para o desenvolvimento de modelos compreensíveis, levou ao desenvolvimento de aproximações baseadas no cálculo fraccionário [Mehaute, *et al.*, (1998)], [Nigmatullin e Mehaute, (1998)], [Nigmatullin, *et al.*, (1991)], [Nigmatullin, (2005)].

Numa perspectiva alternativa, vários autores [Engheta, (1996)], [Engheta, (2000)], [Melchior, *et al.*, (2001)], [Melchior, *et al.*, (2003)] verificaram que certas expressões para o potencial eléctrico, poderiam ser abordadas através de integrais e derivadas de ordem inteira, pelo que propuseram a sua generalização para uma ordem fraccionária. No entanto, para além da sua generalização matemática não foram conseguidos métodos traduzidos em implementações práticas.

Tendo estas ideias em mente, de seguida é apresentada a análise e a síntese de multipólos de ordem fraccionária. Desta forma, na secção 4.3.1 é introduzido o modelo para aproximação de funções de transferência de ordem fraccionária, baseado em expressões de ordem inteira. Na secção 4.3.2 são apresentadas as expressões clássicas do potencial eléctrico estático. O estudo sob o ponto de vista do CF é abordado na secção 4.4.

#### 4.3.1 Função de Transferência Aproximada de Ordem Fraccionária

A definição de Laplace para uma derivada de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$ , é uma generalização directa do método usado para a derivada clássica de ordem

inteira com a multiplicação do sinal de transformada pelo operador  $s$  (para condições iniciais nulas), dada por:

$$L\{D_{0+}^{\alpha}\varphi\} = s^{\alpha}L\{\varphi\}, \quad \text{Re}(\alpha) \geq 0 \quad (4.38)$$

Isto significa que os métodos de análise baseados na frequência possuem uma adaptação directa ao CF. A implementação prática da equação (4.38) no domínio das frequências requer um número infinito de pólos e zeros, obedecendo a uma relação recursiva entre eles [Oustaloup, (1991)], [Oustaloup, (1995)]. No entanto, para uma aproximação real, o número finito de pólos e zeros origina uma oscilação na resposta em frequência e encontra-se limitado a uma dada largura de banda.

Para se analisar a aproximação baseada na frequência dada por (4.38), vamos considerar o circuito recursivo representado na Figura 4.9, tal que:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i, \quad R_{i+1} = \frac{R_i}{\varepsilon}, \quad C_{i+1} = \frac{C_i}{\eta} \quad (4.39)$$

onde  $\eta$  e  $\varepsilon$  são factores de escala,  $I$  é a corrente devida a uma tensão  $V$  aplicada, e  $R_i$  e  $C_i$  são os elementos resistivos e capacitivos dos  $i$  ramos do circuito.

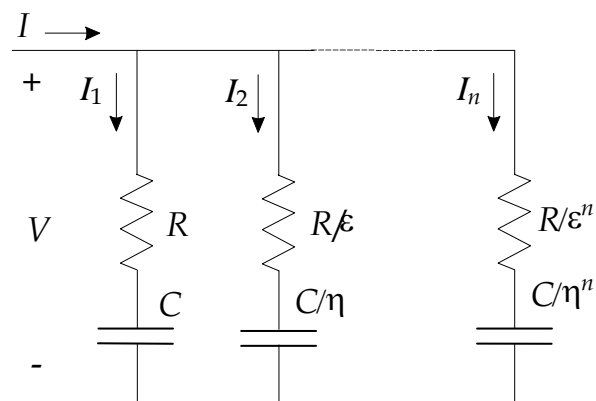


Figura 4.9 - Circuito eléctrico com associação recursiva de elementos resistivos e capacitivos.

A admitância  $Y(j\omega)$  é dada por:

$$Y(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)} = \sum_{i=0}^n \frac{j\omega C \varepsilon^i}{j\omega CR + (\eta\varepsilon)^i} \quad (4.40)$$

A Figura 4.10 apresenta as assíntotas dos diagramas de Bode da amplitude e da fase de  $Y(j\omega)$ .

As frequências do pólo e do zero ( $\omega_i$  e  $\omega'_i$ ) obedecem às relações recursivas, definidas por:

$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \varepsilon\eta, \quad \frac{\omega'_i}{\omega_i} = \eta, \quad \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \varepsilon \quad (4.41)$$

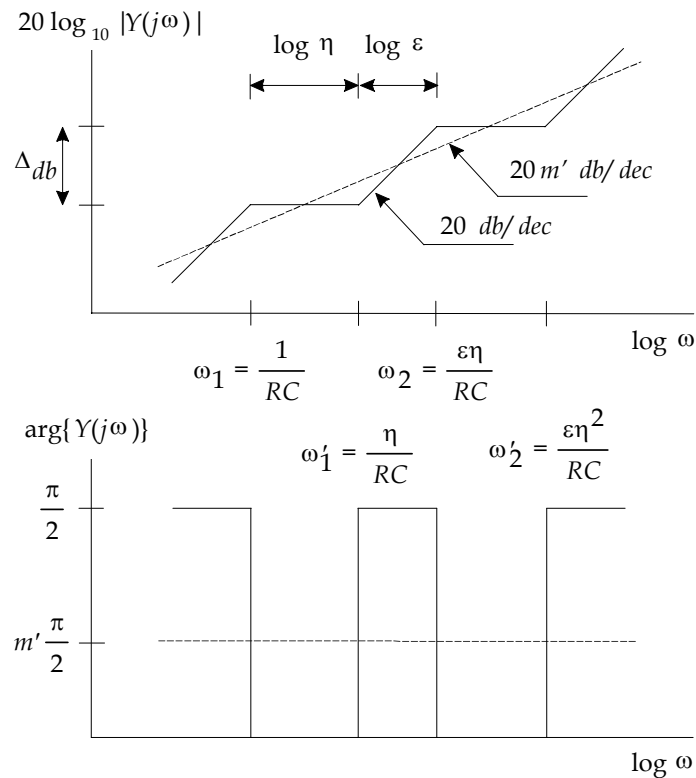


Figura 4.10 - Diagramas de Bode da amplitude e da fase de  $Y(j\omega)$ .

Através dos diagramas de Bode da amplitude e da fase, pode-se calcular o declive médio  $m'$ , da seguinte forma:

$$m' = \frac{\log \varepsilon}{\log \varepsilon + \log \eta} \quad (4.42)$$

Consequentemente, o circuito eléctrico da Figura 4.8 representa uma aproximação à derivada  $D^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , com  $m' = \alpha$ , baseado na distribuição recursiva de pólos e zeros no domínio das frequências. De facto, este método constitui o designado *Commande Robuste d'Ordre Non Entier* – CRONE, para a implementação de aproximações de derivadas e integrais de ordem fraccionária.

### 4.3.2 Expressões Clássicas do Potencial Eléctrico Estático

É sabido que, para um meio homogéneo, linear e isotrópico, o potencial eléctrico  $\varphi$  num ponto  $P$  para uma carga única, para um dipólo e para uma quadripólo (Figura 4.11) é dado respectivamente por [Küpfmüller, (1939)], [Bessonov, (1968)], [Aubourg e Mengue, (1998)]:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} + C \quad (4.43)$$

$$\varphi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} + C, \quad r \gg l \quad (4.44)$$

$$\varphi = \frac{ql^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} + C, \quad r \gg l \quad (4.45)$$

onde  $\varepsilon_0$  representa a permitividade,  $q$  a carga eléctrica,  $r$  a distancia radial e  $\theta$  o ângulo efectuado com o eixo.

O potencial eléctrico  $\varphi$  num ponto P (Figura 4.11) para um filamento muito longo com uma carga  $\lambda$  por unidade de comprimento, ou para dois filamentos com cargas opostas é, respectivamente:

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C, \quad C \in \mathfrak{R} \quad (4.46)$$

$$\varphi = \frac{\lambda l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r} + C, \quad r \gg l \quad (4.47)$$

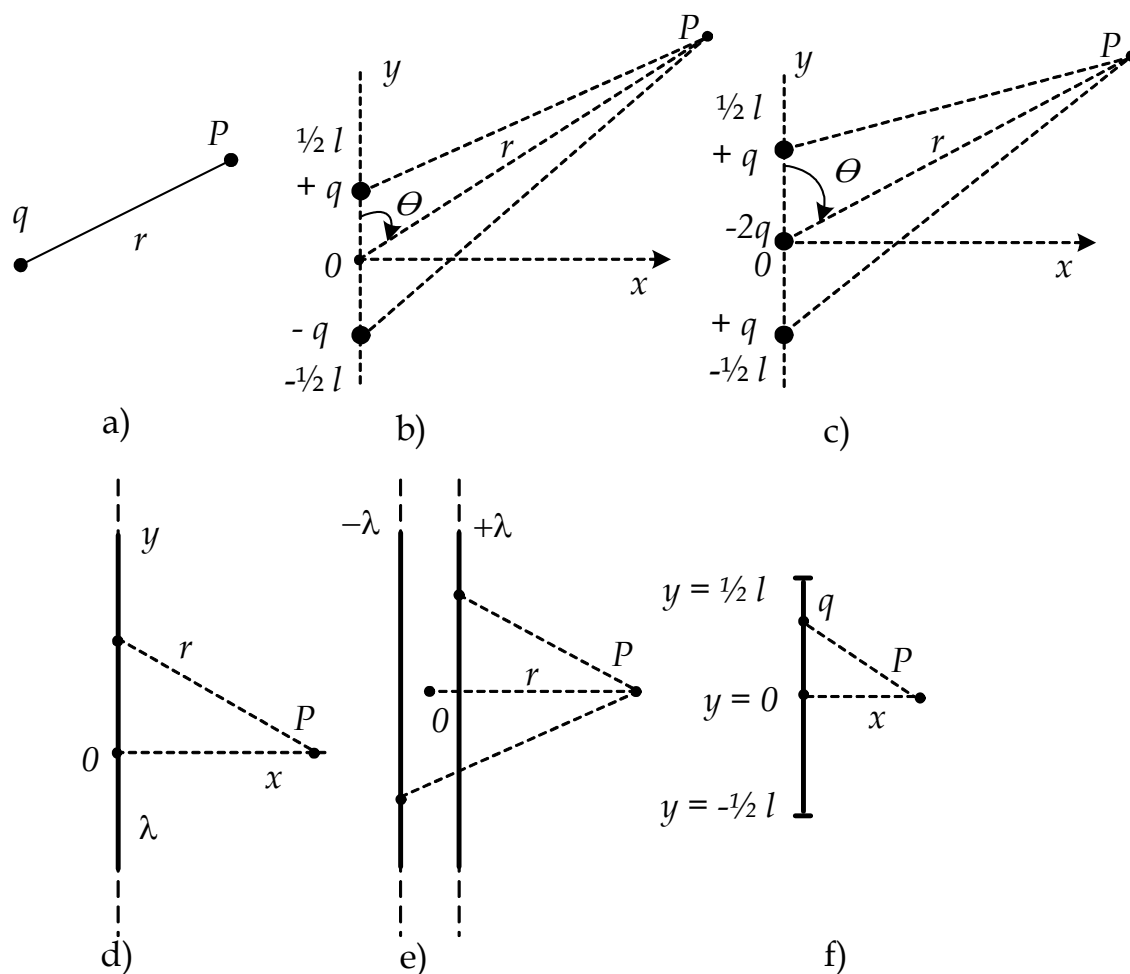


Figura 4.11 - Potencial eléctrico de: a) carga única, b) dipólo, c) quadripólo, d) linha de carga infinita, e) dois filamentos infinitos com duas cargas opostas, f) filamento finito com comprimento  $l$  e carga  $q$ .

Por outro lado, o potencial resultante de uma superfície plana com densidade de carga  $\sigma$  (Figura 4.12) é dado por:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + C, \quad C \in \mathfrak{R} \quad (4.48)$$

Analisando as expressões de (4.43) a (4.48), verificamos a relação  $\Xi: \varphi \sim \{r^{-3}, r^{-2}, r^{-1}, \ln r, r\}$  que corresponde à aplicação de derivadas e integrais de ordem inteira.

#### 4.4 Implementação do Potencial Eléctrico de Ordem Fraccionária

A natureza diferencial de ordem inteira das expressões do potencial, motivaram vários autores [Engheta, (1996)], [Engheta, (2000)], [Melchior, *et al.*, (2001)], [Melchior, *et al.*, (2003)] a propor a sua generalização numa perspectiva do CF. Desta forma, um multipólo fraccionário produz num ponto  $P$  um potencial eléctrico  $\varphi \sim r^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , onde fraccionário significa que não se encontra restrito às relações de ordem inteira  $\Xi$  observadas na secção anterior.

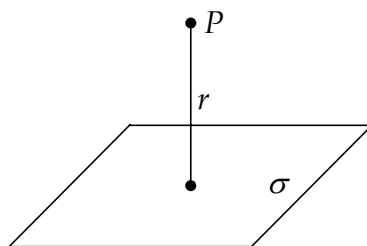


Figura 4.12 - Superfície plana com densidade de carga  $\sigma$ .

Não obstante, além da manipulação abstracta das expressões matemáticas, a verdade é que não foi encontrado um método prático, nem uma interpretação física para descrever o potencial fraccionário.

Inspirado na aproximação recursiva de ordem inteira das funções de transferência de ordem fraccionária apresentadas anteriormente, nesta secção, são desenvolvidos dois métodos numéricos para a implementação do potencial de ordem fraccionária.

Começou-se por se reavaliar o potencial produzido num ponto  $P \equiv (x, y)$  num filamento com comprimento finito  $l$  e carga  $q$  (Figura 4.11 f):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} \ln \left[ \frac{y + \frac{1}{2}l + \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{1}{2}l\right)^2}}{y - \frac{1}{2}l + \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}l\right)^2}} \right] + C, \quad C \in \mathfrak{R} \quad (4.49)$$

É sabido, que para  $x \rightarrow \infty$  temos  $\varphi \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + C$  e, com  $y = 0$ , para  $x \rightarrow 0$

temos  $\varphi \rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C$ . Obviamente, estes casos limite correspondem às equações (4.43) e (4.46) respectivamente, ou seja, para uma carga única e para um filamento infinito. A Figura 4.13 a) ilustra o potencial dado por (4.49) *versus*  $x$  (com  $l = 1$  m e  $y = 0$ ) e, para comparação, os casos limites (4.43) e (4.46) (com  $C = 0$ ).

Nestes gráficos observa-se que a expressão (4.49) varia suavemente entre os dois casos limite [Machado, *et al.*, (2005b)], [Machado, *et al.*, (2005c)], [Machado, *et al.*, (2006a)]. Então, podemos obter uma relação de ordem fraccionária intermédia desde que nos restrinjamos a uma faixa de funcionamento limitada. Por exemplo, para os intervalos  $I_1: 0,1 < x < 0,3$  e  $I_2:$

$0,2 < x < 0,8$  obtemos, respectivamente as aproximações  $\varphi_1 \approx 1,385 x^{-0,532}$  e  $\varphi_2 \approx 1,031 x^{-0,747}$  (Figura 4.13 b).

Isto significa que as relações do potencial eléctrico padrão de ordem inteira possuem uma natureza *global*, enquanto que o potencial eléctrico de ordem fraccionária possui uma natureza *local*, apenas possível de capturar numa região restrita. Esta conclusão conduz a uma aproximação, de implementação conceptual semelhante à descrita na secção 4.3.1, onde o esquema de aproximação é baseado na colocação recursiva de funções de ordem inteira. No entanto, neste trabalho, não aplicamos o formalismo dos diagramas de Bode pelo que, decidiu-se adoptar uma aproximação numérica.

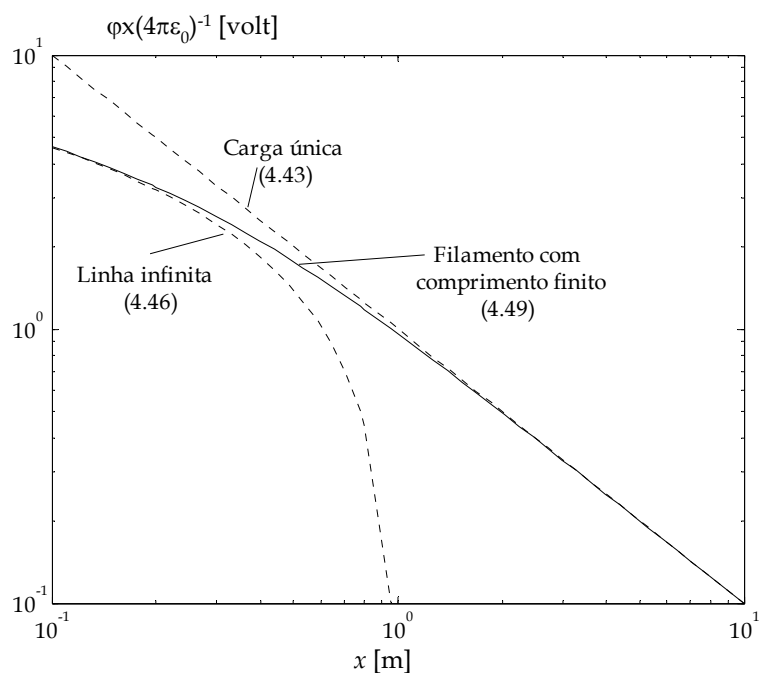
Nesta linha de pensamento, foram desenvolvidos dois algoritmos unidimensionais que colocam recursivamente  $n$  cargas  $q_i$  ( $i = 0, \dots, (n-1)/2$ , se  $n$  for ímpar e  $i = 1, \dots, n/2$  se  $n$  for par) em posições simétricas  $\pm x_i$  (com excepção, para  $x_0 = 0$  o que corresponde ao centro de um conjunto de  $n$  cargas onde existe uma carga única  $q_0$ ), Figura 4.14.

O objectivo deste algoritmos é comparar o potencial aproximado  $\varphi_{app}$ , resultante de um número de cargas e as correspondentes localizações, com o potencial de referência desejado  $\varphi_{ref}$  :

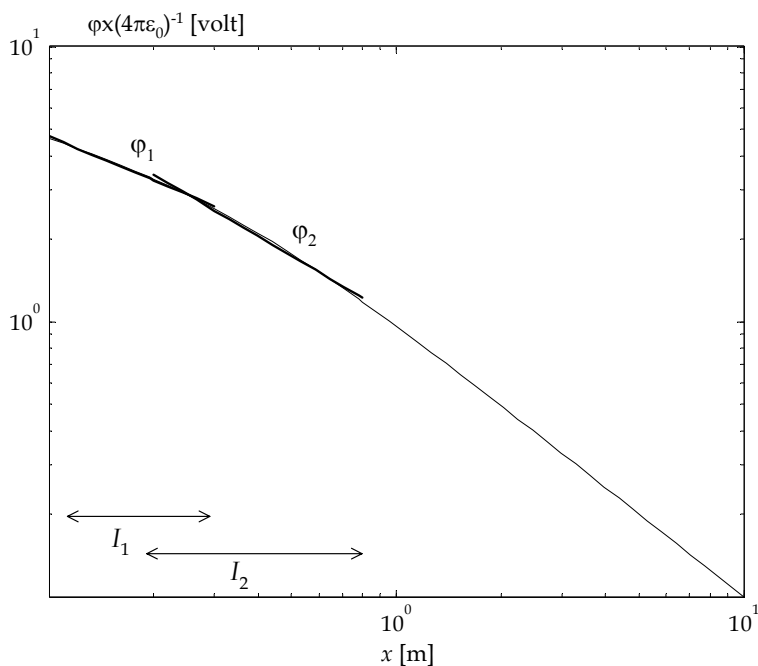
$$\varphi_{app} = \begin{cases} \frac{q_0}{|x|} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x-x_i|} + \frac{1}{|x+x_i|} \right), & n \text{ ímpar} \\ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x-x_i|} + \frac{1}{|x+x_i|} \right), & n \text{ par} \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\varphi_{ref} = kx^\alpha \quad (4.51)$$





a)



b)

Figura 4.13 - Comparação do potencial eléctrico  $\phi$  versus a distancia  $x$  para: a) filamento (4.49) com carga  $q = 1$ , comprimento  $l = 1$  m, para  $y = 0$ , uma única carga (4.43) e uma linha infinita (4.46); b) aproximações para  $I_1$ :  $0,1 < x < 0,3$  [m] e  $I_2$ :  $0,2 < x < 0,8$  [m].

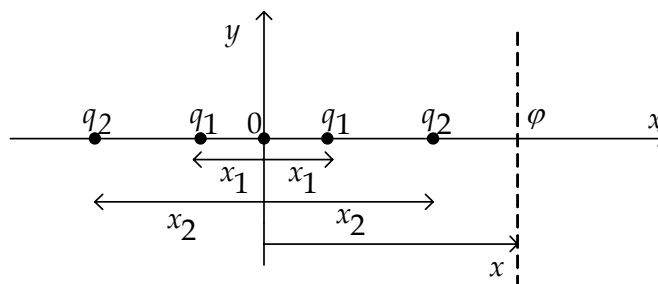


Figura 4.14 - Esquema de posicionamento das cargas.

O critério de otimização minimiza o erro quadrático  $J$  definido por:

$$J = \sum_{k=1}^m \left( \ln \left| \frac{\Phi_{app}}{\Phi_{ref}} \right| \right)^2, \quad \min_i (J), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.52)$$

onde  $m$  é o número de pontos analisados ao longo do eixo dos  $x$ .

É também desenvolvido um terceiro algoritmo, que tem por finalidade estudar o potencial eléctrico resultante de uma distribuição assimétrica de cargas. Nesse caso, o potencial eléctrico é descrito pela seguinte equação:

$$\Phi_{app} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|x - x_i|} \quad (4.53)$$

A função de otimização  $J$  é idêntica à utilizada nos dois casos referidos anteriormente, dados pela equação (4.52).

Baseado nestes princípios, nas subsecções 4.4.1 e 4.4.2 são apresentados três algoritmos, desenvolvidos no âmbito deste trabalho, com vista à implementação de aproximações de ordem fraccionária ao potencial eléctrico. Começa-se por um algoritmo clássico utilizando uma procura sistemática da solução, e prossegue-se com dois outros, aplicando algoritmos genéticos.

### 4.4.1 Algoritmo Numérico Clássico

Neste algoritmo considerou-se uma perspectiva log-log, similar à usada nos diagramas de Bode, mas a sua modificação para o caso lin-lin é directa. Mais ainda, com o objectivo de reduzir a carga computacional do algoritmo, para um intervalo  $x_A < x < x_B$  foi desenvolvido um esquema constituído por duas fases, envolvendo duas razões geométricas  $r_1$  e  $r_2$ , para encontrar os valores óptimos:

- 1) na primeira fase considera-se um incremento “grande” de  $x$ , dado por  $\Delta x = x_A r_1^k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) para capturar o intervalo onde se encontra a solução;
- 2) a segunda fase considera um incremento “pequeno” de  $x$ ,  $\Delta x = x'_A r_2^k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ),  $r_2 < r_1$ , e para o intervalo previamente obtido  $x'_A < x < x'_B$ , avalia os valores óptimos com uma maior precisão.

Por exemplo, na Figura 4.15 ilustra-se uma aproximação com 5 cargas para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ ,  $0,2 < x < 0,8$ , que resulta nas cargas  $q_0 = -0,543$  [C],  $q_1 = +1,193$  [C] e  $q_2 = -0,706$  [C] (com um factor de escala  $\times (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ), localizadas respectivamente em  $x_0 = 0$  [m],  $x_1 = \pm 0,092$  [m] e  $x_2 = \pm 1,644$  [m].

Os resultados evidenciam um bom ajuste entre as duas funções. Não obstante, para uma determinada aplicação, pode ser requerida uma precisão superior e, nesse caso, deve ser aplicado um maior número de cargas. Nesta ordem de ideias, estuda-se de seguida a precisão deste método para um diferente número de cargas  $n$ , nomeadamente para  $n = 1$  até  $n = 7$  cargas.

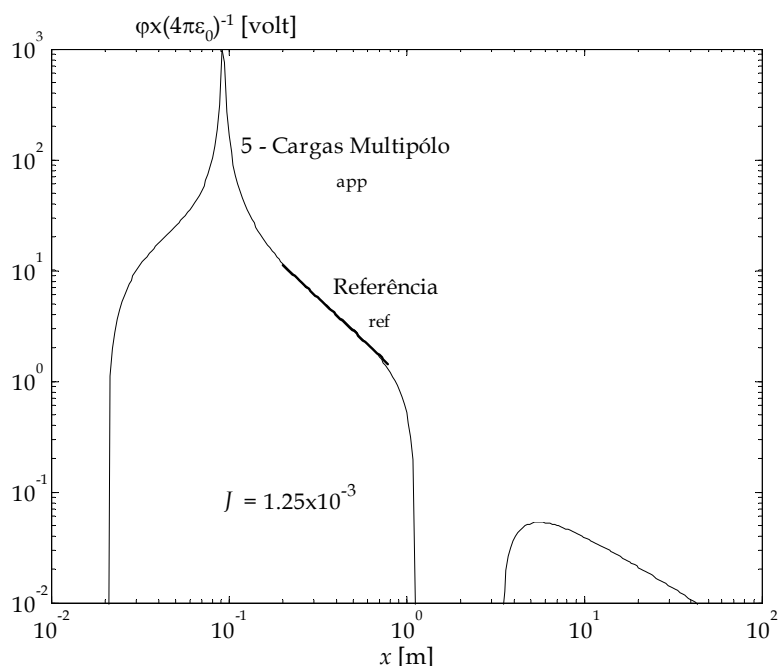


Figura 4.15 - Comparação do potencial eléctrico  $\phi_{app}$  e  $\phi_{ref}$  versus a distância  $x$  para  $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt],  $0,2 < x < 0,8$  [m] e uma aproximação com 5 cargas.

A Figura 4.16 apresenta o erro  $\min(J)$  versus  $n$ , para  $R_1: (r_1, r_2) = (1,3; 1,03)$ ,  $R_2: (r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$  e  $R_3: (r_1; r_2) = (1,5; 1,05)$ . Confirma-se que a precisão aumenta com o aumento do número de cargas e com a diminuição da razão  $r_1$ . Este gráfico pode ser aproximado para cada uma das razões geométricas ( $R_1, R_2, R_3$ ), respectivamente pelas seguintes expressões  $\min(J) \approx 1,740 e^{-1,655n}$ ,  $\min(J) \approx 1,832 e^{-1,492n}$  e  $\min(J) \approx 0,716 e^{-1,205n}$ .

A Tabela 4.2 apresenta os valores obtidos para as cargas e as correspondentes localizações, para  $R_1: (r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$  e  $R_2: (r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$  com  $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  e  $0,2 < x < 0,8$ .

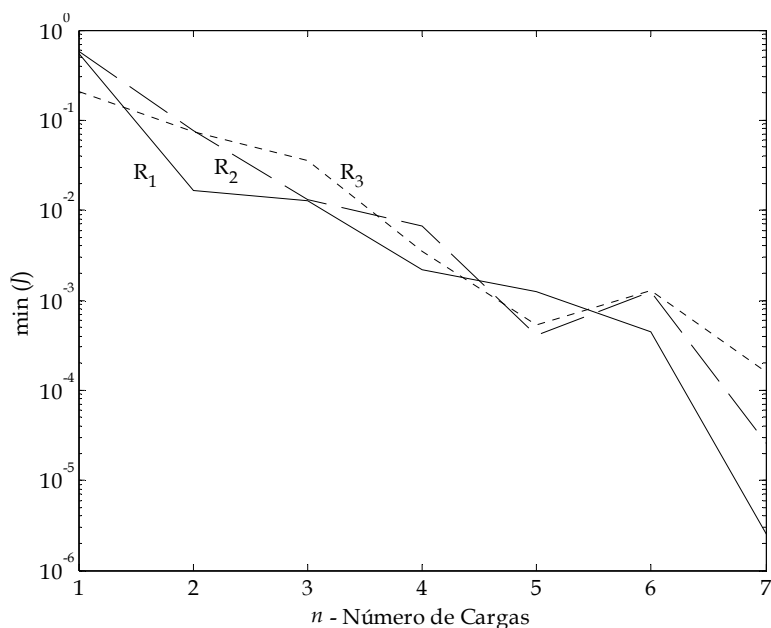


Figura 4.16 - Erro da aproximação  $\min(J)$  versus número de cargas  $n$  para  $R_1: (r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$ ,  $R_2: (r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$  e  $R_3: (r_1; r_2) = (1,5; 1,05)$ ,  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

Verifica-se que a posição das cargas varia significativamente com a precisão do algoritmo, nomeadamente com o incremento  $r_1$  da grelha numérica. Constata-se que o padrão revelado pelo posicionamento das cargas não é claro e a sua comparação com uma estrutura fractal, requer ainda desenvolvimentos futuros.

As experiências efectuadas revelam ainda, que é possível encontrar mais do que uma “boa” solução. Por exemplo, a Figura 4.17 apresenta uma aproximação com 5 cargas, para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ ,  $0,2 < x < 0,8$ , que resultou em  $q_0 = +0,039$  [C],  $q_1 = +0,113$  [C] e  $q_2 = +0,543$  [C] (com um factor de escala  $\times (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ), em  $x_0 = 0$  [m],  $x_1 = \pm 0,155$  [m] e  $x_2 = \pm 0,119$  [m], respectivamente.

Tabela 4.2 - Valores das cargas e respectivas localizações para diferentes números de cargas  $n = \{ 1, \dots, 7 \}$  quando  $R_1: (r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$  e  $R_2: (r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$  com  $\varphi_{\text{ref}} = 1,0 \text{ x}^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

$n$	$R_1: (r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$		$R_2: (r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$	
	$q_i$ [C]	$x_i$ [m]	$q_i$ [C]	$x_i$ [m]
1	1,193	0	1,171	0
2	0,706	$\pm 0,119$	0,837	$\pm 0,084$
3	-0,543	0	-0,305	0
	0,917	$\pm 0,119$	0,837	$\pm 0,117$
4	0,917	$\pm 0,092$	0,837	$\pm 0,117$
	-0,706	$\pm 1,644$	-0,837	$\pm 2,420$
5	-0,543	0	-0,427	0
	1,193	$\pm 0,092$	1,171	$\pm 0,084$
	-0,706	$\pm 1,644$	-0,837	$\pm 1,729$
6	1,193	$\pm 0,092$	1,171	$\pm 0,084$
	-0,190	$\pm 0,119$	-0,111	$\pm 0,117$
	-0,917	$\pm 1,644$	-1,171	$\pm 1,729$
7	1,193	0	1,171	0
	0,418	$\pm 0,119$	0,427	$\pm 0,1171$
	-1,193	$\pm 2,778$	-1,171	$\pm 2,420$
	-0,706	$\pm 3,612$	-0,305	$\pm 2,420$

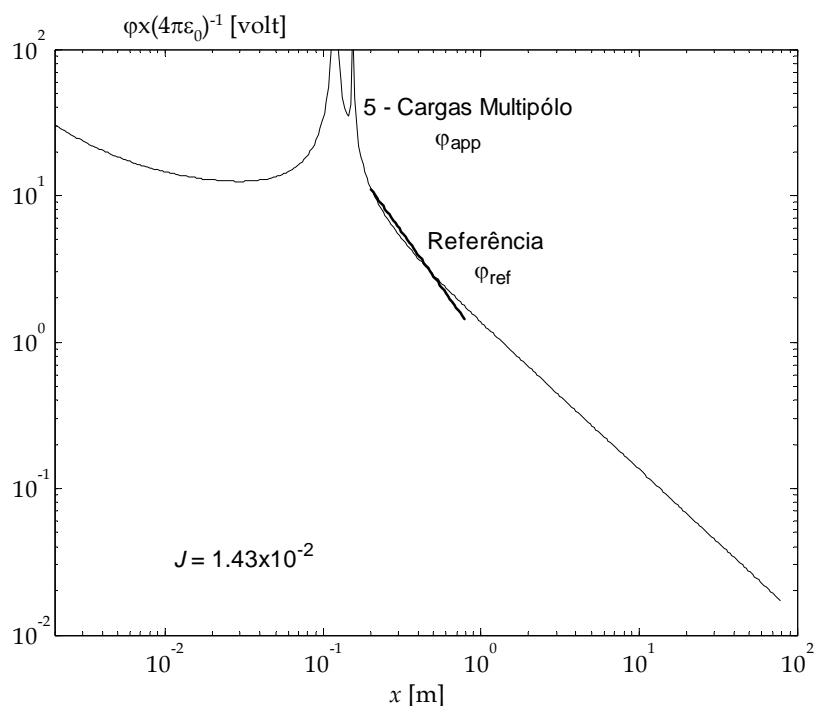
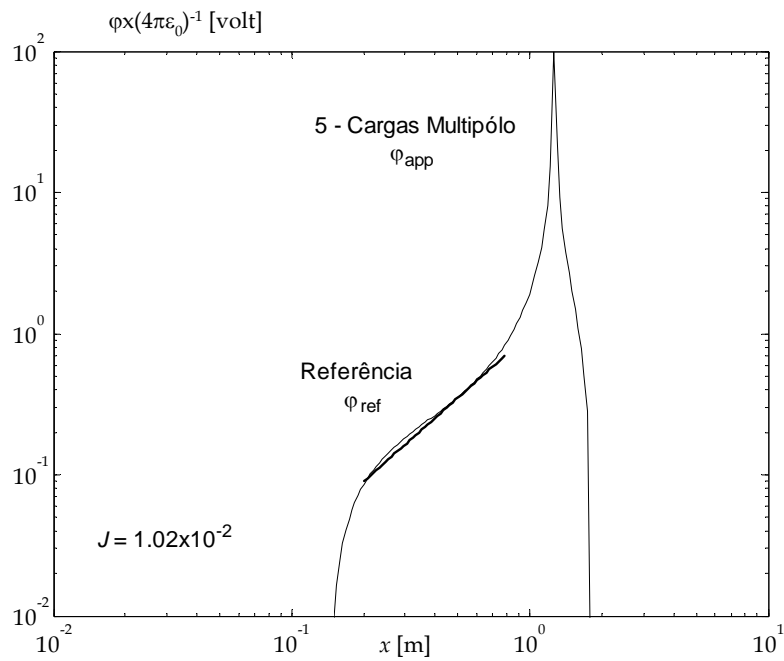


Figura 4.17 - Comparação do potencial eléctrico  $\phi_{app}$  e  $\phi_{ref}$  versus a distância  $x$  para

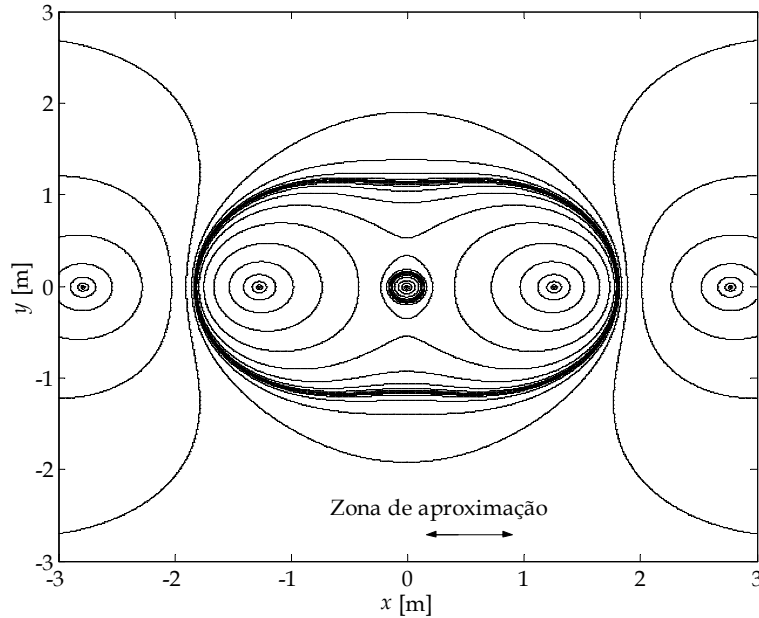
$\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt],  $0,2 < x < 0,8$  [m] e uma aproximação com 5 cargas.

Por outro lado, com este método é também possível obter um potencial de referência com declive positivo. A Figura 4.18a) apresenta uma aproximação com 5 cargas, para  $\phi_{ref} = 1,0 x^{1,5}$ ,  $0,2 < x < 0,8$ , conduzindo a  $q_0 = -0,039$  [C],  $q_1 = +0,706$  [C] e  $q_2 = -1,193$  [C] (com um factor de escala  $\times (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ), respectivamente em  $x_0 = 0$  [m],  $x_1 = \pm 1,265$  [m] e  $x_2 = \pm 2,778$  [m] e a Figura 4.18b) evidencia as linhas de potencial correspondentes.

A Tabela 4.3 possui os valores das cargas e as correspondentes posições, para  $(r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$ ,  $\phi_{ref} = 1,0 x^{1,5}$  e  $0,2 < x < 0,8$ .



a)



b)

Figura 4.18 - a) Comparação do potencial eléctrico  $\phi_{app}$  e  $\phi_{ref}$  versus a distância  $x$  para  $\phi_{ref} = 1,0 x^{1,5}$  [volt],  $0,2 < x < 0,8$  [m] e uma aproximação com 5 cargas, b) linhas de potencial correspondentes.



Tabela 4.3 - Valores das cargas e respectivas localizações para diferentes números de cargas  $n = \{ 1, \dots, 6 \}$  quando  $(r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$ ,  $\phi_{\text{ref}} = 1,0 \times 10^{-5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

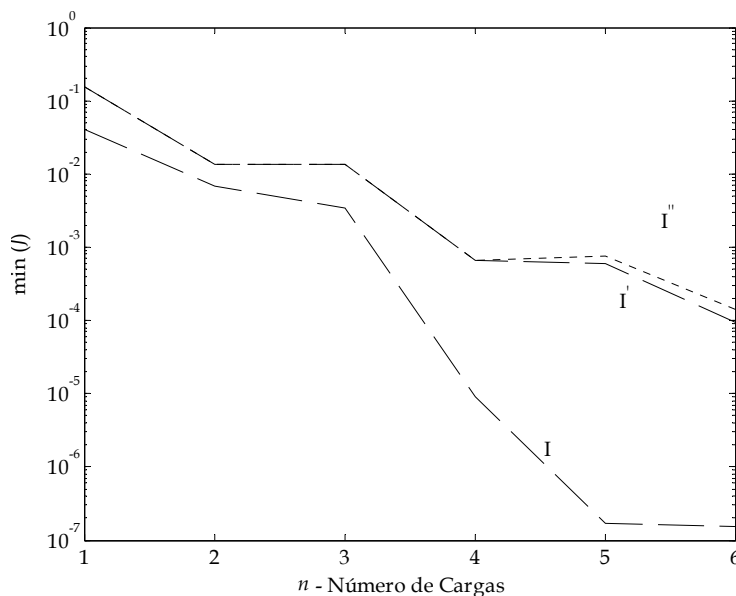
$(r_1; r_2) = (1,3; 1,03)$		
$n$	$q_i$ [C]	$x_i$ [m]
1	0,067	0
2	0,113	$\pm 1,265$
3	- 0,087	0
	0,543	$\pm 2,137$
4	0,418	$\pm 1,265$
	- 1,193	$\pm 4,696$
5	- 0,039	0
	0,706	$\pm 1,265$
	- 1,193	$\pm 2,779$
6	0,917	$\pm 1,265$
	- 1,193	$\pm 2,778$
	- 1,193	$\pm 4,695$

A Figura 4.19a) revela o erro  $\min(J)$  versus  $n$  da aproximação, para diferentes tamanhos do intervalo de aproximação,  $I$ :  $0,5 < x < 1,0$ ,  $I'$ :  $0,5 < x < 1,5$

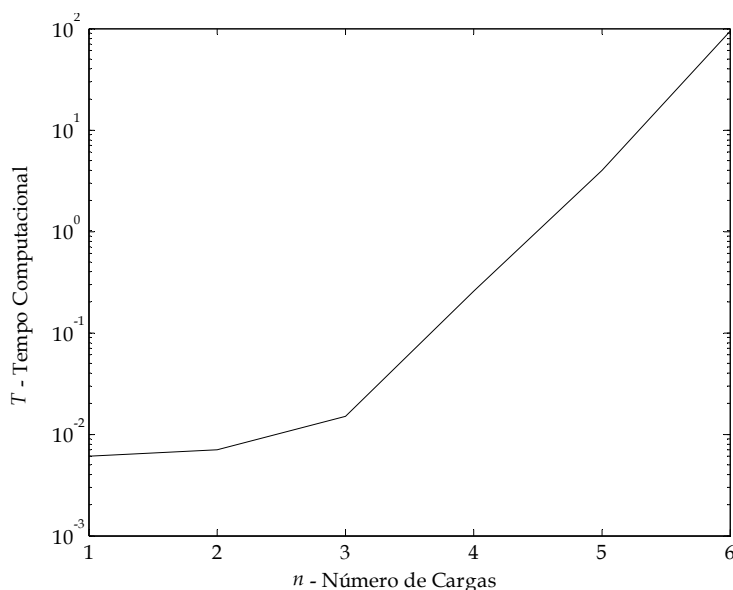
e  $I''$ :  $0,5 < x < 2,0$ ,  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  e  $(r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ . Observa-se que o erro  $\min(J)$  diminui quando se reduz o tamanho do intervalo de aproximação.

O presente algoritmo numérico avalia os possíveis valores para  $x_i$  e  $q_i$ , numa multi-grelha. Assim, para evitar procedimentos computacionais desnecessários foram implementadas várias heurísticas, nomeadamente quando uma determinada iteração excede tentativas anteriores com melhor desempenho. Mesmo assim, o tempo computacional  $T$  aumenta com o número de cargas  $n$  e com o tipo de grelha adoptada. A Figura 4.19b) revela o  $T$  versus  $n$  para  $(r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ ,  $\varphi_{ref} = 1,0x^{-1,5}$  e  $0,2 < x < 0,8$ .

O gráfico revela uma variação exponencial  $T \approx 2,422 \cdot 10^{-6} e^{2,894n}$ , para  $n \geq 3$ . Desta forma, aproximações com um elevado número de cargas requer um maior tempo computacional. Em ordem a minimizar este problema, foi desenvolvido um algoritmo genético apresentado na próxima secção.



a)



b)

Figura 4.19 - a) Erro da aproximação  $\min(J)$  versus número de cargas  $n$  para  $I$ :  $0,5 < x < 1,0$ ,  $I'$ :  $0,5 < x < 1,5$  e  $I''$ :  $0,5 < x < 2,0$ ,  $\varphi_{\text{ref}} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $(r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ ; b) Comparação do tempo computacional  $T$  versus número de cargas  $n$ , para  $(r_1; r_2) = (1,4; 1,04)$ ,  $\varphi_{\text{ref}} = 1,0 x^{-1,5}$  e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

## 4.4.2 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AG) são processos de procura para encontrar soluções aproximadas na optimização de problemas. Os AGs são uma classe particular dos algoritmos evolucionários que usam técnicas inspiradas na biologia evolutiva, tais como hereditariedade, mutação (M), selecção natural e cruzamento (C), (ver definições no Anexo C – Algoritmos Genéticos) estabelecidas pela teoria evolutiva de Darwin's [Goldberg, (1989)], [Michalewicz, (1996)], [Mitchell, (1998)].

A computação evolutiva foi introduzida nos anos 60 por I. Rechenberg, e os AGs foram inventados por John Holland que publicou um livro em 1975 sob este tema.

Outro conceito importante nos AGs é o elitismo que foi introduzido por Kenneth De Jong em 1975. A estratégia elitista (EE), em conjunto com outros métodos de selecção, tem por objectivo forçar o AG a reter um certo número dos melhores indivíduos de cada geração (G). Vários investigadores comprovaram que a EE melhora significativamente o desempenho dos AGs.

Os AGs têm a vantagem de possuírem paralelismo. Estes algoritmos trabalham com um espaço de procura que usa mais indivíduos que outros métodos. No entanto, tem a desvantagem do tempo computacional, que em muitos casos o torna mais lento que outras metodologias.

Refira-se ainda, que para se ter análises seguras do desempenho de um AG, é necessário um certo número de simulações para garantir que os efeitos estocásticos foram devidamente considerados. Neste estudo as experiências consistem na execução do AG, com vista à geração de combinações de posições e de cargas que nos levem a um potencial eléctrico com declive fraccionário semelhante ao potencial de referência desejado [Jesus, *et al.*, (2006)].

Tendo estes conceitos por base, nas próximas duas subsecções são analisados dois casos diferentes. Na subsecção 4.4.2.1 é apresentado o estudo efectuado para uma distribuição simétrica de cargas, e na subsecção 4.4.2.2 o correspondente para uma distribuição assimétrica das cargas.

### 4.4.2.1 Distribuição Simétrica de Cargas

No primeiro estudo efectuado, os valores para os parâmetros do AG são: número de elementos da população  $P = 40$ , taxa de cruzamento  $C(\%) = 85\%$ , taxa de mutação  $M(\%) = 1,0\%$ , estratégia elitista  $EE(\%) = 10,0\%$  e o número máximo de iterações  $I_{\text{máx}} = 100$ . A função de optimização corresponde à minimização do erro quadrático  $J$ , dado pela equação (4.52).

No caso presente considerou-se igualmente uma perspectiva log-log, similar à usada nos diagramas de Bode e na secção anterior.

Por exemplo, a Figura 4.20 apresenta duas aproximações com um número de cargas pré-definido e igual a 5 e um  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ ,  $0,2 < x < 0,8$ , conduzindo no caso A às cargas:  $q_{0A} = -0,489$  [C],  $q_{1A} = +0,920$  [C] e  $q_{2A} = -0,077$  [C] (com um factor de escala  $\times (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ), localizadas respectivamente em  $x_{0A} = 0$  [m],  $x_{1A} = \pm 0,147$  [m] e  $x_{2A} = \pm 0,185$  [m], e no caso B:  $q_{0B} = +0,280$  [C],  $q_{1B} = +0,161$  [C] e  $q_{2B} = +0,361$  [C] (com um factor de escala  $\times (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ), respectivamente em  $x_{0B} = 0$  [m],  $x_{1B} = \pm 0,103$  [m] e  $x_{2B} = \pm 0,159$  [m]. No caso A o AG necessitou de  $I_A = 32$  iterações para satisfazer a função de aptidão e no caso B o AG necessitou de  $I_B = 36$  iterações. A Figura 4.21 ilustra as linhas de campo correspondentes à Figura 4.20.

Os resultados revelam um bom ajuste entre as duas funções. Além disso, verifica-se que é possível encontrar mais do que uma “boa solução”. Não obstante, e tal como no algoritmo anterior, constata-se que para determinada aplicação, pode ser requerida uma precisão superior e, nesse caso, deve ser aplicado um maior número de cargas. Nesta linha de pensamento, e para se poder comparar os dois algoritmos (subsecções 4.4.1 e 4.4.2.1), estuda-se a precisão do método para diferentes números de cargas, nomeadamente desde  $n = 1$  até  $n = 10$  cargas, e compara-se o número de iterações necessárias para atingir a solução, quando o número de cargas aumenta.

A Figura 4.22 mostra os erros mínimo, médio e máximo de  $J$  versus  $n$ , para alcançar uma solução válida. Este gráfico confirma que se obtém uma maior precisão através do aumento do número de cargas. Verifica-se ainda, que a posição das cargas varia significativamente com o número total de cargas

usado no algoritmo como, aliás, já se tinha verificado no algoritmo da secção anterior.

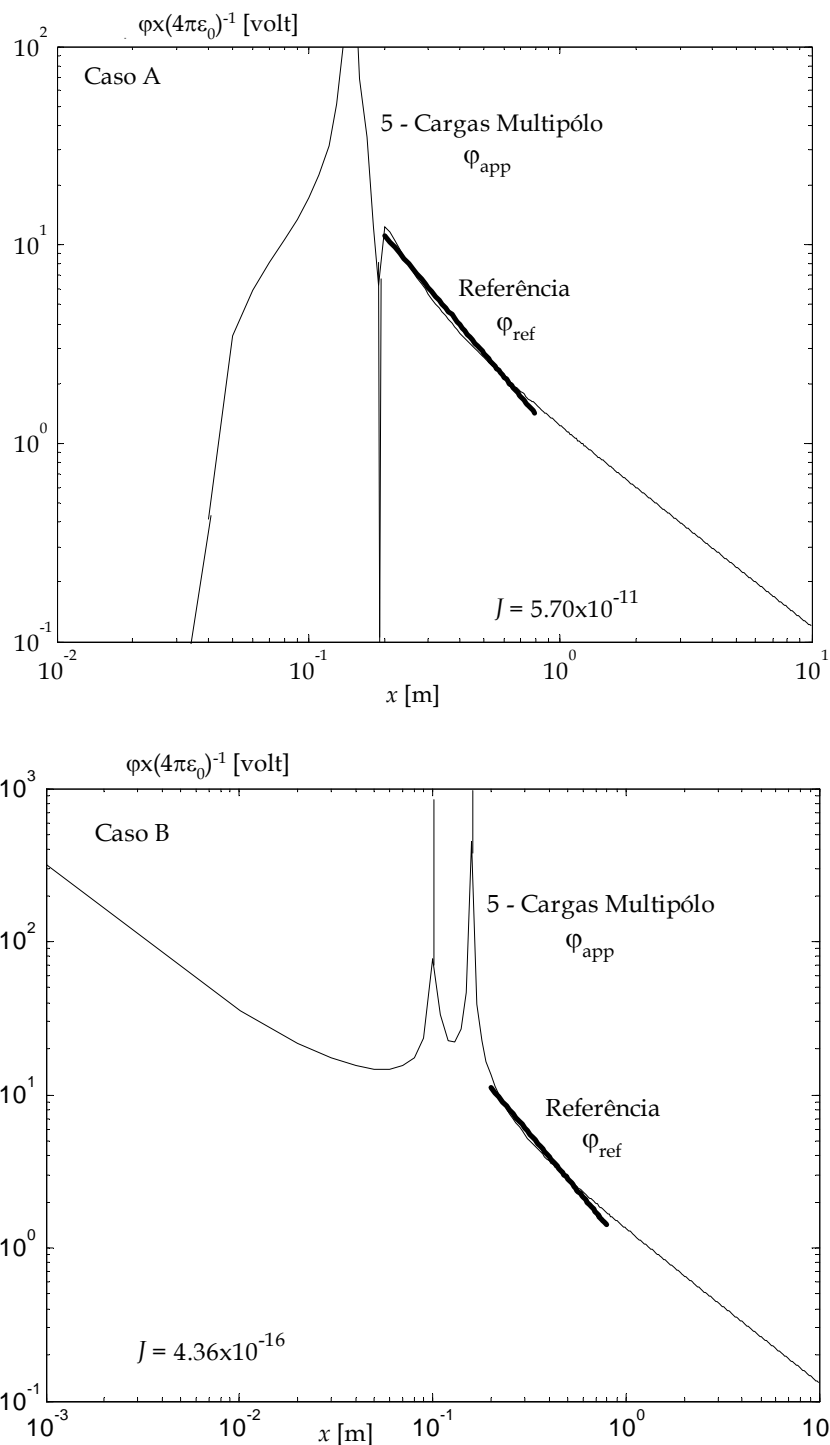


Figura 4.20 - Comparação do potencial eléctrico  $\phi_{app}$  e  $\phi_{ref}$  versus a distância  $x$  para  $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt],  $0,2 < x < 0,8$  [m] e uma aproximação com 5 cargas - Caso A e Caso B.

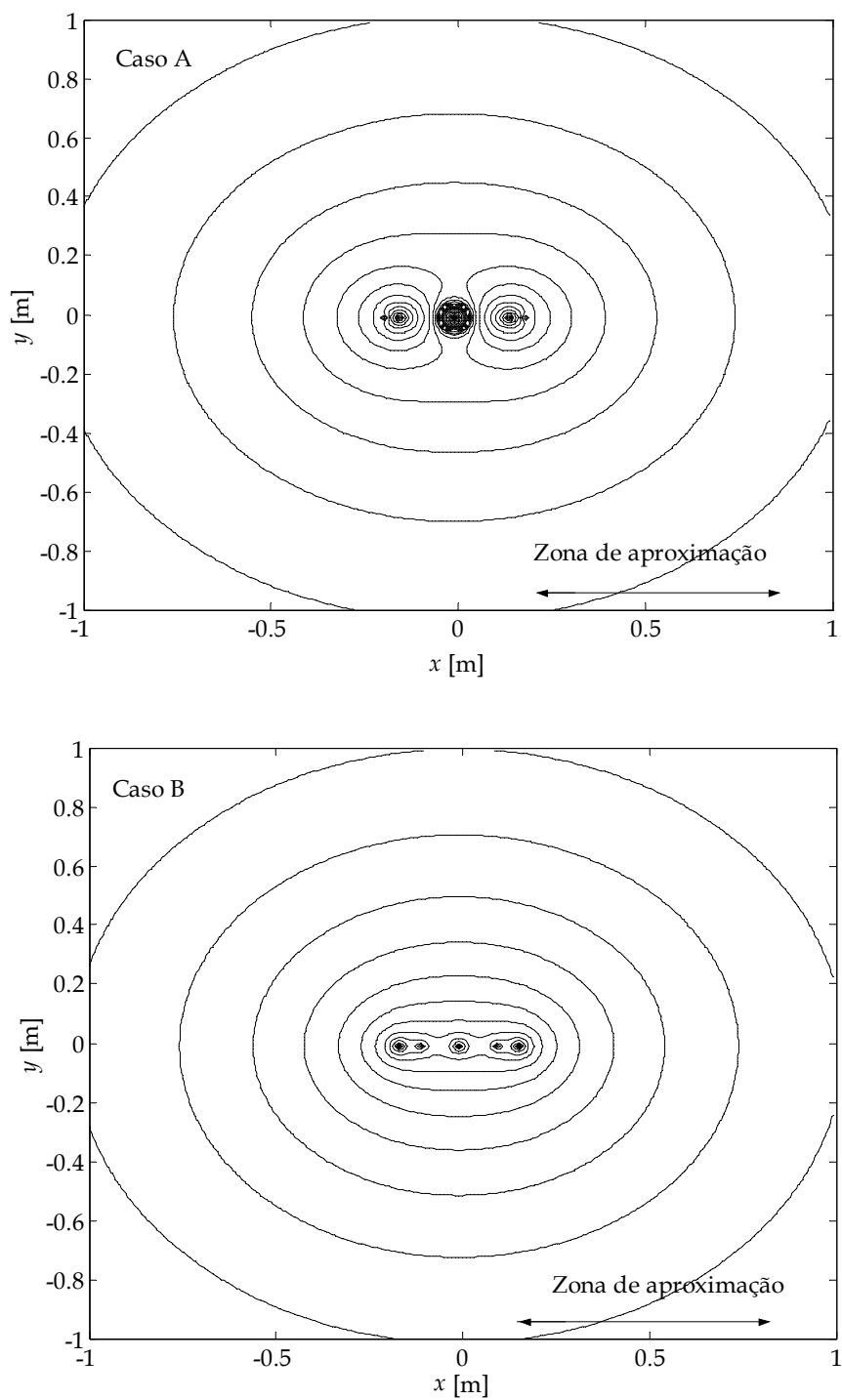


Figura 4.21 - Linhas de campo correspondentes à Figura 4.20 (respectivamente Caso A e Caso B).

A Figura 4.23 ilustra a posição e a grandeza das cargas (representadas por círculos com tamanhos proporcionais) para o melhor caso (menor erro), e para  $n$  a variar entre  $n = 1$  e  $n = 10$ . Verifica-se que as cargas *versus* o padrão da sua localização não é claro, pelo que a sua comparação com estruturas fractais ou com planos recursivos não é directo.

A Figura 4.24 ilustra os números mínimo, médio e máximo de iterações  $I$  requeridas pelo AG *versus*  $n$ . Este gráfico revela claramente a necessidade de um maior número de iterações quando o número de cargas aumenta. Mais ainda, para o caso de uma carga única, constata-se a impossibilidade de se obter um bom ajuste entre  $\varphi_{app}$  e  $\varphi_{ref}$ , pelo que neste caso o número de iterações corresponde ao  $I_{máx}$ .

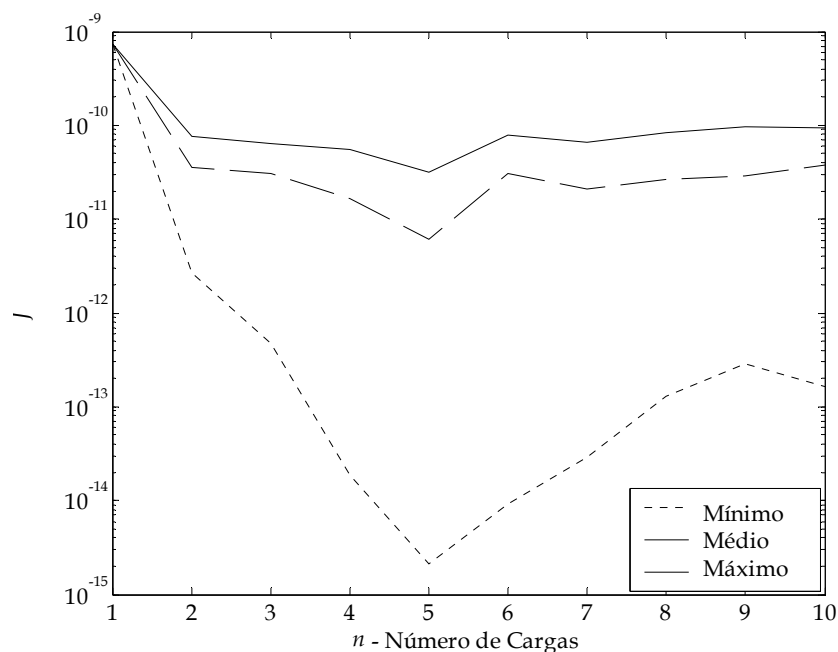


Figura 4.22 - Erro mínimo, médio e máximo da aproximação  $\min(J)$  *versus* o número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].



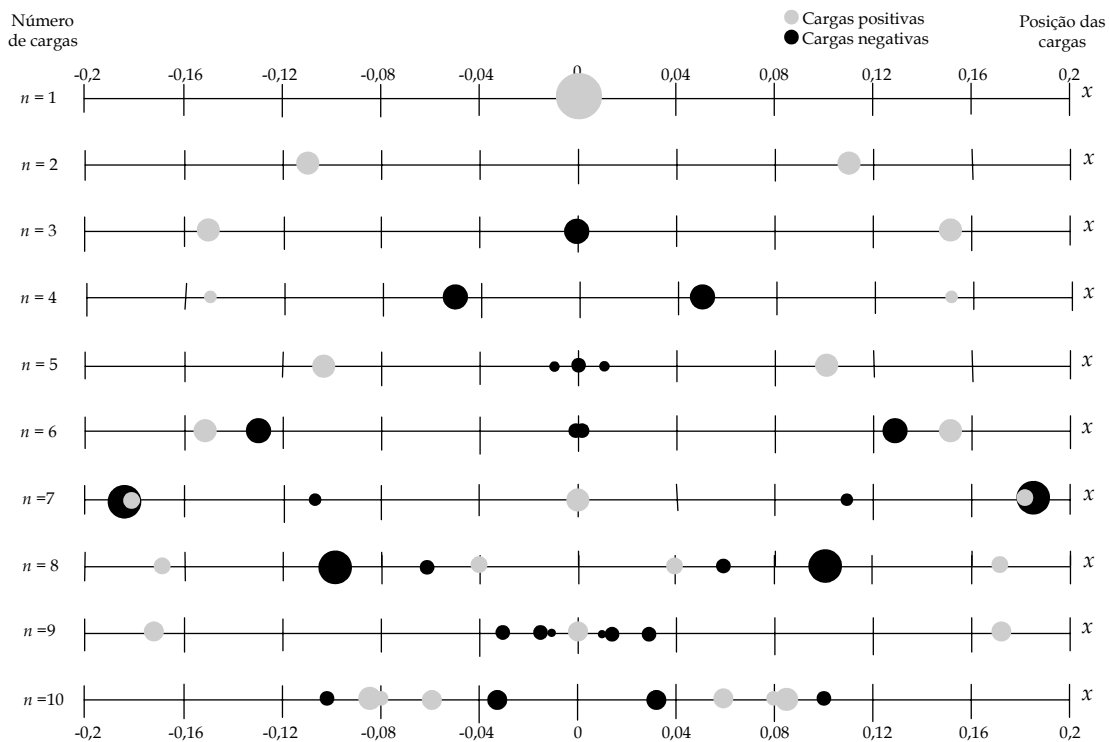


Figura 4.23 - Localização  $x_i$  e grandeza das cargas  $q_i$  para um número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ ,  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m], e para o melhor caso.

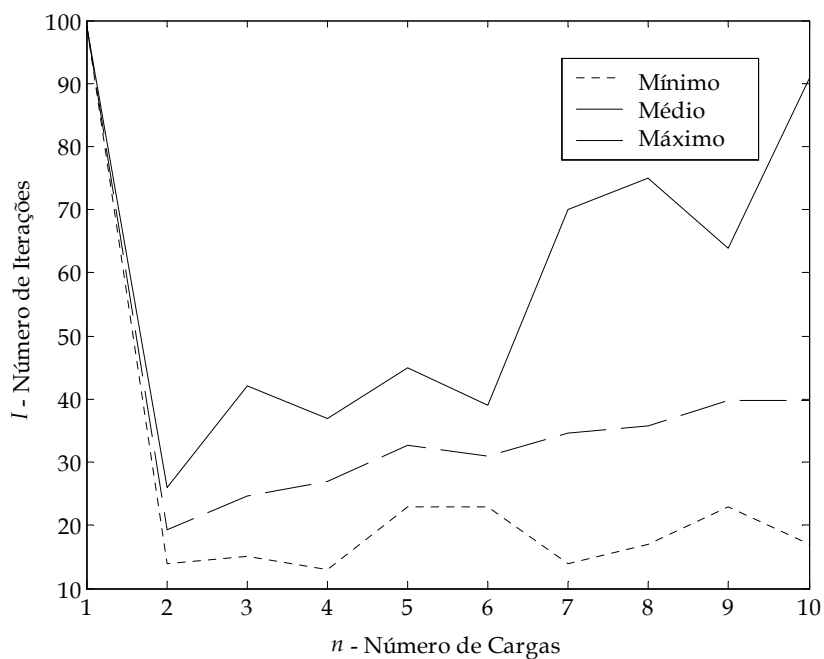


Figura 4.24 - Número de iterações ( $I$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

Com o objectivo de avaliar o tempo computacional ( $T$ ) para diferentes números de cargas, testou-se o esquema baseado no AG para idênticas condições em todos os casos, nomeadamente uma população  $P = 40$ , uma taxa de cruzamento  $C(\%) = 85\%$ , uma taxa de mutação  $M(\%) = 1,0\%$ , uma estratégia elitista  $EE(\%) = 10,0\%$ , um número máximo de iterações  $I_{\text{máx}} = 100$  e uma função de aptidão  $J$  dada por (4.52). A Figura 4.25 ilustra os tempos mínimo, médio e máximo *versus*  $n$ . Este gráfico confirma a conclusão anterior, que traduz a necessidade de um maior valor de  $I$  quando o número de cargas aumenta, e conseqüentemente um incremento do tempo de computação  $T$ .

Quando se compara os resultados obtidos com o AG e o algoritmo numérico descrito na secção anterior, onde se adopta uma grelha numérica sequencial que testa todos os valores possíveis, verifica-se uma diminuição do

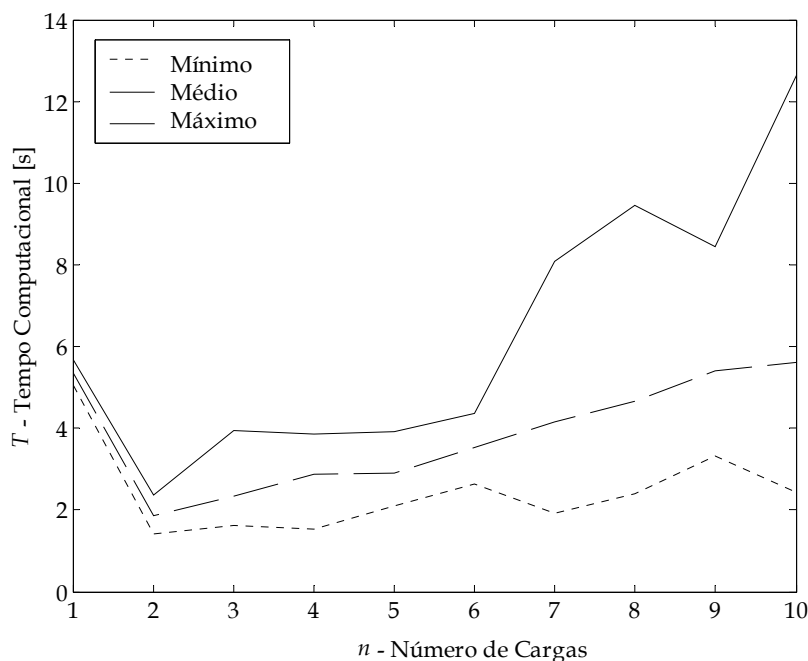


Figura 4.25 - Tempo computacional ( $T$ ) *versus* número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\phi_{\text{ref}} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

erro da aproximação para todos os  $n$ , mas um maior valor de  $T$  para  $n \leq 5$ . Para  $n \geq 6$  o AG é francamente melhor do que o algoritmo numérico descrito na subsecção 4.4.1, tanto na perspectiva do  $J$  como de  $T$ . O AG revela, assim, um bom compromisso entre  $T$  e o erro  $\min(J)$ .

### 4.4.2.2 Distribuição Assimétrica de Cargas

Nesta subsecção os valores para os parâmetros do AG são idênticos aos utilizados na subsecção anterior, ou seja,  $P = 40$ ,  $C(\%) = 85\%$ ,  $M(\%) = 1,0\%$ ,  $ES(\%) = 10,0\%$  e  $I = 100$ . O estudo é similar ao desenvolvido na subsecção anterior, nomeadamente a determinação do erro  $J$  (dado pela equação (4.52)), o número de iterações  $I$  requerido e o tempo computacional  $T$  necessário para calcular o potencial eléctrico  $\varphi$  versus o número de cargas  $n$ .

A Figura 4.26 ilustra uma aproximação com um número pré-definido de 5 cargas, um  $\varphi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$ , para  $0,2 < x < 0,8$ , conduzindo a  $q_1 = +0,880$  [C],  $q_2 = +0,283$  [C],  $q_3 = +0,154$  [C],  $q_4 = -0,823$  [C] e  $q_5 = +0,333$  [C] (com um factor de escala  $\times (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ), em  $x_1 = -0,130$  [m],  $x_2 = -0,106$  [m],  $x_3 = +0,010$  [m],  $x_4 = +0,025$  [m] e  $x_5 = +0,055$  [m], respectivamente. Neste caso o AG necessitou de 52 iterações para satisfazer a função de aptidão.

Os resultados obtidos revelam um bom ajuste entre  $\varphi_{app}$  e  $\varphi_{ref}$ . Mais uma vez, encontrou-se a possibilidade de existir mais do que uma boa solução. Tendo em vista analisar a precisão do método numérico, estudou-se o número de iterações  $I$  necessárias, o erro  $J$  da aproximação e os tempos computacionais  $T$  mínimo, médio e máximo, quando o número de cargas varia entre  $n = 1$  e  $n = 10$ .

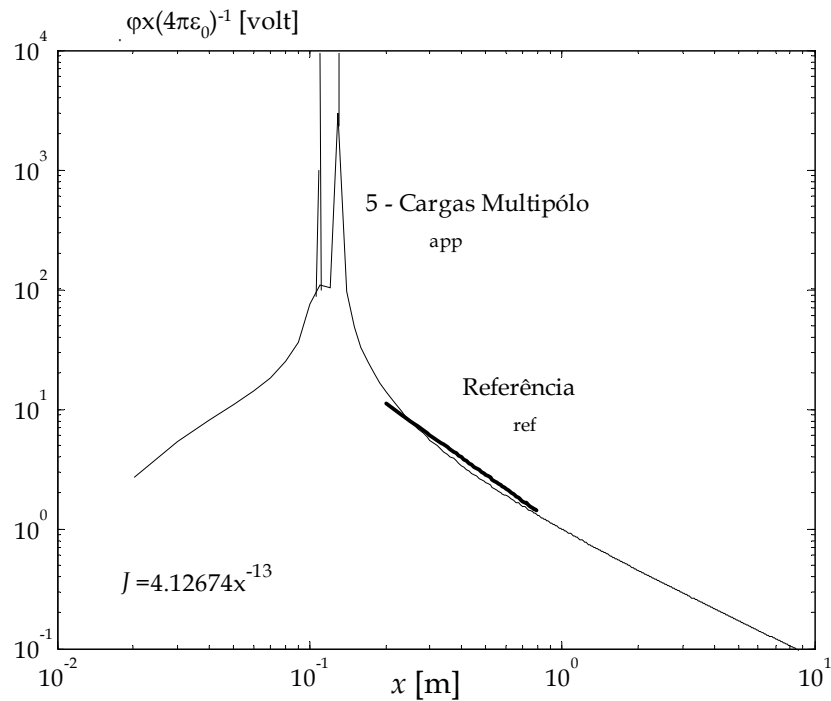


Figura 4.26 - Comparação do potencial eléctrico  $\phi_{app}$  e  $\phi_{ref}$  versus a distância  $x$  para  $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt],  $0,2 < x < 0,8$  [m] e uma aproximação com 5 cargas.

A Figura 4.27 ilustra os erros mínimo, médio e máximo de  $J$  versus  $n$  para alcançar uma solução válida. O valor médio de  $J$  confirma a obtenção de uma melhor precisão quando se aumenta o número de cargas. Uma vez mais, as cargas  $q_i$  versus posições  $x_i$ , Figura 4.27, não parecem convergir para um padrão claro.

As figuras 4.29 e 4.30 ilustram respectivamente os números mínimo, médio e máximo de iterações  $I$  e do tempo computacional  $T$  versus  $n$ .

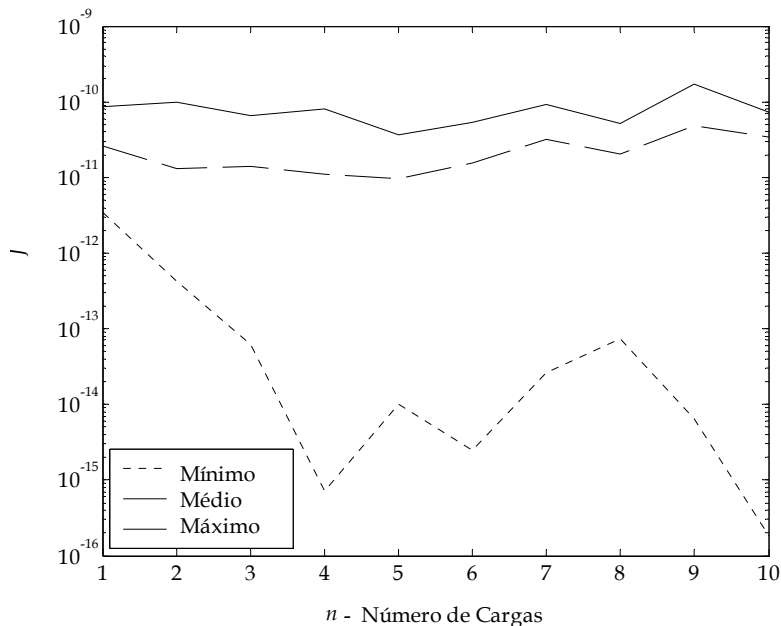


Figura 4.27 - Erro mínimo, médio e máximo da aproximação min ( $J$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\phi_{ref} = 1,0 \times 10^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

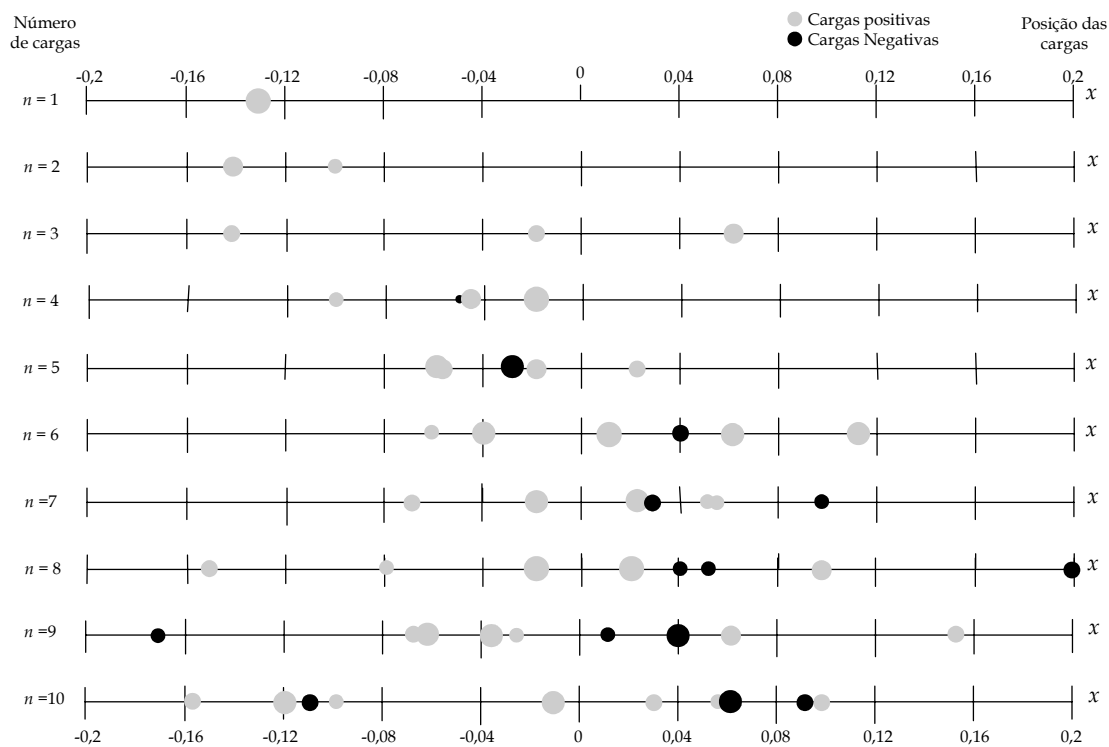


Figura 4.28 - Localização  $x_i$  e grandeza das cargas  $q_i$  para um número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ ,  $\phi_{ref} = 1,0 \times 10^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m], e para o melhor caso.

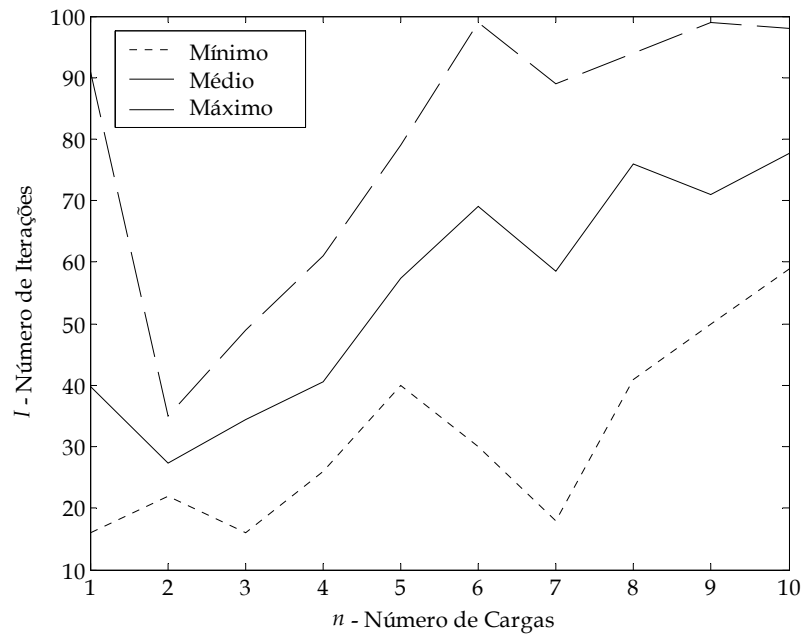


Figura 4.29 - Número de iterações ( $I$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

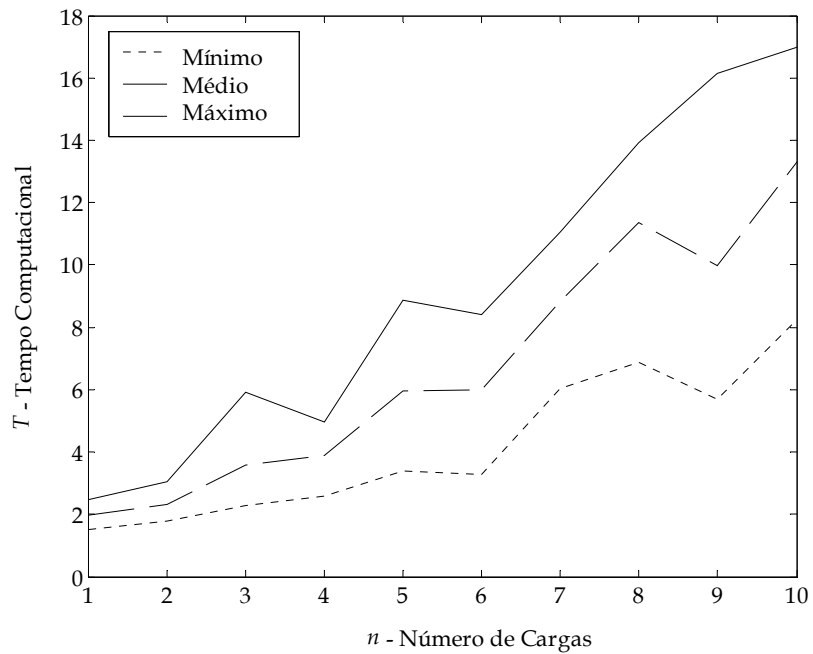


Figura 4.30 - Tempo computacional ( $T$ ) versus número de cargas  $n$ ,  $n = \{1, \dots, 10\}$ , para  $\phi_{ref} = 1,0 x^{-1,5}$  [volt] e  $0,2 < x < 0,8$  [m].

Quando se comparam estes resultados com os obtidos na subsecção anterior, verifica-se a obtenção de um menor erro  $J$  na aproximação, mas um tempo computacional  $T$  maior, para todos os valores de  $n$ . O número de iterações  $I$  aumenta significativamente quando o AG distribui as cargas assimetricamente devido à necessidade de optimização de um maior número de parâmetros.

## **4.5 Conclusões**

O electromagnetismo clássico e as equações de Maxwell, envolvendo derivadas de ordem inteira, conduz a modelos que exigem uma interpretação complementar numa perspectiva do cálculo fraccionário. Um aspecto que mereceu interesse, no que diz respeito ao EP e às CE, foi a obtenção de modelos de ordem fraccionária igual a 0,5. Resultados recentes levam-nos a admitir que esta fraccionalidade é devida à geometria particular dos problemas abordados. Desta forma, a análise de diferentes geometrias dos condutores e as suas relações com os valores distintos dos modelo de ordem fraccionária, constituem um assunto a ser desenvolvido num futuro próximo.

Neste capítulo endereçou-se também o problema da implementação do potencial eléctrico de ordem fraccionária. Foram adoptados algoritmos inspirados no diagrama de Bode, segundo um esquema recursivo de colocação de pólos e zeros no domínio das frequências. Enquanto que nos diagramas de Bode, tanto as aproximações numérica como a analítica são possíveis, nos casos implementados, apenas foram desenvolvidas avaliações numéricas, estando o estudo analítico a ser investigado.

Verificou-se, através dos resultados obtidos, a necessidade de um maior número de iterações quando o número de cargas aumenta, e conseqüentemente um maior tempo computacional.

Mais ainda, pela análise dos gráficos e dos valores obtidos, verificou-se não ser possível definir um padrão ou obter-se uma similaridade com estruturas fractais sendo necessário, para isso, realizar mais experiências com um maior número de cargas. No entanto, no caso do algoritmo numérico clássico, o tempo computacional é de tal ordem elevado, ultrapassando mesmo as 720 horas num PC convencional (para  $n > 8$ ), o que o torna inoportável.

Quando se compara os resultados obtidos através do algoritmo numérico clássico e do AG, verifica-se uma diminuição do erro da aproximação para todos os  $n$ , e, progressivamente uma maior eficiência computacional do AG à medida que se aumenta  $n$ .

Foram comparadas as distribuições de cargas obtidas através do AG. Verificou-se que, quando a distribuição de cargas é assimétrica (poderá dizer-se, livre), o erro da aproximação é menor, mas, devido ao maior número de variáveis envolvidas (poderá dizer-se, graus de liberdade), o número de iterações requerido para encontrar uma solução é superior.

No entanto, o AG revela para o caso em estudo, um bom compromisso entre o valor de  $T$  e o erro  $\min(J)$ , para todas as cargas.

Na realidade, o estudo do potencial eléctrico sob o ponto de vista do cálculo fraccionário, constitui o primeiro passo para o desenvolvimento sistemático desta técnica e, por conseguinte, vários outros aspectos devem ser avaliados.

Pesquisas para analisar as aproximações, a sua convergência, a variação do erro com o intervalo de  $x$  e com o número de cargas  $n$ , bem como a melhoria



dos algoritmos quando adoptamos uma extensa biblioteca de primitivas em vez de, somente, cargas pontuais, e a sua extensão para o espaço tridimensional poderão ser desenvolvidos.

## Referências

---

- Abramowitz Milton, Irene A. Stegun. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Pub. Inc., New York.
- Aubourg M., S. Mengue, (1998). *Singularités du Champ Électromagnétique*. Proceedings of the Action thématique. “Les systèmes à dérivées non entières: théorie et applications” Bordeaux, France.
- Balanis Constantine A. (1989). *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Inc..
- Benchellal A., S. Bachir, T. Poinot, J.-C. Trigeassou. (2004). *Identification of a Non-Integer Model of Induction Machines*. 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application, Bordeaux, França.
- Bessonov L. (1968). *Applied Electricity for Engineers*. MIR Publishers, Moscow.
- Canat Sylvain, Jean Faucher (2003). *Fractionnal Order: Frequential Parametric Identification of the Skin Effect in the Rotor Bar of Squirrel Cage Induction Machine*. ASME 2003 Design Engineering Technical Conf. and Computers and Information in Engineering Conf., Chicago, Illinois, USA.
- Casalbuoni Sara, Desy Hamburg. (2005). *Electrodynamics of Superconductors and Superconducting Cavities*. 6th Scenet school on superconducting materials and applications. Finlândia.

Engheta N., (1996). On Fractional Calculus and Fractional Multipoles in Electromagnetism. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. **44**, no. 4, pp. 554-566.

Engheta N., (2000). *Fractional Paradigm in Electromagnetic Theory*. Frontiers in Electromagnetics, D. H. Werner and R. Mittra (eds.), IEEE Press, capítulo 12, pp. 523-552.

Feynman Richard P., Robert B. Leighton, Matthew Sands (1964). *The Feynman Lectures on Physics: Mainly Electromagnetism and Matter*. Addison-Wesley Pub. Company.

Goldberg D. E., (1989). *Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning*. Ed. Addison-Wesley.

Jesus Isabel S., J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha (2006). *Application of Genetic Algorithms to the Implementation of Fractional Electromagnetic Potentials*. ECT 2006 - The Fifth International Conference on Engineering Computational Technology, Las Palmas de Gran Canaria, Espanha.

Kip Arthur F. (1969). *Fundamentals of electricity and magnetism*. McGraw-Hill, second edition.

Küpfmüller K., Einführung (1939). *Theoretische Elektrotechnik*. Springer-Verlag, Berlin.

Machado J. A. Tenreiro, Isabel S. Jesus. (2004). A Suggestion from the Past?. *FCAA - Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. **7**, no. 4, pp. 403-407.

Machado J. T., Isabel Jesus, Alexandra Galhano, Albert W. Malpica, Fernando Silva, József K. Tar. (2005a). *Fractional Order Dynamics In Classical*

*Electromagnetic Phenomena*. Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference - ENOC 2005, pp. 1322-1326, Eindhoven.

Machado J. T., Isabel Jesus, Alexandra Galhano, (2005b). *A Fractional Calculus Perspective in Electromagnetics*. ASME - Int. Design Engineering Technical Conf. & Computers and Information in Engineering Conference - 5th Int. Conf. on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics and Control, pp. DETC2005-84862, U.S.A.

Machado J. T., Isabel Jesus, Alexandra Galhano (2005c). *Electric Fractional Order Potential*. ISEF 2005 - XII International Symposium on Electromagnetics Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, pp. ISEF'2005-EE-1.4, Baiona, Espanha.

Machado J. T., Isabel Jesus, Alexandra Galhano, J. Boaventura Cunha, (2006a). Fractional Order Electromagnetics. *Journal of Signal Processing (EURASIP/Elsevier)*, Special Issue on Fractional Calculus Applications in Signals and Systems, vol. **86**, no. 10, pág. 2637-2644.

Machado J. T., Isabel Jesus, Alexandra Galhano, J. Boaventura Cunha, József K. Tar, (2006b). *Electrical Skin Phenomena: A Fractional Calculus Analysis*", *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Ed. Springer.

Malpica Albert W., J. Fernando Silva, J. Tenreiro Machado, M. T. Correia de Barros. (2004). *Fractional Order Calculus on the Estimation of Short-Circuit Impedance of Power Transformers*. 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application, França.

Mehaute A. L., R. R. Nigmatullin, L. Nivanen, (1998). *Fleches du temps et Geometrie Fractale*, Editions Hermes.

Melchior P., B. Orsoni, A. Oustaloup, (2001). *Weyl Fractional Potential in Path Planning*. Proceedings of the Sixth IEEE ECC'2001, Porto, Portugal.

Melchior P., B. Orsoni, O. Laviolle, A. Poty, A. Oustaloup, (2003). Consideration of Obstacle Danger Level in Path Planning Using A\* and Fast-Marching Optimisation: Comparative Study. *Signal Processing*, vol. **83**, no. 11, pp. 2387-2396.

Michalewicz Z., (1996). *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag.

Mitchell Melanie, (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press.

Nigmatullin R. R. , R. M. Hill, L. A. Dissado, (1991). Invariant behavior classes for the response of simple fractal circuits. *Journal of Phys.* vol. **C** no. 3, pp. 9773 – 9790.

Nigmatullin R. R., A. L. Mehaute, (2004). The geometrical and physical meaning of the fractional integral with complex exponent. *International Journal of Science Georesources*, vol. **1**, no.8, pp. 2-9.

Nigmatullin R. R., (2005). Theory of dielectric relaxation in non-crystalline solids: From a set of micromotions to the averaged collective motion in the mesoscale region. *Journal of Physica*, vol. **B**, no. 358, pp. 201-215.

Oustaloup A., (1991). *La Commande CRONE: Commande Robuste d'Ordre Non Entier*. Editions Hermes, Paris.

Oustaloup A, (1995). *La Dérivation Non Entier: Théorie, Synthèse et Applications*. Editions Hermes, Paris.

Paris D. T., F. K. Hurd, (1969). *Basic Electromagnetics Theory*. McGraw-Hill, New York.

Podobedoc Boris, (2003). *National Synchrotron Light Source Brookhaven National Lab*. Workshop on Superconducting Undulators and Wigglers. França.

Yen Chu-Sun, Zvonko Fazarinc, Richard L. Wheeler (1982). Time-domain Skin-Effect model for Transient Analysis of Lossy Transmission Lines. *Proceedings of the IEEE*, vol. **70**, no. 7, pp. 750–757.

# Capítulo 5

---

## IMPEDÂNCIAS FRACCIONÁRIAS

Os circuitos eléctricos de ordem fraccionária suscitaram um súbito interesse nos últimos anos [Bohannan, (2002b)], [Machado e Jesus, (2004)], [Jesus, *et al.*, (2006a)], [Jesus, *et al.*, (2006b)]. As impedâncias que formam os circuitos eléctricos são constituídas por resistências, inductâncias e capacidades. Estes últimos, os condensadores, são elementos cruciais em circuitos integrados, sendo usados em muitos sistemas electrónicos, tais como nos retentores (*sample and hold*), em osciladores de rádio - frequência e em misturadores [Samavati, *et al.*, (1998)], [Jonscher, (1993)], [Bohannan, (2002a)], [Westerlund, (1994)], [Mehaute, Crepy, (1983)], [Ahmad, *et al.*, (2001)], [Zorpette, (2005)]. No entanto, os materiais dieléctricos exibem um comportamento fraccionário, revelando impedâncias do tipo  $1/[(j\omega C_F)^\alpha]$ , com  $\alpha \in \mathfrak{R}^+$  [Carlson, Halijak (1963)], [Roy, (1967)], [Sluyters-Rehbach, (1994)], [Bohannan, (2002b)].

O método sinusoidal de medição de impedâncias é usado extensamente em muitas áreas da electroquímica como, por exemplo, em eléctrodos, em baterias, na corrosão ou na bioelectroquímica, entre muitos outros [Mahon, *et*

*al.*, (2000)], [Niu, Lee, (2000)], [Awayda, *et al.*, (1999)], [Ferrigno, Girault, (2000)], [Bisquert, Garcia-Belmonte, (1997)], [Vinogradov, *et al.*, (2004)], [Martinsen, *et al.*, (2002)]. Se a medida da impedância em função da frequência é devida a uma perturbação de tensão do tipo sinusoidal directamente aplicada, designa-se de espectroscópio de impedância electroquímica.

Por outro lado, a caracterização de sistemas electroquímicos através do espectro da impedância requer a interpretação dos dados com a ajuda de modelos [Sluyters-Rehbach, (1994)], [Benavente, *et al.*, (2000)]. Um modelo recorre aos dados experimentais para estimar adequadamente os parâmetros que não só os descrevem mas também podem ser usados para prever o comportamento do sistema sob determinadas condições. Estes modelos podem ser divididos em duas grandes categorias: modelos do circuito equivalente ou modelos dos processos.

Estes modelos são constituídos por resistências, condensadores, inductâncias e por elementos distribuídos tais como o elemento de fase constante (EFC) e a impedância de Warburg, descritos na secção 5.1. Estes elementos podem ser combinados em série e/ou em paralelo por forma a se obterem circuitos equivalentes mais complexos. A cada um dos elementos do circuito equivalente, está geralmente associado um significado físico.

A importância dos modelos matemáticos de ordem fraccionária prende-se com o facto de se poder obter uma descrição mais fiável e um conhecimento mais aprofundado dos processos físicos, devido ao estudo dos seus comportamentos [Nigmatullin e Nelson (2006)].

Desde os primórdios, a humanidade tentou encontrar padrões que ilustrassem aquilo que aparentemente era aleatório. A teoria do Caos, ao contrário do que o nome possa induzir, vem no seguimento dessa busca de padrões em todo o comportamento irregular. Apesar de bastante recentes, o



Caos e os fractais têm vindo a assumir um papel importante em diversos domínios da ciência e as suas aplicações parecem não ter limite [Franceschetti, *et al.*, (1994)], [Korosak, (2001)], [Hamaide, *et al.*, (1989)], [Vorpérian, (1992)], [Mehaute, Crepy, (1983)], [Clerc, *et al.*, (1984)]. Algumas dessas aplicações são na área das telecomunicações (antenas com geometria fractal), termodinâmica (PVC com geometria fractal) e, mais recentemente, na levitação magnética.

Devido à cumplicidade inerente entre as estruturas fractais e os sistemas de ordem fraccionária, muitas vezes as funções fractais são utilizadas para modelizar certos fenómenos complexos que possuam uma memória longa e/ou a necessidade de um grande número de iterações no espaço [Moshrefi-Torbati, Hammond, (1998)]. De facto, pode-se demonstrar que as derivadas (integrais) de ordem fraccionária de uma função regular não são mais do que funções fractais [Tatom, (1995)], [Stiassnie, (1997)]. Então, pode-se comprovar que a evolução de fenómenos que são descritos com mais pormenor através de funções fractais, é, provavelmente, também melhor descrita por equações fraccionárias.

Nos últimos anos, as geometrias fractais têm sido estudadas com vista à sua utilização em antenas com características especiais [Vinoy, *et al.*, 2000]. Em muitas antenas as suas semelhanças com geometrias fractais são qualitativamente assemelhadas às características de uma faixa de multi-frequências [Vinoy, *et al.*, 2001], [Buck, Mundt, (1996)], onde o seu comprimento físico é aproximadamente  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  das antenas tradicionais. As geometrias fractais mais exploradas ao nível das antenas consistem nas curvas de Koch e nas curvas de Hilbert, visando a criação de antenas com pequenos valores de ressonância. O primeiro passo para a utilização das propriedades dos fractais na concepção de antenas envolve a dimensão da geometria fractal. Recentemente, a estrutura fractal Koch foi utilizada em antenas de pequenas

dimensões, tendo as suas características de multi-frequências sido revelados por [Cohen, (1997)] e por [Puede-Baliarda, *et al.*, (2000)].

Tendo este capítulo como base o estudo de impedâncias de ordem fraccionária, a sua organização é a seguinte. Na secção 5.1 são apresentados os conceitos fundamentais das impedâncias de ordem fraccionária. Na secção 5.2 são apresentadas as experiências efectuadas para a determinação da impedância de vegetais e frutos e são formulados os modelos eléctricos que descrevem as impedâncias medidas. Nas secções 5.3 e 5.4 são introduzidas respectivamente, as estruturas fractais que servem de base à criação de condensadores de ordem fraccionária e descritas as experiências desenvolvidas com estes condensadores. Por último, na secção 5.5 são tecidas as principais conclusões que decorrem do estudo efectuado neste capítulo.

### 5.1. Impedâncias Fraccionárias

Os elementos eléctricos mais comuns consistem em resistências, capacidades e indutâncias. Estes elementos servem de base a sistemas físicos encontrados na electroquímica [Heaviside, (1893)], [Magin e Ovadia, (2006)].

Num circuito eléctrico, a tensão sinusoidal expressa em função do tempo é descrita pela seguinte equação:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

onde  $u(t)$  é a tensão no instante de tempo  $t$ ,  $U_0$  é a amplitude do sinal e  $\omega$  é a frequência angular. De forma idêntica, para a corrente temos:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (5.2)$$

onde  $i(t)$  é a corrente no instante de tempo  $t$ ,  $I_0$  é a amplitude do sinal e  $\phi$  é o desfasamento entre a tensão e a corrente.

A tensão e a corrente podem ainda ser expressas na forma complexa:

$$u(t) = \text{Re}\{U_0 e^{j(\omega t)}\} \quad (5.3)$$

$$i(t) = \text{Re}\{I_0 e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (5.4)$$

onde  $\text{Re}\{\}$  representa a parte real e  $j = \sqrt{-1}$ . Assim, na forma complexa a impedância eléctrica  $Z(j\omega)$  é dada pela expressão:

$$Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = Z_0 e^{j(\phi)} \quad (5.5)$$

Nesta última, encontramos um número complexo pelo que, conseqüentemente, é possível obter o seu diagrama polar para diferentes valores de  $\omega$ . Na Figura 5.1 está representado o circuito e o diagrama polar para um circuito  $RC$  paralelo, onde as baixas frequências (altas) estão localizadas do lado direito (esquerdo). Para uma impedância  $Z(j\omega)$ , resultante de um circuito  $RL$  paralelo, o diagrama polar é simétrico e a frequência varia na direcção oposta.

A representação gráfica de impedâncias electroquímicas apresenta frequentemente vários semicírculos ou apenas uma porção de um semicírculo [Jacquelin, (1991)].

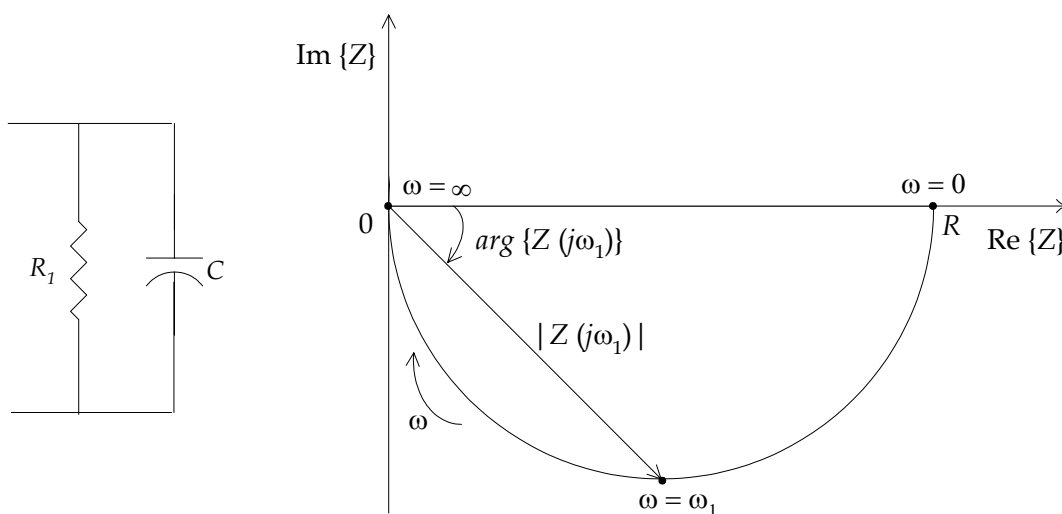


Figura 5.1 - Circuito RC paralelo e correspondente diagrama Polar da impedância  $Z(j\omega)$ .

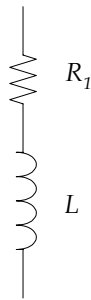
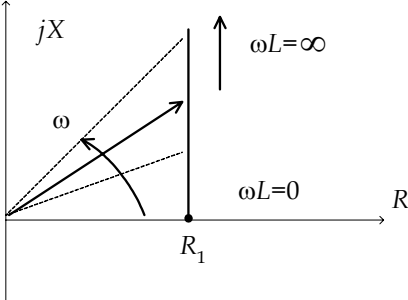
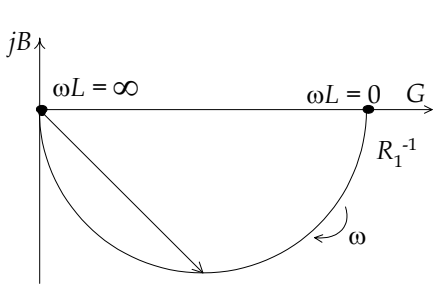
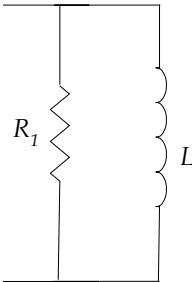
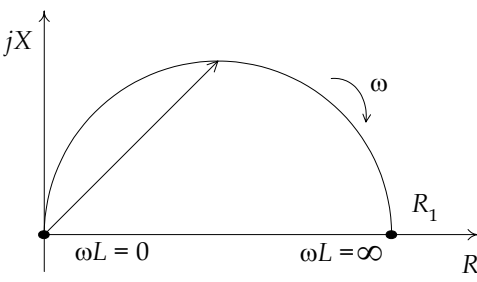
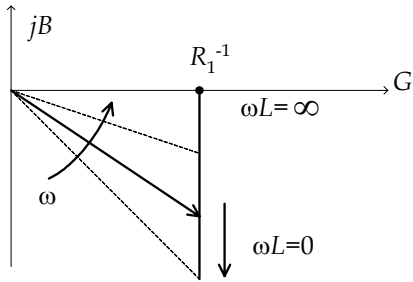
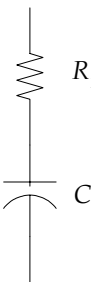
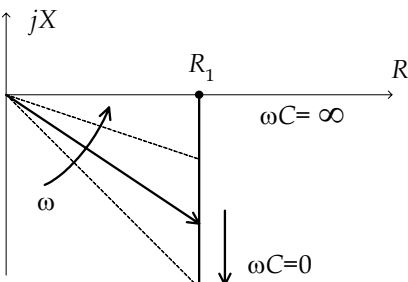
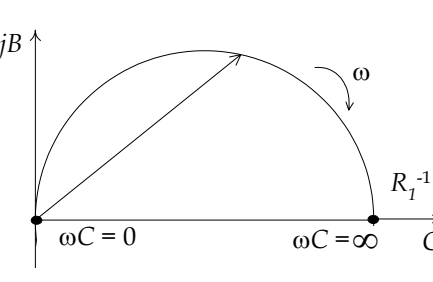
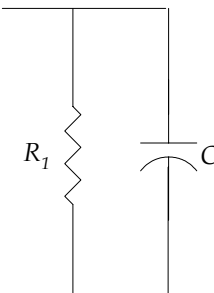
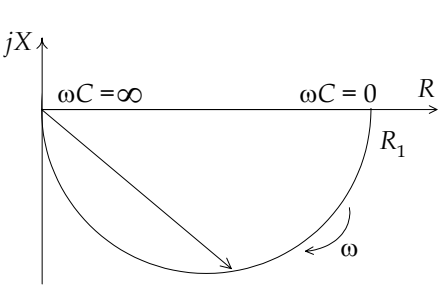
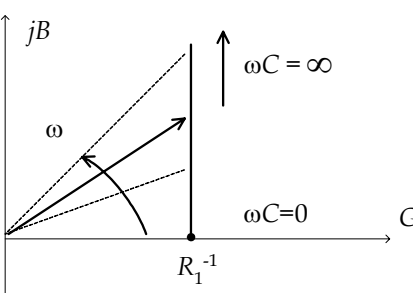
A Tabela 5.1 apresenta a representação polar da impedância  $Z(j\omega)$  e a admitância  $Y(j\omega) = Z^{-1}(j\omega)$  para associações séries e paralelas simples de circuitos  $RL$  e  $RC$ , onde  $G = \text{Re}\{Y\}$  e  $B = \text{Im}\{Y\}$  representam, respectivamente a conductância e a susceptância.

Deve fazer-se uma breve referência ao Elemento de Fase Constante (EFC) e à impedância de Warburg, que são apresentados nesta secção, devido a serem aplicados no decorrer deste capítulo. De facto, na modelização de fenómenos electroquímicos é frequentemente utilizado o elemento EFC, que ocorre devido às superfícies dos elementos não serem homogêneas [Barsoukov, *et al.*, (2005)], [Biswas, *et al.*, (2005)]. Um EFC é descrito pela seguinte expressão complexa:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{(j\omega C_F)^\alpha} \quad (5.6)$$

onde  $C_F$  é uma capacidade de ordem fraccionária e  $\alpha$  representa o parâmetro de ordem fraccionária que pode variar entre 0 e 1, sendo um condensador ideal no caso de  $\alpha = 1$ .

Tabela 5.1 – Impedância  $Z(j\omega)$  e admitância  $Y(j\omega)$  de circuitos  $RL$  e  $RC$  associados em série e em paralelo.

Circuito	Plano Z	Plano Y
		
		
		
		

Referira-se ainda, que as unidades base do sistema internacional (SI) para o parâmetro  $C_F$  do elemento EFC são da forma  $[m^{-2/\alpha} kg^{-1/\alpha} s^{(\alpha+3)/\alpha} A^{2/\alpha}]$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Na Tabela 5.2 são apresentados alguns circuitos simples, constituídos por um elemento de ordem fraccionária, uma resistência e um condensador.

É sabido que, em sistemas electroquímicos com processos de difusão, a impedância pode ser modelizada por um elemento designado de Warburg [Ho, *et al.*, (1980)], [Barsoukov, *et al.*, (2005)]. O elemento Warburg surge de um processo de difusão unidimensional de espécies iónicas nos eléctrodos. A impedância intrínseca a um sistema de difusão de comprimento infinito, é designada por impedância de Warburg e é dada por:

$$Z(j\omega) = \frac{R}{(j\omega C_F)^{0,5}} \quad (5.7)$$


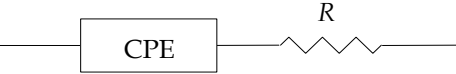
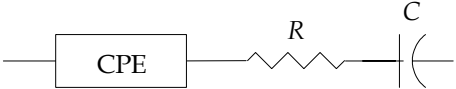
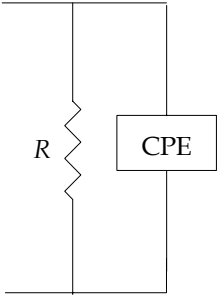
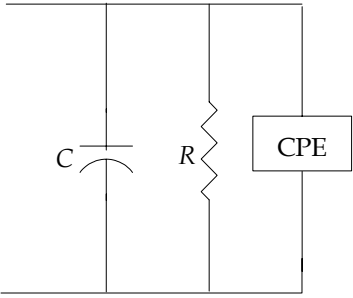
onde  $R$  representa a resistência de difusão e  $C_F$  uma capacidade de ordem fraccionária. Se o processo de difusão possui comprimento finito, então o elemento de Warburg assume a seguinte expressão:

$$Z(j\omega) = R \frac{\tanh(j\omega\tau)^{0,5}}{(\tau)^{0,5}} \quad (5.8)$$

com  $\tau = \delta^2/D$ , sendo  $\tau$  a constante de tempo de difusão,  $\delta$  a espessura da camada de difusão e  $D$  o coeficiente de difusão [Machowski, *et al.* (2003)].

Baseados nestes conceitos, nas secções seguintes vão ser apresentadas algumas impedâncias eléctricas de ordem fraccionária.

Tabela 5.2 - Circuitos eléctricos simples, envolvendo um elemento com impedância de ordem fraccionária  $C_F$ , uma resistência  $R$  e um condensador  $C$ .

Circuito	Impedância / Admitância
	$Z = \frac{1}{(j\omega C_F)^\alpha}$
	$Z = R + \frac{1}{(j\omega C_F)^\alpha}$
	$Z = \frac{1}{j\omega C} + R + \frac{1}{(j\omega C_F)^\alpha}$
	$Y = \frac{1}{R} + (j\omega C_F)^\alpha$
	$Z = j\omega C + \frac{1}{R} + (j\omega C_F)^\alpha$

## 5.2. Impedâncias Eléctricas de Ordem Fraccionária em Vegetais e Frutos

A estrutura dos frutos e dos vegetais possui células que são sensíveis ao calor, à humidade, à pressão e a outros estímulos. Estes sistemas constituem circuitos eléctricos que exibem um comportamento complexo [Cole, (1933)]. Tendo estes princípios em mente, neste trabalho são estudadas as impedâncias eléctricas de vários elementos botânicos, sob o ponto de vista dos sistemas de ordem fraccionária.

Aplicam-se sinais de excitação sinusóidais  $v(t)$ , a diversas frequências  $\omega$  (Figura 5.2), e medem-se as impedâncias  $Z(j\omega)$  nos sistemas botânicos, com base na tensão  $u(t)$  e na corrente  $i(t)$  resultantes. Para a medição da tensão, da corrente, da frequência e do desfasamento entre a tensão e a corrente, utiliza-se o aparelho de medida ScopeMeter 123, cujas características e funcionalidades são descritas no Anexo D - Característica do aparelho de medida ScopeMeter 123. Mais ainda, são medidos outros factores de impacte no sistema, nomeadamente a temperatura, o peso, o comprimento e a largura dos elementos botânicos. Este critério visa a compreensão de como estes factores influenciam a impedância  $Z(j\omega)$ .

Neste estudo são realizadas diversas experiências, por forma a avaliar-se a variação da impedância  $Z(j\omega)$  com a amplitude do sinal de entrada  $V_0$ , para diferentes comprimentos de penetração do eléctrodo dentro do elemento  $\Delta$ , a temperatura ambiental  $T$ , o peso  $W$  e a dimensão  $D$ .

O valor da resistência de adaptação  $R_a$  varia para cada uma das experiências, por forma a se adaptarem os valores da tensão e da corrente à escala do aparelho de medida.



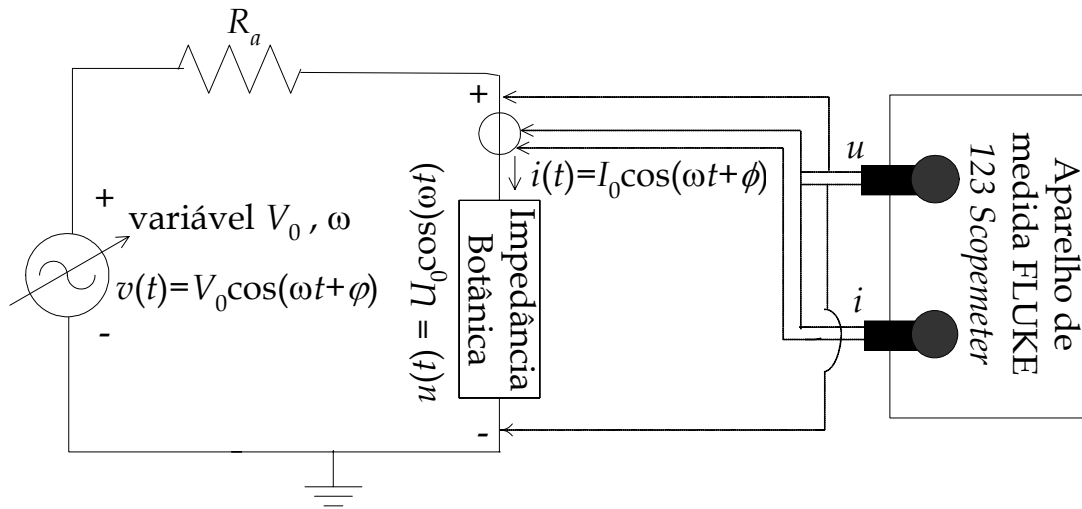


Figura 5.2 – Circuito eléctrico para medição da impedância botânica  $Z(j\omega)$ .

Começa-se por se analisar a impedância  $Z(j\omega)$  para uma amplitude do sinal de entrada de  $V_0 = 10$  v, uma resistência de adaptação  $R_a = 15$  k $\Omega$ , aplicada a uma *Solanum Tuberosum* (batata), com um peso  $W = 1,24 \times 10^{-1}$  kg, uma dimensão aproximada  $D = 7,97 \times 10^{-2} \times 5,99 \times 10^{-2}$  m, uma temperatura ambiente  $T = 26,5$  °C, e um comprimento de penetração do eléctrodo  $\Delta = 2,1 \times 10^{-2}$  m.

A Figura 5.3 apresenta os diagramas de Bode da amplitude e da fase de  $Z(j\omega)$  e a Figura 5.4 o correspondente diagrama polar. Os resultados revelam que o sistema possui uma impedância de ordem fraccionária. De facto, aproximando os resultados experimentais no diagrama de Bode da amplitude através de uma função potência, dada por  $|Z(j\omega)| = a\omega^{-b}$ , obtemos  $(a; b) = (4,91 \times 10^3; 0,0598)$  e  $(a; b) = (7,94 \times 10^5; 0,5565)$ , respectivamente às baixas e às altas frequências.

É interessante comparar o diagrama polar da Figura 5.4 e a admitância apresentada na Tabela 5.1. Verifica-se que o sistema em estudo possui

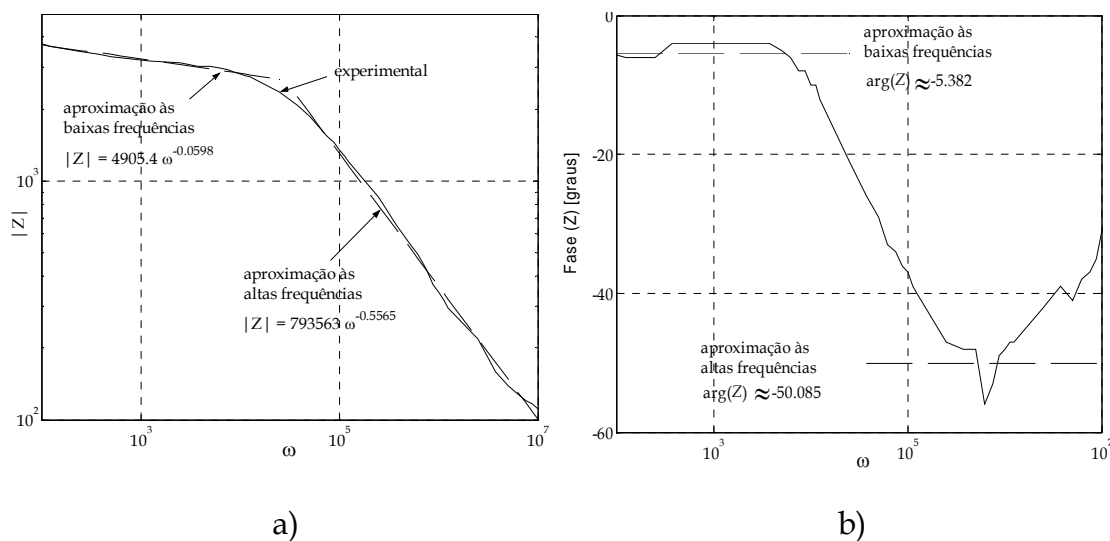


Figura 5.3 – Diagrama de Bode da impedância  $Z(j\omega)$  para a batata: a) amplitude b) fase.

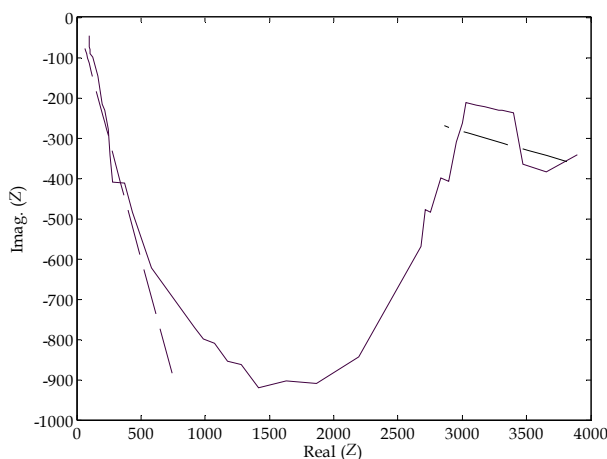


Figura 5.4 – Diagrama polar da impedância  $Z(j\omega)$  para a batata.

semelhanças com um circuito RC paralelo, pelo que se conclui que este vegetal possui características eléctricas similares aos condensadores.

Com vista à análise da linearidade do sistema, avaliou-se  $Z(j\omega)$  para outras amplitudes do sinal de entrada do sistema, nomeadamente, para  $V_0 = \{5, 15, 20\}$  v, mantendo-se a resistência de adaptação constante  $R_a = 15$  k $\Omega$ . A

impedância  $Z(j\omega)$  apresenta uma ordem fraccionária  $b$  que não varia significativamente com a variação da amplitude do sinal de entrada (Tabela 5.3). Desta forma, podemos concluir que este sistema possui uma característica aproximadamente linear com a amplitude do sinal da tensão aplicada.

Numa segunda experiência, variou-se o comprimento de penetração do eléctrodo  $\Delta$  na batata, e avaliou-se a sua influência no valor da impedância. Desta forma, ajustou-se o eléctrodo para  $\Delta = 1,42 \times 10^{-2}$  m, com  $V_0 = 10$  v e uma resistência de adaptação  $R_a = 15$  k $\Omega$ , levando às seguintes aproximações de  $|Z(j\omega)|$ ,  $(a; b) = (5,48 \times 10^3; 0,0450)$  e  $(a; b) = (1,00 \times 10^6; 0,5651)$ , respectivamente às baixas e às altas frequências. Com os resultados obtidos, concluiu-se que o comprimento do eléctrodo dentro da batata não varia significativamente os valores do parâmetro  $a$  nem os da ordem fraccionária  $b$ . O estudo foi repetido para diversos valores de  $V_0$ , confirmando-se o comportamento aproximadamente linear da impedância.

A última experiência com a batata está relacionada com a variação da temperatura ambiente. Neste caso, utilizou-se a mesma batata, e as mesmas condições da experiência inicial, mas para uma temperatura de  $T = 25,7$  °C.

Tabela 5.3 - Comparação dos valores de  $|Z(j\omega)| \approx a\omega^{-b}$  para diversas amplitudes do sinal de entrada.

Amplitude (v)	baixas $\omega$		altas $\omega$	
	$a$	$b$	$a$	$b$
5	$4,79 \times 10^3$	0,062	$6,52 \times 10^5$	0,542
10	$4,91 \times 10^3$	0,060	$7,94 \times 10^5$	0,557
15	$4,54 \times 10^3$	0,054	$5,66 \times 10^5$	0,530
20	$4,65 \times 10^3$	0,055	$5,86 \times 10^5$	0,530

As aproximações à amplitude da impedância  $|Z(j\omega)|$  passou a apresentar os valores:  $(a; b) = (8,91 \times 10^3; 0,0555)$  e  $(a; b) = (7,10 \times 10^5; 0,5010)$ , respectivamente às baixas e às altas frequências. Uma vez mais verifica-se somente uma ligeira variação dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

Outro aspecto que pode influenciar os resultados é o peso  $W$ . Na realidade  $W$  está correlacionado com  $D$ . Desta forma, aplicou-se um sinal de entrada com amplitude  $V_0 = 10$  v, uma resistência de adaptação  $R_a = 15$  k $\Omega$ , com uma temperatura ambiental  $T = 26,5$  °C, uma penetração do eléctrodo  $\Delta = 2,1 \times 10^{-2}$  m, numa outra batata com peso de  $W = 5,89 \times 10^{-2}$  kg e dimensão de  $D = 7,16 \times 10^{-2} \times 3,99 \times 10^{-2}$  m. Os resultados assintóticos para  $|Z(j\omega)|$  são:  $(a; b) = (7,17 \times 10^3; 0,0546)$  às baixas frequências e  $(a; b) = (2,00 \times 10^6; 0,5990)$ , às altas frequências. Mais uma vez, esta experiência não revelou variações significativas dos parâmetros  $a$  e  $b$ . A validade da aproximação linear foi mais uma vez confirmada tanto para este como para outros valores de  $V_0$ .

Em conclusão, a impedância eléctrica de ordem fraccionária não apresenta significativas variações com os factores analisados. Nesta linha de pensamento, organizaram-se experiências similares com outros vegetais e com vários frutos. Em todas as experiências a seguir apresentadas, a resistência de adaptação  $R_a$  é ajustada para cada um dos vegetais e dos frutos, segundo os valores apresentados na Tabela 5.4.






Os resultados a seguir apresentados correspondem a experiências nas quais se adoptou uma amplitude do sinal de entrada  $V_0 = 10$  v e uma penetração do eléctrodo  $\Delta = 2,1 \times 10^{-2}$  m.

As Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam respectivamente, as características dos vegetais e os correspondentes valores das aproximações assintóticas.

Tabela 5.4 – Valores da resistência de adaptação  $R_a$  para os vegetais e para os frutos.

Vegetal	$R_a$ ( $\Omega$ )	Fruto	$R_a$ ( $\Omega$ )
Alho	$15,0 \times 10^3$	Banana	$5,5 \times 10^3$
Batata	$15,0 \times 10^3$	Kiwi	$7,5 \times 10^2$
Cebola	$2,7 \times 10^3$	Laranja	$1,8 \times 10^3$
Cenoura	$4,7 \times 10^3$	Limão	$7,5 \times 10^2$
Nabo	$2,2 \times 10^3$	Pêra	$1,0 \times 10^3$
Pimento	$4,5 \times 10^3$	Maça	$1,0 \times 10^3$

Tabela 5.5 – Características dos vegetais.

Vegetal / Espécie	Peso (kg)	Comprimento (m)	Largura (m)	Imagem
Alho / <i>Allium sativum</i> L.	$2,99 \times 10^{-3}$	$1,38 \times 10^{-2}$	$6,00 \times 10^{-3}$	
Batata / <i>Solanum tuberosum</i>	$1,24 \times 10^{-1}$	$7,97 \times 10^{-2}$	$5,99 \times 10^{-2}$	
Cebola / <i>Allium cepa</i> L.	$8,33 \times 10^{-2}$	$5,86 \times 10^{-2}$	$5,77 \times 10^{-2}$	
Cenoura / <i>Daucus Carota</i> L.	$8,85 \times 10^{-2}$	$1,55 \times 10^{-1}$	$3,39 \times 10^{-2}$	
Nabo / <i>Brassica napobrassica</i>	$7,90 \times 10^{-2}$	$7,26 \times 10^{-2}$	$5,43 \times 10^{-2}$	



Pimento / <i>Capsi-cum annuum</i>	$1,30 \times 10^{-1}$	$1,23 \times 10^{-1}$	$8,20 \times 10^{-2}$	
Tomate/ <i>Lycoper-sicom esculentum</i>	$1,46 \times 10^{-1}$	$5,57 \times 10^{-2}$	$6,88 \times 10^{-2}$	

Tabela 5.6 - Comparação dos valores de  $Z(j\omega) \approx a\omega^{-b}$  para diversos vegetais.

Vegetais	baixas $\omega$		altas $\omega$	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
Alho	$1,65 \times 10^4$	0,068	$7,00 \times 10^6$	0,621
Batata	$4,91 \times 10^3$	0,060	$7,94 \times 10^5$	0,557
Cebola	$8,38 \times 10^3$	0,093	$2,30 \times 10^5$	0,463
Cenoura	$1,89 \times 10^4$	0,021	$5,00 \times 10^7$	0,749
Nabo	$3,92 \times 10^3$	0,040	$2,00 \times 10^6$	0,581
Pimento	$2,25 \times 10^4$	0,041	$2,00 \times 10^6$	0,539
Tomate	$2,88 \times 10^2$	0,011	$8,68 \times 10^3$	0,334

Experiências idênticas foram desenvolvidas para vários frutos. As Tabelas 5.7 e 5.8 apresentam, respectivamente, as suas características e os valores dos parâmetros das assíptotas de  $|Z(j\omega)|$ .

As Figuras 5.5 e 5.6 ilustram as componentes  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$  e  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ , respectivamente dos vegetais e dos frutos em estudo. A representação simétrica da parte imaginária de  $Z(j\omega)$ , prende-se com o facto de se estarem a considerar

eixos em escala log-log, em analogia com os diagramas de Bode da amplitude, e dos valores de  $\text{Im}\{Z\}$  serem negativos. Verifica-se a existência de respostas distintas para as baixas e para as altas frequências.

Tabela 5.7 – Características dos frutos.







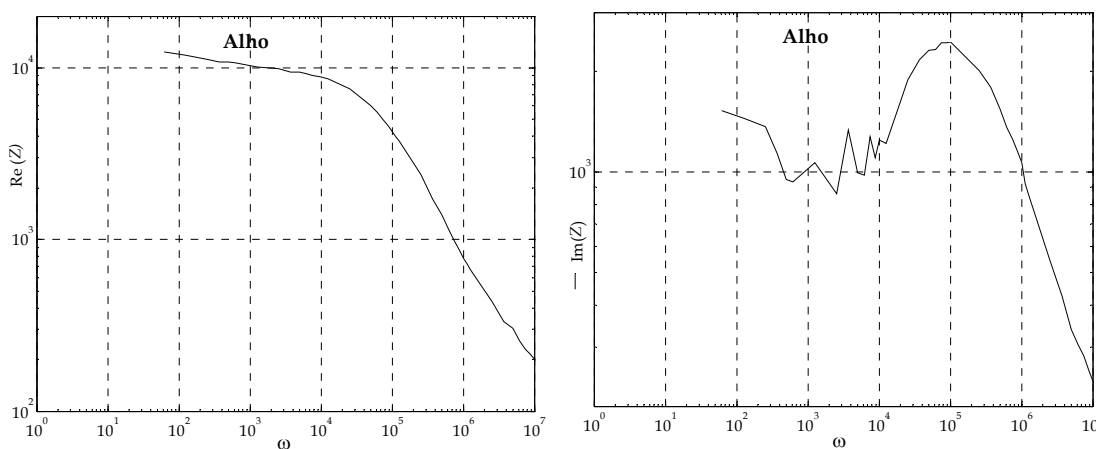
Fruto / Espécie	Peso (kg)	Comprimento (m)	Largura (m)	Imagem
Banana / <i>Musa ingens</i>	$1,11 \times 10^{-1}$	$1,49 \times 10^{-1}$	$3,42 \times 10^{-2}$	
Kiwi / <i>Actinidia deliciosa</i>	$8,95 \times 10^{-2}$	$6,52 \times 10^{-2}$	$5,50 \times 10^{-2}$	
Laranja / <i>Citrus sinensis</i>	$1,53 \times 10^{-1}$	$6,69 \times 10^{-2}$	$6,98 \times 10^{-2}$	
Limão / <i>Citrus x limon</i>	$1,66 \times 10^{-1}$	$9,19 \times 10^{-2}$	$6,58 \times 10^{-2}$	
Maça / <i>Malus domestica</i>	$1,39 \times 10^{-1}$	$6,36 \times 10^{-2}$	$7,15 \times 10^{-2}$	
Pêra / <i>Pyrus communis</i>	$9,72 \times 10^{-2}$	$6,51 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$	

Tabela 5.8 – Comparação dos valores de  $|Z(j\omega)| \approx a\omega^{-b}$  para diversos frutos.

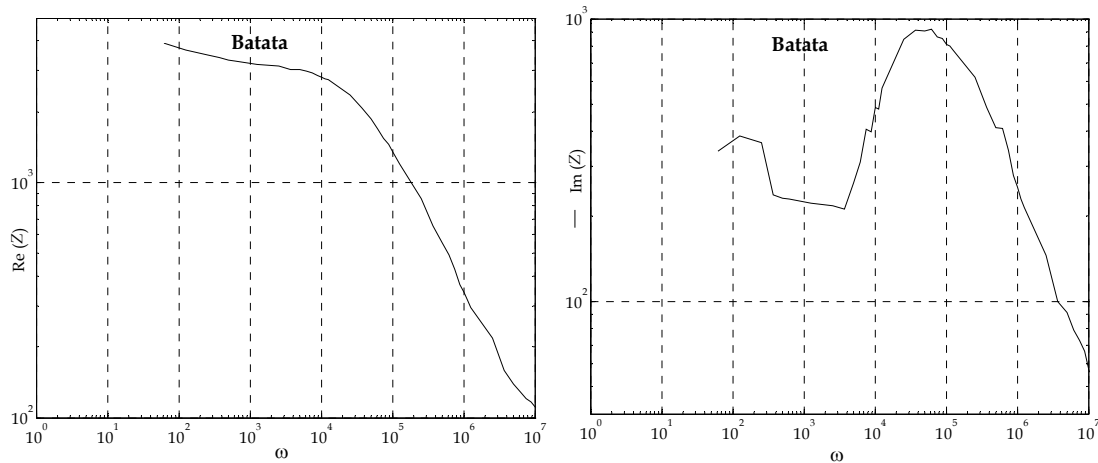
Fruto	baixas $\omega$		altas $\omega$	
	$a$	$b$	$a$	$b$
Banana	$3,03 \times 10^4$	0,036	$2,00 \times 10^7$	0,694
Kiwi	$2,97 \times 10^2$	0,018	$5,16 \times 10^3$	0,291
Laranja	$1,86 \times 10^4$	0,104	$1,00 \times 10^6$	0,539
Limão	$1,63 \times 10^3$	0,057	$3,33 \times 10^5$	0,569
Pêra	$4,74 \times 10^2$	0,009	$2,04 \times 10^4$	0,349
Maça	$7,55 \times 10^3$	0,029	$2,00 \times 10^6$	0,571

Para os vegetais alho, batata, cebola, cenoura e nabo temos, na Tabela 5.9, os valores obtidos para as respectivas aproximações. Para os frutos banana, kiwi, limão e maçã, temos os parâmetros das aproximações apresentados na Tabela 5.10.

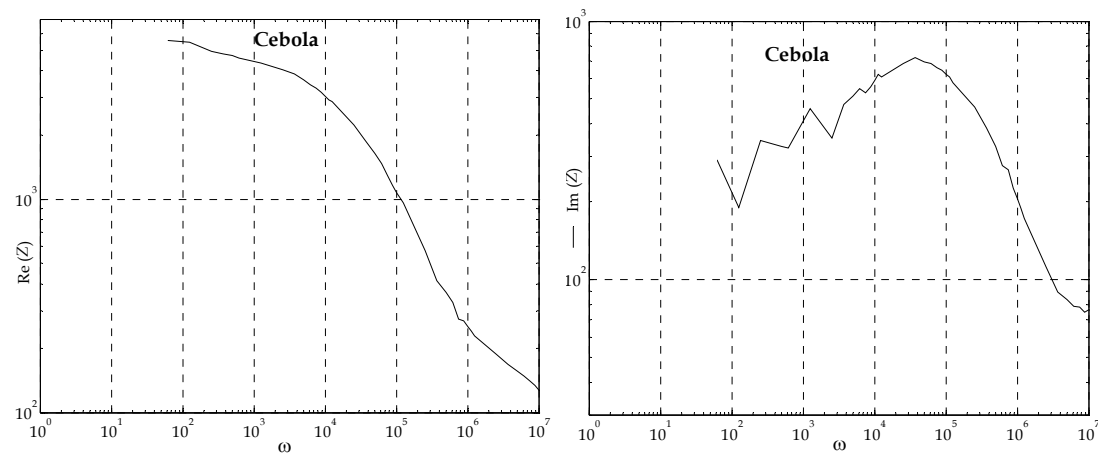


a)

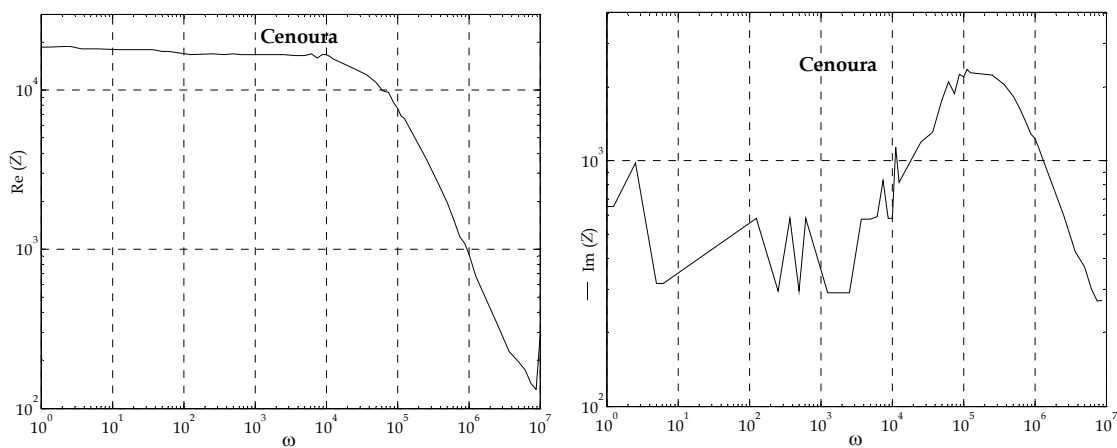




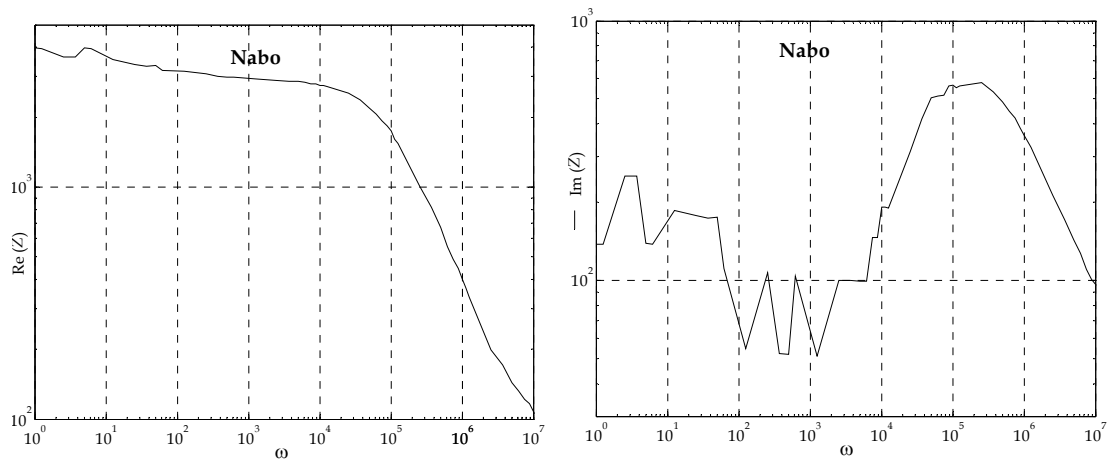
b)



c)

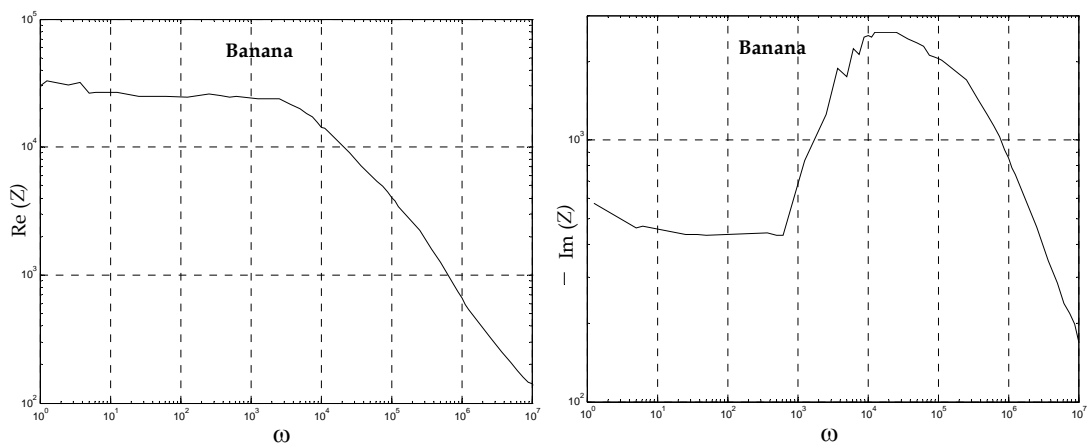


d)



e)

Figura 5.5 – Diagramas das partes real e –imaginária da impedância  $Z(j\omega)$  para diversos vegetais: a) alho, b) batata, c) cebola, d) cenoura, e) nabo.



a)

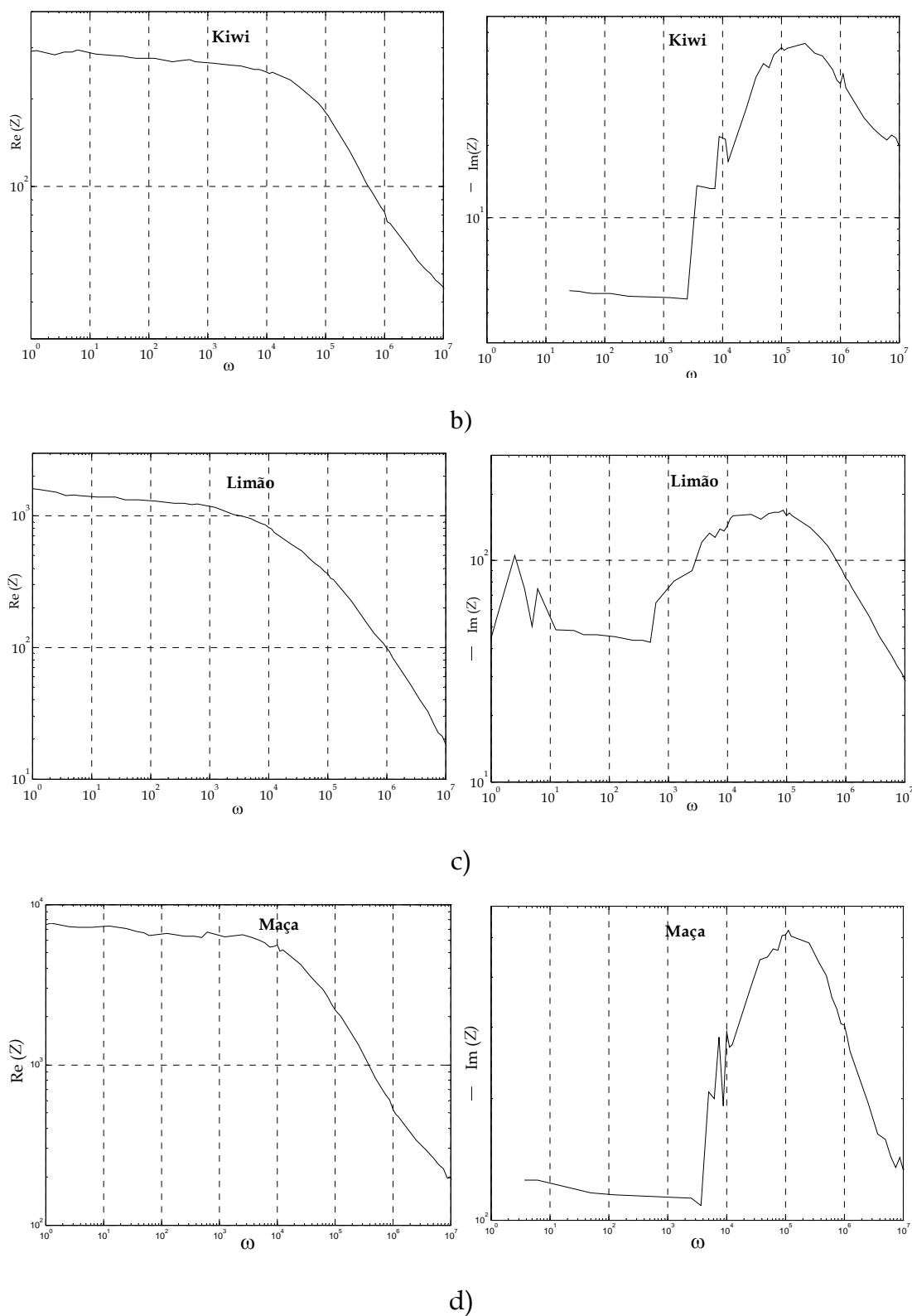


Figura 5.6 – Diagramas das partes real e –imaginária da impedância  $Z(j\omega)$  para diversos frutos: a) banana, b) kiwi, c) limão e d) maçã.

Tabela 5.9 – Comparação das partes real  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e imaginária  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$  de diversos vegetais: alho, batata, cebola, cenoura e nabo.

Vegetal		Re {Z}		-Im {Z}	
		a	b	a	b
<u>Alho</u>	baixa $\omega$	$1,61 \times 10^4$	0,064	$1,42 \times 10^3$	0,028
	alta $\omega$	$8,09 \times 10^6$	0,662	$5,03 \times 10^6$	0,618
<u>Batata</u>	baixa $\omega$	$4,95 \times 10^3$	0,062	$1,95 \times 10^2$	0,066
	alta $\omega$	$9,31 \times 10^5$	0,593	$7,01 \times 10^5$	0,579
<u>Cebola</u>	baixa $\omega$	$10,0 \times 10^3$	0,124	$1,12 \times 10^2$	0,177
	alta $\omega$	$2,47 \times 10^5$	0,480	$1,69 \times 10^5$	0,484
<u>Cenoura</u>	baixa $\omega$	$1,85 \times 10^4$	0,015	$3,11 \times 10^2$	0,124
	alta $\omega$	$2,82 \times 10^8$	0,915	$1,87 \times 10^7$	0,701
<u>Nabo</u>	baixa $\omega$	$3,96 \times 10^3$	0,043	$1,85 \times 10^2$	0,107
	alta $\omega$	$1,88 \times 10^6$	0,610	$5,26 \times 10^5$	0,532

Tabela 5.10 – Comparação das partes real  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e imaginária  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$  de diversos frutos: banana, kiwi, limão e maçã.

Fruta		Re {Z}		-Im {Z}	
		a	b	a	b
<u>Banana</u>	baixa $\omega$	$3,01 \times 10^4$	0,035	$5,10 \times 10^2$	0,031
	alta $\omega$	$1,86 \times 10^7$	0,737	$5,95 \times 10^6$	0,644
<u>Kiwi</u>	baixa $\omega$	$2,97 \times 10^2$	0,018	$1,04 \times 10^0$	0,321
	alta $\omega$	$5,60 \times 10^3$	0,303	$1,51 \times 10^3$	0,268
<u>Limão</u>	baixa $\omega$	$1,56 \times 10^3$	0,039	$5,81 \times 10^1$	0,043
	alta $\omega$	$1,44 \times 10^6$	0,697	$4,14 \times 10^4$	0,450
<u>Maça</u>	baixa $\omega$	$7,45 \times 10^3$	0,025	$1,05 \times 10^2$	0,057
	alta $\omega$	$1,07 \times 10^6$	0,540	$4,12 \times 10^4$	0,357

Os resultados revelam que  $Z(j\omega)$  possui características distintas mediante a gama de frequências. Para as baixas frequências a impedância revela-se aproximadamente constante, mas para as altas frequências é claramente de ordem fraccionária.

Na próxima subsecção vai ser apresentado um circuito eléctrico para modelizar os vegetais e os frutos referidos.

### 5.2.1 Modelo da Impedância

Na secção anterior foram apresentadas aproximações assintóticas distintas para as baixas e para as altas frequências, porque se verificou ser difícil encontrar um único modelo que caracterizasse  $Z(j\omega)$  em toda a faixa de frequências. Nesta subsecção, aplica-se o circuito de Randles representado na Figura 5.7. Este circuito é usualmente utilizado na área da electroquímica, onde  $R_0$  e  $R_1$  são resistências e o elemento EFC é dado pela equação (5.6),

$$Z(j\omega) = \frac{1}{(j\omega C_F)^\alpha}.$$

Os valores numéricos de  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $C_F$  e  $\alpha$ , para as diferentes impedâncias, são apresentados na Tabela 5.11. Os resultados revelaram uma boa aproximação para os vários vegetais e frutos estudados.

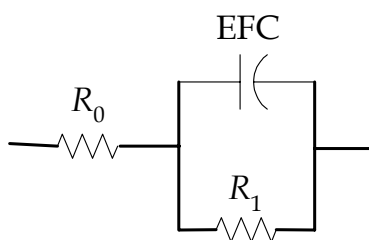
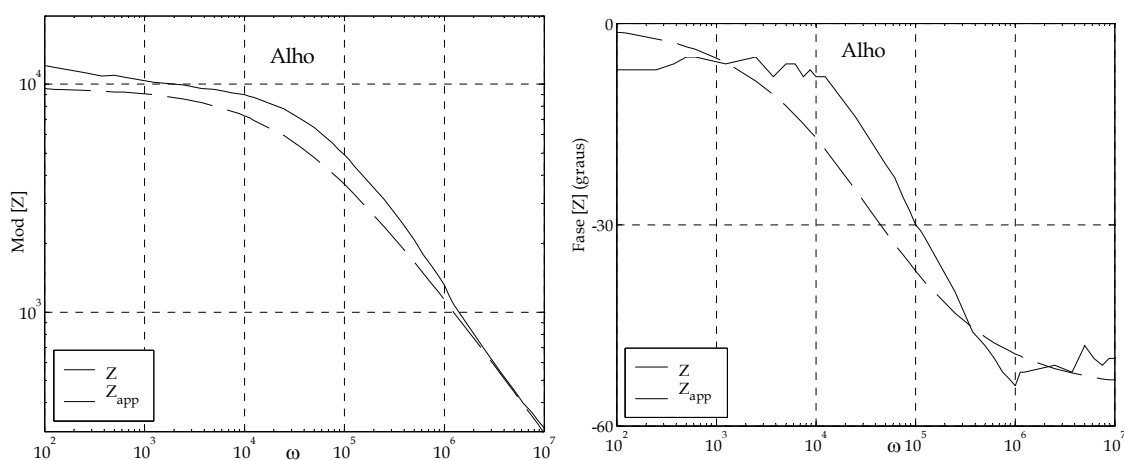


Figura 5.7 - Circuito Randles.

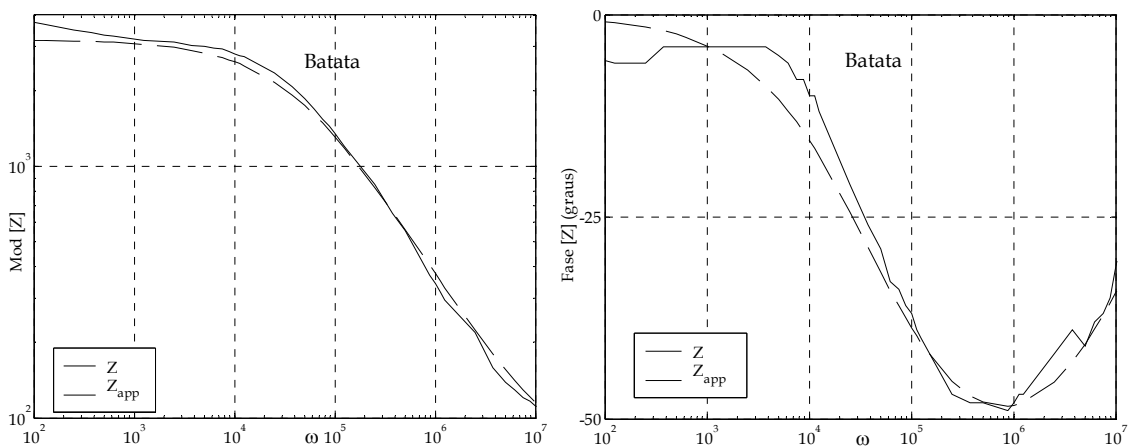
A Figura 5.8 apresenta os diagramas de Bode da amplitude e da fase da impedância para, o alho, a batata, o tomate, o kiwi e a pêra. Por seu lado, a Figura 5.9 ilustra os correspondentes diagramas polares. Nestas figuras, as curvas  $Z$  e  $Z_{app}$  correspondem respectivamente às impedâncias medidas e às aproximadas, com o circuito de Randles.

Tabela 5.11 - Valores dos elementos do circuito Randles para o alho, a batata, o tomate, o kiwi e a pêra.

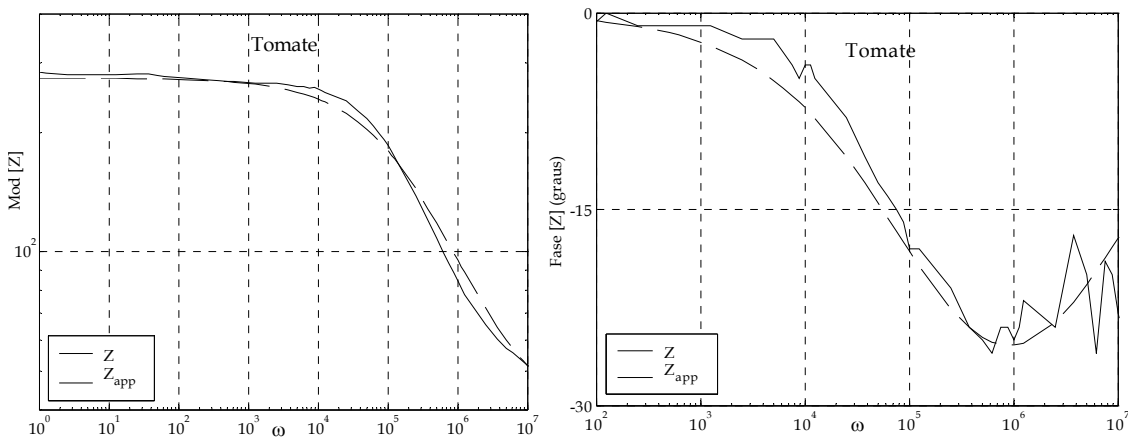
Vegetais / frutos	$R_0$ [ $\Omega$ ]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$C_F$ [ $m^{-2/\alpha} kg^{-1/\alpha} s^{(\alpha+3)/\alpha} A^{2/\alpha}$ ]	$\alpha$
Alho	1,00	$9,70 \times 10^3$	$8,49 \times 10^{-12}$	0,609
Batata	57,00	$3,15 \times 10^3$	$1,67 \times 10^{-10}$	0,677
Tomate	35,04	$2,40 \times 10^2$	$4,15 \times 10^{-10}$	0,565
Kiwi	28,04	$2,42 \times 10^2$	$2,33 \times 10^{-10}$	0,531
Pêra	44,04	$4,09 \times 10^2$	$2,51 \times 10^{-10}$	0,619



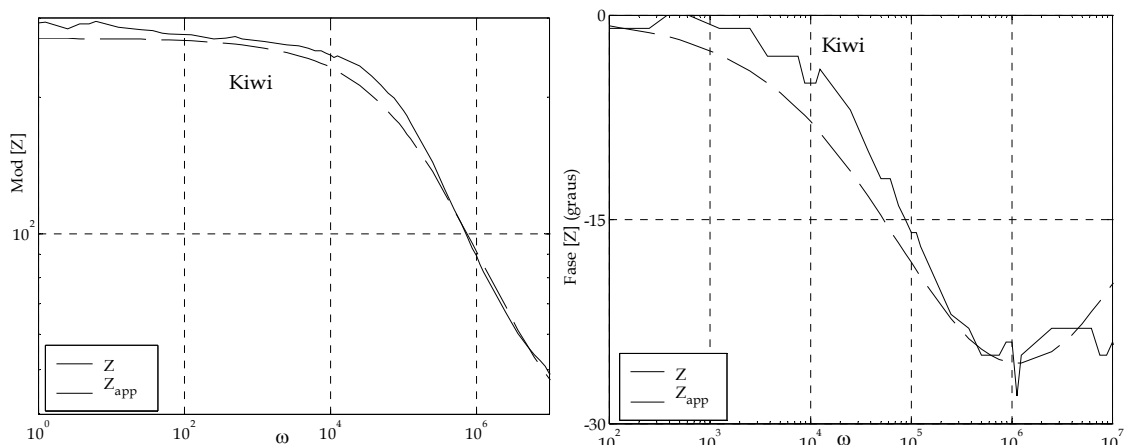
a)



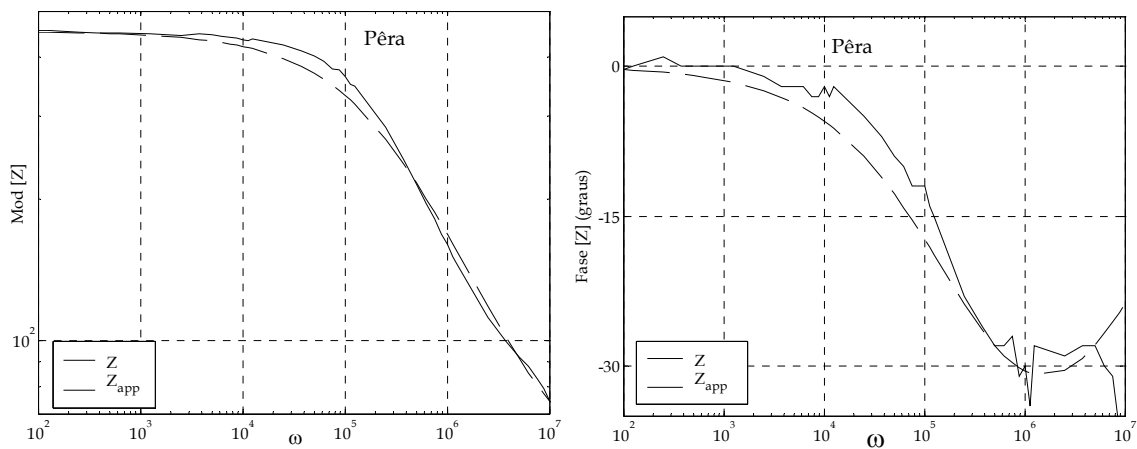
b)



c)

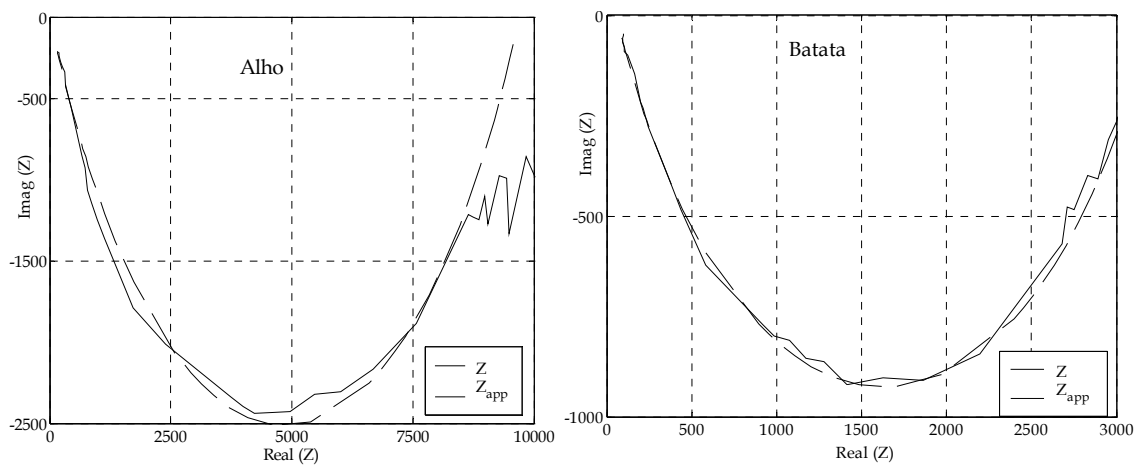


d)



e)

Figura 5.8 - Diagramas de Bode da amplitude e da fase de  $Z(j\omega)$  para diversos vegetais e frutos: a) alho, b) batata, c) tomate, d) kiwi, e) pêra.



a)

b)



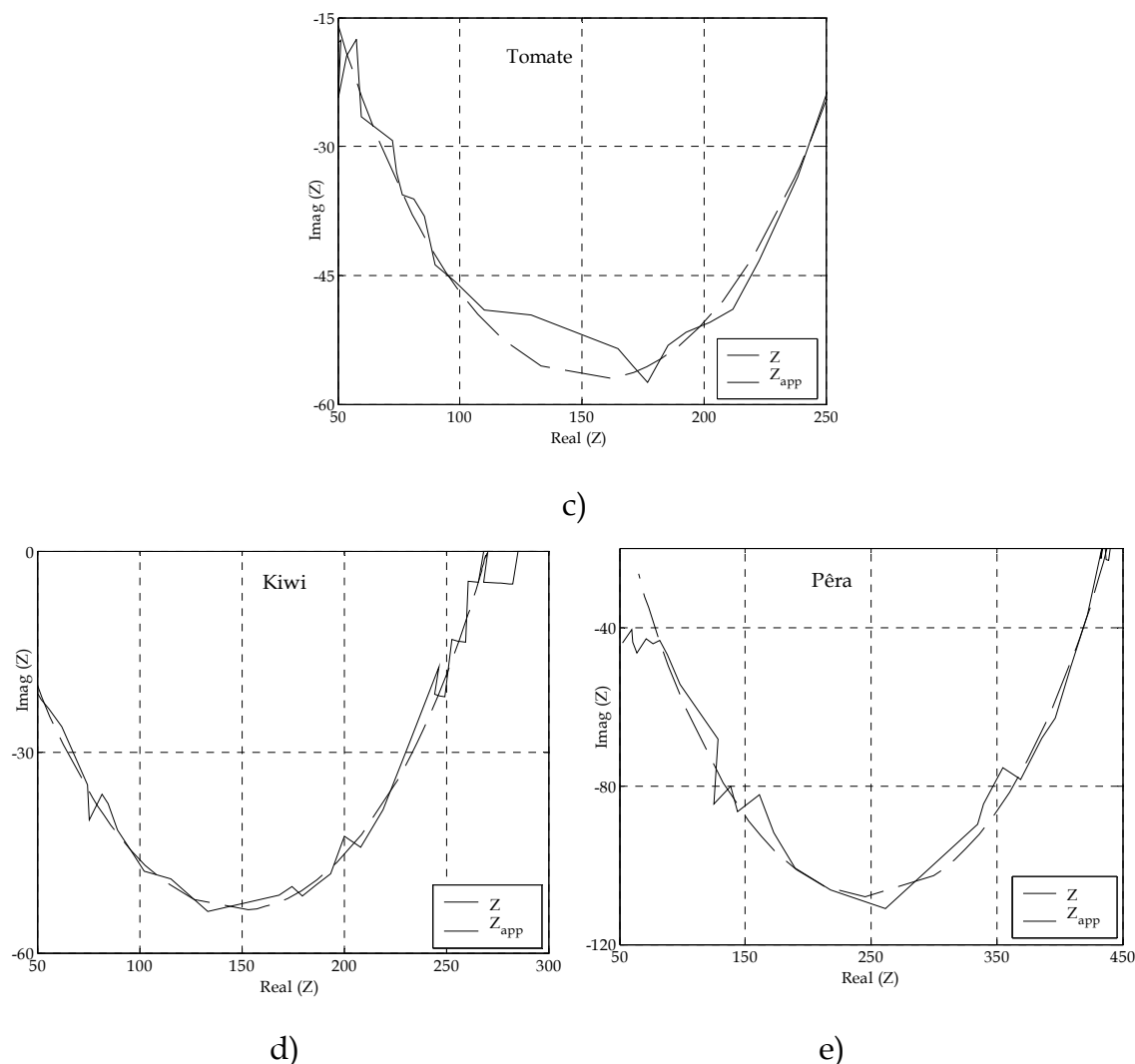


Figura 5.9 – Diagramas polares da impedância  $Z(j\omega)$  para diversos vegetais e frutos: a) alho, b) batata, c) tomate, d) kiwi, e) pêra.

No caso de se adoptar circuitos mais complexos, com um maior número de componentes, pode-se eventualmente obter melhores aproximações [Jesus, *et al.*, (2006a)], [Jesus, *et al.*, (2006b)], [Jesus, *et al.*, (2007)]. No entanto, modelos com um maior número de componentes dificultam não só a comparação dos diferentes casos, mas também a atribuição do significado físico a cada um dos parâmetros.

Tendo em mente estes resultados, pode ser concluído que o presente estudo aponta para uma alternativa biológica no desenvolvimento de dispositivos de ordem fraccionária. De facto, recentes pesquisas focalizaram-se na implementação tecnológica de capacidades de ordem fraccionária, frequentemente designadas de fractâncias. Estão presentemente disponíveis patentes e produtos comerciais, abrindo áreas promissoras na electrónica e no controlo [Bohannan, (2002b)]. Este trabalho indica uma estratégia alternativa, estudando sistemas naturais vivos, em vez dos elementos tecnológicos artificiais. Consequentemente, este estudo revela uma nova direcção de interesse e constitui um ponto de partida para o desenvolvimento de dispositivos capazes de medir a maturação das frutas e dos vegetais, e de fornecer uma estimativa do seu período de durabilidade com vista ao seu armazenamento.

### 5.3. Geometrias Fractais

As estruturas fractais podem ser encontradas em todo o universo natural desde nuvens, montanhas, árvores e relâmpagos, até à distribuição das galáxias e a aspectos económicos relacionados com “stocks” e mercados.

O impacto destas estruturas fractais e da geometria fractal é bem evidente na engenharia, nas comunicações, na hidrogeologia, na química, na metalúrgica, na arte, na matemática e até no estudo de doenças crónicas e noutros campos da medicina.

O criador do conceito de fractal, foi Benoit Mandelbrot. Mandelbrot é, por isso, considerado o “pai” dos fractais. Todavia, há quem afirme que o descobrimento deste conceito remonta à matemática clássica e a alguns dos matemáticos anteriores a Mandelbrot como sejam, George Cantor (1872),

Giuseppe Peano (1890), David Hilbert (1891), Helge von Koch (1904), Waclaw Sierpinski (1916), Gaston Julia (1918), Felix Hausdorff (1919), embora tenha sido Mandelbrot quem se preocupou em definir o alcance dos fractais ao nível conceptual como uma nova percepção da geometria da natureza [Falconer, (1990)].

Mandelbrot pesquisou em áreas da matemática questionadas durante muitos anos, pois a abordagem fugia ao formalismo imposto nessa época. As suas pesquisas surgiram quando começou a tentar definir os ciclos nos preços de mercado.

Alguns dos fractais clássicos adoptados no decorrer deste trabalho vão ser resumidamente apresentados.

A curva de Koch (Tabela 5.12) foi criada pelo matemático sueco Helge Von Koch no ano de 1904 [Mehaute Alain Le, (1990)]. A trajectória matemática de Koch não é tão complexa como a de Cantor, Peano, Sierpinski, porém a sua geometria é importante pois serve para uma generalização interessante de fractais, além de ter sido altamente inspiradora para o trabalho de Mandelbrot. A construção começa com uma simples linha recta, que é chamada de iniciador. Numa primeira iteração o segmento de recta é dividido em quatro segmentos de recta menores, mas de tamanho idêntico, sendo os dois segmentos interiores substituídos por dois quadrados incompletos (onde falta um dos lados) e colocados em posições opostas (um com a abertura para cima e o outro para baixo). Seguidamente todos os oito segmentos de recta são substituídos seguindo o procedimento anterior, continuando o processo a sofrer sempre o mesmo tipo de intervenção, obtendo-se por fim a curva de Koch.

O triângulo de Sierpinski (Tabela 5.12) foi introduzido pelo matemático Waclaw Sierpinski (1882-1969), um dos mais influentes matemáticos da Polónia na sua época. A sua importância foi tal que uma das crateras da Lua foi

baptizada com seu nome. A construção geométrica básica da proposta de Sierpinski começa com um triângulo desenhado a cheio. Seguidamente, tomando os pontos médios de cada lado e unindo-os, formam-se quatro triângulos congruentes dos quais se retira o do meio. Depois deste primeiro passo obtém-se três triângulos congruentes cujos lados são a metade do triângulo original e que se tocam em três pontos que são vértices comuns de dois triângulos contíguos. O processo repete-se nos novos triângulos gerados, dando origem sucessivamente a 3, 9, 27, 81, 243, ... triângulos.

Outro objecto adicionado à ampla galeria do mundo fractal é a tapete de Sierpinski, também criada pelo matemático Waclaw Sierpinski. O processo de construção é semelhante à descrita para o triângulo de Sierpinski só que, agora, divide-se um quadrado em nove quadrados congruentes mais pequenos e retira-se o quadrado do centro.

A curva de Hilbert (Tabela 5.12) foi descoberta em 1981 por David Hilbert. Esta é uma curva espacial que percorre todos os pontos de uma grelha quadrada com um tamanho de  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  ou qualquer outra potência de 2. As aplicações da curva de Hilbert são fundamentalmente ao nível do processamento de imagem, principalmente quando é requerida uma coerência entre os vários “pixels” de uma operação. O elemento base da curva de Hilbert é um quadrado incompleto (sem uma das faces). O lado “aberto” do quadrado, pode ser no topo, em baixo, à esquerda ou à direita, possuindo a abertura dois pontos de união, que se podem associar a outro elemento. Desta forma, existem oito possíveis combinações entre os elementos. A primeira iteração desta curva consiste num único elemento. Numa segunda iteração este é substituído por quatro elementos mais pequenos, os quais são unidos pelos seus pontos de junção. Todas as outras iterações repetem o processo ou substituem o elemento existente por quatro mais pequenos e pelos correspondentes pontos de união.

A curva de Peano (Tabela 5.12) surgiu em 1890, através de um artigo publicado por Giuseppe Peano, sendo constituída através de um processo análogo ao da curva de Koch, ou seja, por iterações gráficas. Esta curva tem a particularidade de passar, pelo menos uma vez, por todos os pontos de um quadrado. Este fractal tem como elemento base um segmento de recta. Este segmento de recta é dividido em três partes iguais, no qual se constrói um rectângulo no seu terço médio. Este rectângulo bissecta o terço da recta, formando dois quadrados com lado igual ao terço que lhe deu origem. Nas iterações seguintes, repete-se todo este procedimento para cada um dos nove segmentos de recta resultantes.

A dimensão de um fractal ( $DF$ ) representa o grau de ocupação deste no espaço, e está relacionada com o seu grau de irregularidade. Por esse motivo, a dimensão fractal assume-se como uma importante característica das geometrias fractais, se não vejamos. A dimensão fractal é dada por:

$$DF = \frac{\log(N)}{\log(1/\eta)} \quad (5.9)$$

Para um segmento de recta com comprimento  $L$ , se dividirmos o  $L$  em  $N$  partes iguais, obtemos novos segmentos de tamanho inferior e igual a  $\eta$ , pelo que o comprimento total é dado por  $L = N\eta$ . Neste caso, se dividir uma recta de comprimento unitário em três partes iguais, retirando o segmento do meio, a dimensão fractal é  $DF = \frac{\log(2)}{\log(1/(1/3))} = 0,63$ , sendo  $N = 2$  e  $\eta = 1/3$ .

No entanto, verifica-se uma excepção na determinação da  $DF$ . Nomeadamente, no caso das curvas de Hilbert e de Peano e, após um infinito número de iterações, prevê-se resultar uma superfície completamente preenchida, daí o facto de ambas as estruturas possuírem dimensão fractal igual a 2.

Refira-se ainda que esta não é a única descrição para a geometria fractal, mas é a suficiente para a identificação do grupo com geometrias de natureza semelhante.

## 5.4. Condensadores Fraccionários

A absorção dieléctrica nos condensadores é difícil de caracterizar com precisão, seja devido ao elevado valor da constante de tempo envolvida, seja devido à exigência de uma grande precisão dos equipamentos de medida.

Os condensadores mais simples são constituídos por duas placas paralelas separadas por um isolante chamado dieléctrico. São vários os factores que são susceptíveis de influenciar a capacidade de um condensador. No entanto, três factores têm uma importância especial, nomeadamente a superfície das placas, a distância entre elas (*i.e.*, a espessura do dieléctrico) e a substância da qual é constituído o dieléctrico.

A superfície das placas constitui um factor muito importante para a capacidade de um condensador, já que esta depende, directamente, da superfície das placas (*i.e.*, quanto maior a superfície das placas, maior será a capacidade do condensador).

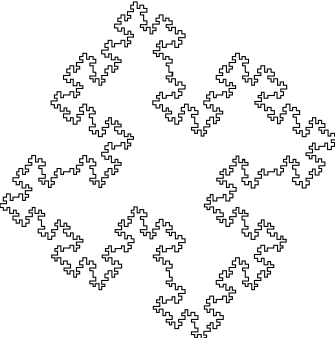
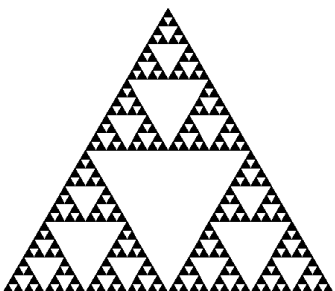
A distância entre as placas está também relacionada com a capacidade do condensador pois a influência da carga de uma placa sobre a outra é tanto maior quanto mais próximas estiverem as placas.

Mantendo constantes a distância entre as duas placas e a superfície das placas, a capacidade poderá ainda variar segundo os materiais utilizados no dieléctrico. A capacidade poderá ainda ser aumentada, adoptando-se materiais com constantes dieléctricas superiores.

No âmbito deste trabalho estudou-se um outro factor que pode também influenciar a capacidade de um condensador, nomeadamente a rugosidade das suas placas. Assim, foram desenvolvidas placas de circuito impresso, na qual foram implementadas as estruturas fractais que se encontram tabeladas na Tabela 5. 12. A opção pelas estruturas fractais, prende-se com a estreita relação existente entre os fractais e os sistemas de ordem fraccionária, bem como com a complexidade de modelação da textura intrínseca aos eléctrodos.

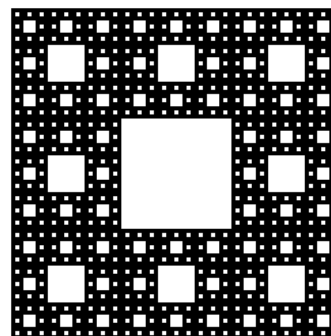
Por outro lado, a escolha destas geometrias, de um role bastante diversificado, deveu-se ao valor da dimensão fractal das estruturas que se pretendeu estar compreendida entre 1 e 2.

Tabela 5.12 - Estruturas fractais usadas para a criação das placas de circuito impresso.

Designação	Dimensão Fractal	Estrutura
Curva de Koch	1,262	
Triângulo Sierpinski	1,585	

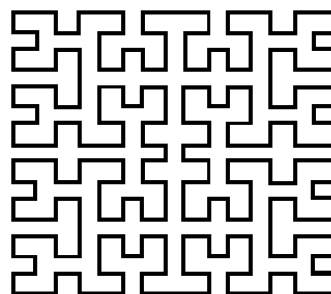
Carpete Sierpinski

1,893



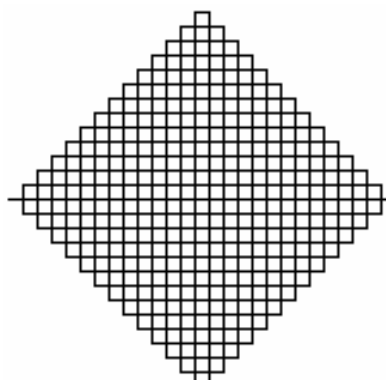
Hilbert

2,000



Peano

2,000



Foram aplicados sinais de excitação sinusoidais  $v(t)$  com diversas frequências  $\omega$  (Figura 5.10) e foram calculadas as impedâncias  $Z(j\omega)$  nos terminais dos eléctrodos, com base na tensão  $u(t)$  e na corrente  $i(t)$  medidas. Mais ainda, foram medidos outros factores de impacte no sistema, nomeadamente a influência da dimensão fractal  $D$ , a superfície das estruturas fractais  $S$  (por simplificação na apresentação dos dados obtidos, considerou-se  $S = 1$  como sendo a superfície que serviu de base às medições), diferentes



concentrações de cloreto de sódio (NaCl) e, também, o efeito produzido pela colocação de outros materiais imersos na solução, nomeadamente cascalho e areia. De referir que, em cada experiência, foram utilizados dois eléctrodos idênticos (com a mesma dimensão fractal e a mesma superfície). A tensão, a resistência de adaptação  $R_a$  e a distância entre eléctrodos  $D_{elec}$  foram sempre as mesmas em todas as experiências ou seja,  $V_0 = 10$  V,  $R_a = 1,2$  k $\Omega$  e  $D_{elec} = 0,13$  m. Esta metodologia visa a compreensão de como estes factores influenciam o valor da impedância  $Z(j\omega)$  no comportamento do condensador fractal.

Numa primeira fase o processo de electrólise implementado consiste numa solução de cloreto de sódio (NaCl), com uma concentração de 5 g/litro, e em dois eléctrodos imersos, constituídos por duas placas de circuito impresso, na qual foram inscritas geometrias fractais tipo tapete de Sierpinski.

A Figura 5.11 ilustra os diagramas de Bode da amplitude de  $Z(j\omega)$ . Os resultados revelam que o sistema possui uma impedância de ordem fraccionária. De facto, aproximando os resultados experimentais no diagrama de Bode da amplitude através de uma função potência, dada por  $|Z(j\omega)| = a\omega^{-b}$ , obtém-se  $(a; b) = (231,84; 0.5326)$  e  $(a; b) = (42,651; 0,0669)$ , respectivamente às baixas e às altas frequências.

Mais uma vez, se compararmos o diagrama polar da Figura 5.12 e a admitância apresentada na Tabela 5.1, verifica-se que este sistema possui semelhanças com um circuito RC paralelo.

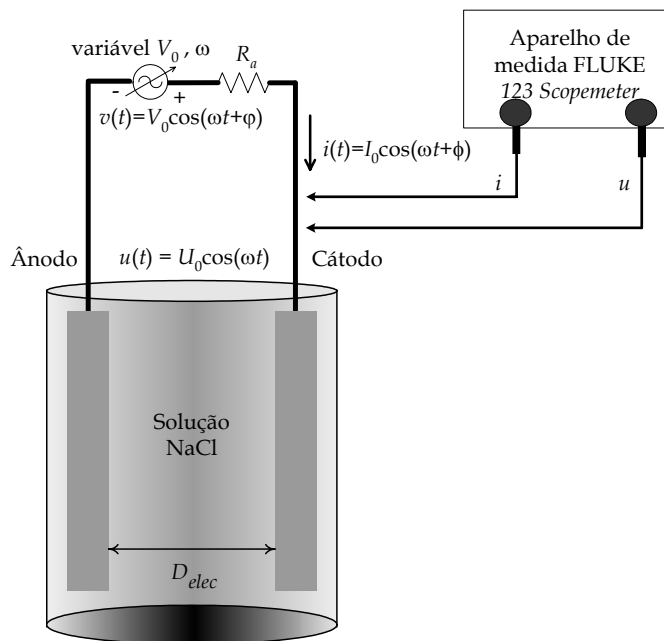


Figura 5.10 - Processo electrolítico.

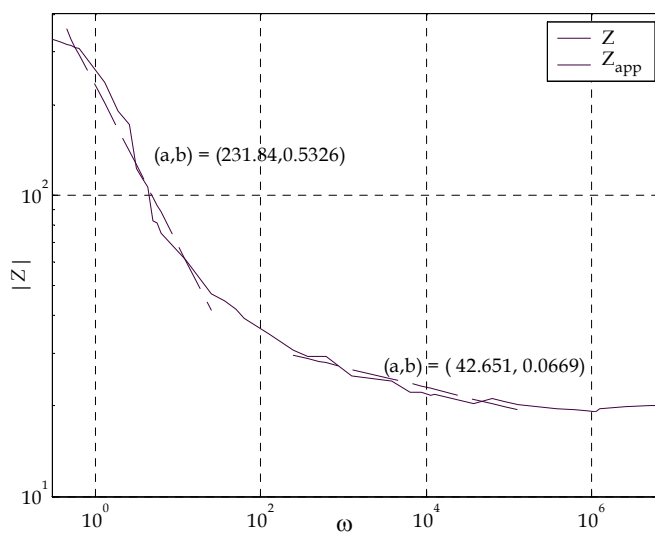


Figura 5.11 - Diagrama de Bode da amplitude da impedância  $Z(j\omega)$  para a carpete de Sierpinski.

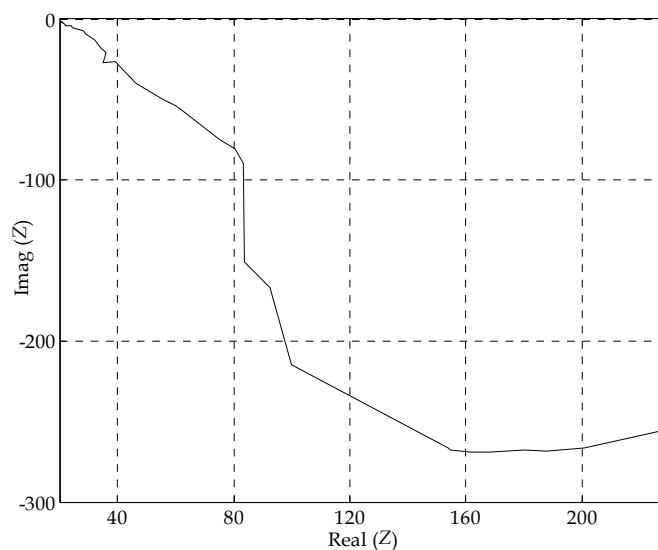


Figura 5.12 – Diagrama polar da impedância  $Z(j\omega)$  para a carpete de Sierpinski.

Numa segunda experiência, e com a finalidade de se estudar o efeito do dieléctrico, submergiu-se na solução aquosa de 5g/l os mesmos eléctrodos utilizados na experiência anterior, mas acrescentou-se cascalho de tamanho aproximadamente uniforme, Figura 5.13. Nesta experiência, teve-se em atenção a colocação de cascalho em quantidade suficiente para cobrir completamente os eléctrodos, por forma a serem diminuídas as perdas devidas às capacidades parasitas, originadas pelos campos eléctricos de fluxo lateral e de fluxo vertical existente entre as placas paralelas que formam os eléctrodos.

Com esta experiência obteve-se um dieléctrico não homogéneo e com características fractais. Manteve-se o valor da tensão igual á experiência anterior  $V_0 = 10$  v, bem como a resistência de adaptação  $R_a = 1,2$  k $\Omega$ , levando às seguintes aproximações de  $|Z(j\omega)|$ ,  $(a; b) = (336,63; 0,3353)$  e  $(a; b) = (163,46; 0,1197)$ , respectivamente às baixas e às altas frequências.

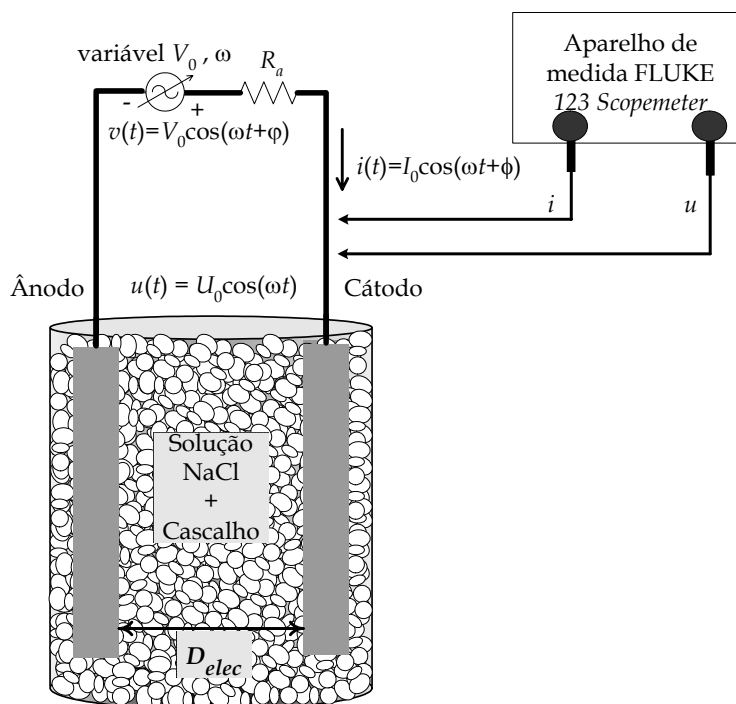


Figura 5.13 – Processo electrolítico com solução NaCl e cascalho.

O estudo foi repetido para as mesmas condições descritas anteriormente, substituindo o cascalho por areia. Obteve-se as seguintes aproximações para  $|Z(j\omega)|$ ,  $(a; b) = (322,64; 0,3467)$  e  $(a; b) = (176,49; 0,0857)$ , respectivamente às baixas e às altas frequências.

Com os resultados obtidos concluiu-se que a colocação do cascalho e da areia na solução, não fez variar significativamente os valores da ordem fraccionária  $b$ . Além disso, variando  $V_0$ , verificou-se também que o sistema é linear. A Figura 5.13 ilustra os diagramas de Bode do módulo e da fase de  $Z(j\omega)$ . A Tabela 5.13 mostra os valores das aproximações efectuadas para as partes real e imaginária de  $Z(j\omega)$ , para os três casos referidos na segunda experiência, na zona das altas frequências, já que é nesta faixa de frequências que se verificam as impedâncias de ordem fraccionária.

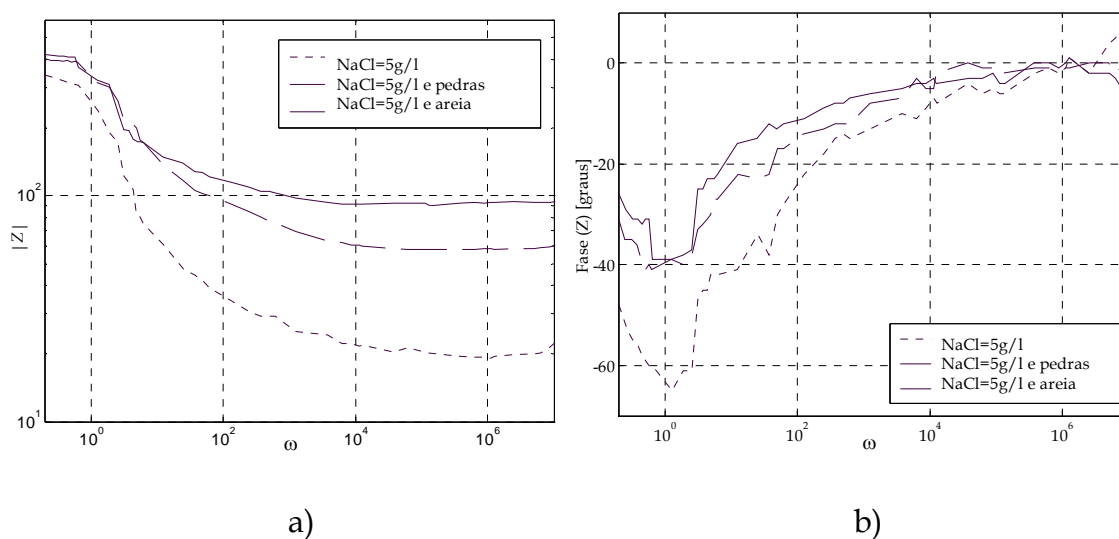


Figura 5.14 – Comparação de  $Z(j\omega)$  para a carpete de Sierpinski, para dieléctricos: NaCl = 5 g/l, NaCl = 5 g/l com cascalho e NaCl = 5 g/l com areia: a) módulo, b) fase.

Tabela 5.13 – Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para a carpete de Sierpinski e para os dieléctricos: NaCl = 5 g/l, NaCl = 5 g/l com cascalho e NaCl = 5 g/l com areia.

Dieléctrico	Re {Z}		-Im {Z}	
	a	b	a	b
NaCl 5 g/l	126,94	0,3967	147,57	0,4208
NaCl 5 g/l e Cascalho	247,78	0,2418	191,01	0,4225
NaCl 5 g/l e Areia	263,90	0,2256	140,82	0,3488

A terceira experiência, com a carpete de Sierpinski, foi realizada com duas placas tendo 1/3 da superfície das placas anteriores (*i.e.*,  $S/3$ ). Pretende-se com esta experiência estudar a influência da superfície do objecto fractal, no valor da impedância fraccionária. Neste caso manteve-se o valor da tensão igual

ao da experiência anterior  $V_0 = 10$  v, a mesma resistência de adaptação  $R_a = 1,2$  k $\Omega$ , e a mesma solução de 5 g/litro, sem cascalho e sem areia. Os resultados assintóticos para  $|Z(j\omega)|$  são:  $(a; b) = (456,08; 0,1058)$  às baixas frequências e  $(a; b) = (540,00; 0,1349)$  às altas frequências. A Tabela 5.14 apresenta os valores das aproximações das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$  e  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ , para  $S = 1$  e  $S = 1/3$ , na zona das altas frequências. Deste estudo, realizado com a carpete de Sierpinski, e de outros semelhantes realizados com outros fractais, conclui-se que não existe uma relação clara sobre como varia a impedância em função da superfície do fractal. No entanto, verifica-se que o parâmetro  $a$  diminui e que a ordem fraccionária  $b$  aumenta quando se aumenta a superfície do fractal, pelo que se conclui que a fraccionalidade da impedância eléctrica depende da superfície total do fractal.

Numa quarta experiência, avaliou-se  $Z(j\omega)$  para eléctrodos com o objecto fractal carpete de Sierpinski, sendo  $S = 1$  mas tendo uma concentração da solução aquosa NaCl = 10 g/l. Manteve-se a resistência de adaptação  $R_a = 1,2$  k $\Omega$  e a tensão aplicada  $V_0 = 10$  v. Os resultados assintóticos para  $|Z(j\omega)|$  são:  $(a; b) = (206,38; 0,4233)$  e  $(a; b) = (11,637; 0,0173)$ , respectivamente às baixas e às altas frequências.

Tabela 5.14 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para a carpete de Sierpinski com  $S = 1$  e  $S = 1/3$ .

Superfície	Re {Z}		-Im {Z}	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
S = 1	126,94	0,3967	147,57	0,4208
S = 1/3	483,95	0,1004	241,14	0,2407

A Tabela 5.15 apresenta os valores das aproximações das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$  e  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ , para soluções aquosas de NaCl = 5 g/l e de NaCl = 10 g/l, ambas para as altas frequências. Verifica-se que a variação da concentração da solução aquosa não origina uma variação significativa da ordem fraccionária  $b$ .

Estes resultados mostram que a variação das características do dieléctrico não interfere significativamente com a ordem fraccionária  $b$  da impedância. Nesta ordem de ideias, organizaram-se experiências similares para todos os fractais referidos na Tabela 5.12, com vista ao estudo da interferência da dimensão fractal na ordem fraccionária das impedâncias. Em todas as experiências a seguir apresentadas, manteve-se a resistência de adaptação  $R_a$ . As Tabelas 5.16 a 5.21 ilustram os valores das aproximações às altas frequências das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$  e  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ , de todos os fractais e para os diversos dieléctricos.

Tabela 5.15 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para a carpete de Sierpinski com dieléctricos de NaCl = 5 g/l e NaCl = 10 g/l.

Solução	Re {Z}		-Im {Z}	
	$a$	$b$	$a$	$b$
NaCl 5 g/l	126,94	0,3967	147,57	0,4208
NaCl 10 g/l	121,59	0,3367	190,50	0,5717

Tabela 5.16 – Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 5 g/l.

Dieléctrico	Designação	Dimensão Fractal	Re {Z}		-Im {Z}	
			a	b	a	b
NaCl = 5 g/l	Curva de Koch	1,262	182,36	0,3863	200,19	0,4639
	Triângulo Sierpinski	1,585	206,69	0,3457	191,10	0,4547
	Carpete Sierpinski	1,893	126,94	0,3967	147,57	0,4208
	Hilbert	2,000	167,09	0,3988	218,38	0,4602
	Peano	2,000	175,45	0,4108	169,06	0,4385

Tabela 5.17 – Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 5 g/l e cascalho.

Dieléctrico	Designação	Dimensão Fractal	Re {Z}		-Im {Z}	
			a	b	a	b
NaCl = 5 g/l e cascalho	Curva de Koch	1,262	305,28	0,3070	331,22	0,5207
	Triângulo Sierpinski	1,585	173,41	0,2289	113,90	0,3208
	Carpete Sierpinski	1,893	247,78	0,2418	191,01	0,4225
	Hilbert	2,000	235,28	0,3796	172,33	0,4319
	Peano	2,000	242,94	0,2939	172,47	0,4364



Tabela 5.18 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 5 g/l e areia.

Dieléctrico	Designação	Dimensão Fractal	Re {Z}		-Im {Z}	
			a	b	a	b
NaCl = 5 g/l e areia	Curva de Koch	1,262	274,54	0,2252	168,67	0,4021
	Triângulo Sierpinski	1,585	132,95	0,2603	210,29	0,5667
	Carpete Sierpinski	1,893	263,90	0,2256	140,82	0,3488
	Hilbert	2,000	241,60	0,3141	317,41	0,6005
	Peano	2,000	276,48	0,2462	177,94	0,4106

Tabela 5.19 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 10 g/l.

Dieléctrico	Designação	Dimensão Fractal	Re {Z}		-Im {Z}	
			a	b	a	b
NaCl = 10 g/l	Curva de Koch	1,262	121,94	0,4229	138,11	0,5049
	Triângulo Sierpinski	1,585	107,02	0,4573	169,91	0,5896
	Carpete Sierpinski	1,893	121,59	0,3367	190,50	0,5717
	Hilbert	2,000	113,36	0,4797	128,90	0,4890
	Peano	2,000	144,60	0,3408	139,77	0,4574

Tabela 5.20 – Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 10 g/l e cascalho.

Dieléctrico	Designação	Dimensão Fractal	Re {Z}		-Im {Z}	
			a	b	a	b
NaCl = 10 g/l e cascalho	Curva de Koch	1,262	141,79	0,4193	121,36	0,4973
	Triângulo Sierpinski	1,585	194,73	0,3280	176,45	0,3958
	Carpete Sierpinski	1,893	131,67	0,3369	130,73	0,5753
	Hilbert	2,000	126,64	0,4384	128,58	0,6871
	Peano	2,000	127,03	0,4150	102,21	0,5620

Tabela 5.21 – Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para as diversas estruturas fractais *versus* NaCl = 10 g/l e areia.

Dieléctrico	Designação	Dimensão Fractal	Re {Z}		-Im {Z}	
			a	b	a	b
NaC = 10 g/l e areia	Curva de Koch	1,262	131,62	0,3380	71,408	0,4820
	Triângulo Sierpinski	1,585	11252,00	0,0189	759,320	0,2248
	Carpete Sierpinski	1,893	133,67	0,3756	67,554	0,5184
	Hilbert	2,000	127,81	0,4050	95,348	0,6690
	Peano	2,000	130,41	0,3393	76,137	0,5537

Com este estudo, verificou-se que a ordem fraccionária  $b$  é quase invariante com a dimensão fractal dos eléctrodos.

Numa última experiência, utilizou-se uma placa de circuito impresso de face dupla, onde foram inscritas em cada uma das suas faces, o fractal carpete de Sierpinski (desenho idêntico ao das experiências realizadas com placas de face simples). Neste estudo, o dieléctrico é formado pela própria placa. Foi aplicada uma tensão  $V_0 = 10$  v e foi utilizada uma resistência de adaptação  $R_a = 1,2$  k $\Omega$ . Os resultados assintóticos obtidos para as aproximações das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$  e  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ , às altas frequências, estão indicados na Tabela 5.22.

Na Tabela 5.22 estão também ilustrados os valores obtidos para as partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$  e  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ , para uma placa de circuito impresso com o fractal triângulo de Sierpinski, também na zona das altas frequências.

Uma vez mais, verifica-se que as diferentes estruturas fractais implementadas em placas de circuito impresso de dupla face, não originam uma variação significativamente da ordem fraccionária  $b$ . No entanto, quando se comparam as estruturas fractais, triângulo e carpete de Sierpinski inscritas em

Tabela 5.22 - Comparação das partes real e imaginária,  $\text{Re}\{Z\} = a\omega^{-b}$  e  $-\text{Im}\{Z\} = a\omega^{-b}$ , às altas frequências, para eléctrodos de dupla face com os objectos fractais carpete e triângulo de Sierpinski.

Designação	Dimensão Fractal	Re {Z}		-Im {Z}	
		$a$	$b$	$a$	$b$
Carpete Sierpinski	1,893	$1,5484 \times 10^{11}$	1,2936	$1,4124 \times 10^7$	0,6664
Triângulo Sierpinski	1,585	$1,1599 \times 10^{11}$	1,2825	$1,1786 \times 10^7$	0,6592

placas de circuito impresso com dupla face, com as suas equivalentes em placas de circuito impresso de face simples com um electrólito apenas constituído por uma solução aquosa de NaCl de 5 g/l ou de 10g/l, verifica-se:

- ❖ um acentuado aumento do valor do parâmetro  $a$ , tanto para a parte real,  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$ , como para a parte imaginária,  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ ;
- ❖ o parâmetro  $b$ , revela um acentuado aumento na parte real,  $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$ , sendo mais ligeiro na parte imaginária,  $-\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ .

Verifica-se assim, que as duas soluções apresentadas, com placas de circuito impresso de face simples e de dupla face, permitem concluir que a boa utilização destes condensadores, favorece a escolha da ordem fraccionária adequada a uma aplicação, já que passamos a ter condensadores com ordens fraccionárias compreendidas entre 0,3 e 1,3.

Uma das aplicações possíveis para este tipo de “condensadores fractais”, é, por exemplo, a sua utilização em circuitos eléctricos de energia onde se pretenda efectuar uma correcção do factor de potência.

### 5.5. Conclusões

O cálculo fraccionário foi introduzido inicialmente na ciência sob um ponto de vista puramente matemático. No entanto, hoje em dia, este conceito atingiu uma considerável aplicação no domínio da física, da engenharia, da biologia, da medicina, da economia, da indústria e em muitos outros domínios.

Neste capítulo, e mais precisamente na primeira parte, aplicaram-se os conceitos do CF e da teoria inerente às impedâncias eléctricas, a diversos vegetais e frutos. Nesta ordem de ideais foram desenvolvidas várias

experiências para a medição da impedância de elementos botânicos. O estudo foi realizado no domínio das frequências, suportado pelos diagramas polar e de Bode da amplitude e da fase e foram formuladas as relações com as impedâncias eléctricas. Os resultados obtidos revelaram que as impedâncias possuem diferentes características para as baixas e para as altas frequências. Em qualquer caso, as impedâncias mantêm-se aproximadamente lineares quando as condições do sistema são modificadas. Mais ainda, as impedâncias possuem características de ordem fraccionária às altas frequências e revelam similaridades com condensadores eléctricos fraccionários, designados por vezes de “fractâncias”.

Foi apresentado um modelo do circuito equivalente das impedâncias dos vegetais e dos frutos utilizados nas diversas experiências. As boas aproximações obtidas entre os valores medidos das impedâncias e os resultantes da aplicação do modelo eléctrico, indicam que o modelo proposto pode ser usado no desenvolvimento de novas metodologias, industriais nomeadamente na criação de eléctrodos não intrusivos, que não necessitem de perfurar os elementos botânicos.

Na segunda parte deste capítulo, foram utilizadas algumas estruturas fractais no desenvolvimento de condensadores de ordem fraccionária com vista à criação de alternativas aos clássicos condensadores de ordem inteira. Verificou-se que é possível desenvolver condensadores com diferentes ordens de fraccionalidade variando o tipo de eléctrodo e de dieléctrico.

Conclui-se ainda que o cálculo fraccionário constitui uma importante ferramenta para descrever fenómenos físicos, adoptando conceitos alternativos que nos levam a novas perspectivas, que com as metodologias clássicas seriam impossíveis de se obter.

## Referências

---

- Ahmad Wajdi, El-Khazali R., El-Wakil A. S., (2001). Fractional Order Wien-bridge Oscillator. *Electronics Letters*, **37** (18), 1110-1112.
- Awayda Mouhamed S., Willy Van Driessche, Sandy I. Helman, (1999). Frequency-Dependent Capacitance of the Apical Membrane of Frog Skin: Dielectric Relaxation Processes. *Biophysical Journal*, **76**, 219-232.
- Barsoukov Evgenij and J. Ross Macdonald (2005). *Impedance Spectroscopy, Theory, Experiment, and Applications*. John Wiley & Sons, Inc.
- Benavente Juana, Jose M. Garcia, Robert Riley, Angel E. Lozano, Javier de Abajo, (2000). Sulfonated poly(ether ether sulfones) Characterization and study of dielectrical properties by impedance spectroscopy. *Journal of Membrane Science*, **175**, 43-52.
- Bisquert J., G. Garcia-Belmonte, (1997). Complex plane analysis of *pn* junction forward-voltage impedance. *Electronics Letters*, **33** (10), 900-901.
- Biswas Karabi, Siddhartha Sen, Pranab Kumar Dutta,(2005). Modelling of a capacitive probe in a polarizable medium. *Sensors and Actuators A: Physical*.
- Bohannan Gary W. (2002a). Interpretation of Complex Permittivity in Pure and Mixed Crystals. *Wavelength Electronics*.
- Bohannan Gary W. (2002b). Analog Realization of a Fractional Order Control Element. *Wavelength Electronics*.

- Buck Richard P., Carsten Mundt, (1996). Aperiodic equivalent circuit for charge permeable thin-layer cells of symmetric, asymmetric types. *Journal Chem. Soc., Faraday Trans*, **92** (20), 3947-3955.
- Carlson G. E., C. A. Halijak (1963). Approximation of Fractional Capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a Regular Newton Process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 210-213.
- Clerc J. P., A. M. S. Tremblay, G. Albinet, C. D. Mitescu, (1984). a. c. response of fractal networks. *Journal Physique Lett.* **45** (19), L913-L924.
- Cohen N. (1997). *Fractal antenna applications in wireless telecommunications*. In professional Program Proc. of Electronics Industries Forum of New England, IEEE, 43-49.
- Cole Kenneth S., (1933). *Electric Conductance of Biological Systems*. Proc. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol., New York, 107-116.
- Falconer, Kenneth (1990). *Fractal Geometry - Mathematical Foundation and Applications*. England: John Wiley & Sons, 1990.
- Ferrigno R., H. H. Girault, (2000). New Directions and Challenges in Electrochemistry - Finite element simulation of electrochemical ac diffusional impedance. Application to recessed microdiscs. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, **492**, 1-6.
- Franceschetti Giorgio, Maurizio Migliaccio, Daniele Riccio, (1994). A fractal based approach to electromagnetic modelling. *IEEE*, 1641-1643.
- Hamaide T., A. Guyot, A. Le Mehaute, G. Crepy, G. Marcellin, (1989). Experimental Analysis of the Scaling Properties of Solid Polymer Electrolytes upon Five Years of Storage: From Fractal Crystallization to Carrier Relaxation. *Journal of the Electrochemical Society*, **136** (11), 3152-3163.

Heaviside Oliver (1893). *Electromagnetic Theory*. London.

Ho C., I. D. Raistrick e R. A. Huggins (1980). Application of AC Techniques to Study of Lithium Diffusion in Tungsten Trioxide Thin Films. *Journal of the Electrochemical Society*, **127**, 343-350.

Jacquelin J., (1991). *Synthese de circuits electriques equivalents a partir de mesures d'impedances complexes*. 5ème Forum sur les impedances electrochimiques, 287-295, Montrouge.

Jesus I. S., J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha, Manuel F. Silva (2006a). *Fractional Order Electrical Impedance of Fruits and Vegetables*. MIC 2006 - The 25th IASTED International Conference on Modeling, Identification and Control. Spain.

Jesus Isabel S., J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha (2006b). *Fractional Electrical Dynamics in Fruits and Vegetables*. FDA 2006 - 2nd IFAC workshop on Fractional Differentiation and its Applications. Porto, Portugal.

Jesus Isabel S., J. A. Tenreiro Machado, J. Boaventura Cunha (2007). Fractional Electrical Impedances in Botanical Elements. Artigo aceite para publicação no *Journal of Vibration and Control*, no número especial "Fractional Differentiation and its Applications", Editora Sage.

Jonscher A. K. (1993). *Dielectric Relaxation in Solids*. Chelsea Dielectric Press, London.

Korosak Dean, (2001). Applications of Fractional Calculus in The Analysis of Dielectric Response of Porous Media. *Journal Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **4** (1), 1-3.

Machado J. A. Tenreiro, Isabel S. Jesus (2004). A Suggestion from the Past?. *FCAA - Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis*, **7** (4).



- Machowski P., J. E. Garbarczyk, M. Wasiucionek, (2003). Impedance spectra of mixed conductive silver vanadate-phosphate glasses. *Journal of Solid State Ionics*, **157**, 281-285.
- Magin R. L. e M. Ovadia (2006). *Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus*. FDA 2006 – 2nd IFAC workshop on Fractional Differentiation and its Applications. Porto, Portugal.
- Mahon Peter J., George L. Paul, Sarkis M. Keshishian, Anthony M. Vassallo, (2000). Measurement and modelling of the high-power performance of carbon-based supercapacitors. *Journal of Power Sources*, **91**, 68-76.
- Martinsen Orjan G., Sverre Grimnes, Herman P. Schwan, (2002). Interface Phenomena and Dielectric Properties of Biological Tissue. *Encyclopedia of surface and colloid Science*, 2643-2652.
- Mehaute A. Le, G. Crepy, (1983). Introduction to Transfer and Motion in Fractal Media: The Geometry of Kinetics. *Journal of Solid State Ionics*, **9 & 10**, 17-30.
- Mehaute Alain Le, (1990). *Fractal Geometries: Theory and Applications*. Penton Press, London.
- Moshrefi-Torbati M., J. K. Hammond, (1998). Physical and Geometrical Interpretation of Fractional Operators. *Journal Franklin Inst.*, **335B** (6), 1077-1086.
- Nigmatullin R. R. e S. O. Nelson (2006). Recognition of the “fractional” kinetics in complex systems: Dielectric properties of fresh fruits and vegetables from 0.01 to 1.8GHz. *J. Signal Processing*, **86**, 2744-2759.
- Niu J., J. Y.Lee, (2000). A New Approach for the Determination of Fish Freshness by Electrochemical Impedance Spectroscopy. *Journal of Food Science*, **65** (5), 2000.

- Puente-Baliarda C., J. Romeu, A. Cardama (2000). The Koch monopole: A small fractal antenna. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **48**, 1773-1781.
- Roy Suhash C. Dutta, (1967). On the Realization of a Constant-Argument Immittance or Fractional Operators. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, **ct-14** (3), 264-273.
- Samavati Hirad, Ali Hajimiri, Arvin R. Shahani, Gitty N. Nasserbakht, Thomas H. Lee (1998). Fractal Capacitors. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, **33** (12), 2035-2041.
- Sluyters-Rehbach M., (1994). Impedances of Electrochemical Systems: Terminology, nomenclature and representation. Part I: Cells with metal electrodes and liquid solutions. *Pure & Appl. Chem.*, **66** (9), 1831-1891.
- Stiassnie M., (1997). A look at fractal functions through their fractional derivatives. *Fractals*, **5** (4), 561-564.
- Tatom Frank B. (1995). The relationship between fractional calculus and fractals. *Fractals*, **3** (1), 217-229.
- Vinogradov Aleksandra M., V. Hugo Schmidt, George F. Tuthill, Gary W. Bohannan (2004). Damping and electromechanical energy losses in the piezoelectric polymer PVDF. *Mechanics of Materials*, **36**, 1007-1016.
- Vinoy K. J., K. A. Jose, V. K. Varadan (2000). Hilbert curve fractal antenna: A small resonant antenna for VHF/UHF applications. *Microwave & Opt. Technol. Lett.*, **29**, 215-219.
- Vinoy K. J., K. A. Jose, V. K. Varadan (2001). Resonant frequency of Hilbert curve fractal antenna. IEEE-AP-S International Symposium. Boston, Digest vol. III, 648-651.

Vorpérian Vatché, (1992). A fractal modelo of anomalous Losses in ferromagnetic materials. *IEEE*, 1277-1283.

Westerlund Svante (1994). Capacitor Theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, **1** (5), 826-839.

Zorpette Glenn, (2005). Super Charged. *IEEE Spectrum*, 26-31.



# *Capítulo 6*

---

## ***CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTO FUTURO***

Os conceitos associados ao cálculo fraccionário constituem uma ferramenta útil para descrever fenómenos físicos, tais como o calor, o fluxo, a electricidade, o electromagnetismo, os sistemas mecânicos ou a dinâmica de fluídos.

Presentemente, a teoria do CF é aplicada em quase todas as áreas da ciência, da física e da engenharia, sendo reconhecido o seu mérito na melhoria da modelização, da análise dinâmica e do controlo em muitos sistemas. De facto, durante os últimos anos o CF tem tido uma crescente aplicabilidade na descrição do comportamento de materiais e de sistemas físicos que exibam hereditariedade e propriedades de memória. Esta é a principal vantagem das derivadas de ordem fraccionária em comparação com os modelos clássicos de ordem inteira, onde estes efeitos são simplesmente negligenciados.

Este capítulo tem por base apresentar as principais conclusões, contribuições e perspectivas de desenvolvimento futuro, decorrentes desta tese.

Assim, este capítulo é constituído por três secções. Na secção 6.1 são referidas as principais conclusões, na secção 6.2 referem-se as principais contribuições para as áreas científicas envolvidas neste trabalho e, por último, na secção 6.3 são apresentadas algumas das perspectivas de desenvolvimento futuro.

## ***6.1 Principais Conclusões***

Nesta secção são apresentadas as principais conclusões resultantes do trabalho efectuado para esta tese de Doutoramento.

No que concerne ao Capítulo 2 foram apresentados os principais conceitos, definições e funções matemáticas do CF que serviram de base ao estudo efectuado ao longo dos restantes capítulos. A transformada de Laplace foi também abordada com vista a facilitar o estudo no domínio das frequências dos diversos sistemas estudados.

As referências apresentadas permitem identificar as principais áreas científicas que adoptaram o CF, bem como alguns dos trabalhos desenvolvidos nos campos da ciência, da física e da engenharia. Foi também efectuada uma breve descrição de trabalhos desenvolvidos nas mesmas áreas de intervenção desta tese, nomeadamente os sistemas de difusão, controlo fraccionário, potencial eléctrico e circuitos eléctricos com estruturas fractais.

No Capítulo 3 estudaram-se dois sistemas de difusão sob o ponto de vista do CF, a saber, as linhas eléctricas de transmissão e a difusão de calor. Concluiu-se que as linhas eléctricas de transmissão possuem às altas frequências impedâncias de ordem 0,5, o que leva a sugerir o desenvolvimento de novas estruturas com impedâncias fraccionárias.

Relativamente ao sistema de difusão de calor, verificou-se que também este é descrito através do operador derivativo de ordem fraccionária  $s^{0.5}$ . Constatou-se, ainda, que este sistema possui um atraso na resposta ao degrau unitário, bem como um acentuado erro em regime permanente. Tendo a dinâmica destes sistemas em mente, aplicaram-se seis estratégias de controlo baseadas nos controladores PID e PID<sup>β</sup>, bem como uma estrutura de PS usada frequentemente para eliminar tempos de atraso na resposta de muitos sistemas dinâmicos. Para a estrutura de PS utilizaram-se dois modelos de primeira ordem com atraso, obtidos através das heurísticas de Ziegler Nichols e através da minimização do erro quadrático entre o método numérico e a aproximação, no domínio das frequências.

No tocante à área de sistemas concluiu-se que os algoritmos PID<sup>β</sup> propostos, revelam propriedades e desempenhos superiores quando comparados com os controladores clássicos de ordem inteira, principalmente quando aplicados na dinâmica de sistemas de ordem fraccionária, como é o caso do sistema de difusão de calor. Mais ainda, verificou-se que a estrutura de controlo PID<sup>β</sup> produz melhores resultados do que os obtidos através da estrutura PS. Essa conclusão revelou-se de elevada importância já que, a implementação da estrutura de controlo PID<sup>β</sup> é consideravelmente mais fácil do que a da estrutura de PS. Este estudo permite contribuir com a simplificação das estruturas de controlo usualmente utilizadas no controlo de sistemas com atraso, revelando consideráveis melhorias nos seus desempenhos.

O Capítulo 4 introduz os conceitos fundamentais do electromagnetismo, dos quais se destacam as equações de Maxwell, o efeito pelicular e as correntes de Eddy (ou Foucault). Para o efeito pelicular são apresentados quatro modelos de aproximações às impedâncias de cabos eléctricos, numa perspectiva do CF sendo, para tal, considerados vários índices de desempenho com vista a quantificar o erro introduzido pelas mesmas. De realçar, que todos os modelos

obtidos possuem uma ordem fraccionária 0,5, pelo que se admitiu que esta está relacionada com a geometria intrínseca destes fenómenos.

Neste capítulo, foram ainda referidos os aspectos teóricos relacionados com o potencial eléctrico estático, tendo-se verificado a existência de uma relação conceptual entre as parcelas das expressões do potencial eléctrico e as derivadas e integrais de ordem inteira. Tendo esta constatação em mente, estudou-se, para um filamento com comprimento finito  $l$ , a possibilidade de implementação de um multipólo fraccionário. Para tal, implementaram-se dois algoritmos numéricos, um dos quais através da aplicação de metodologias clássicas de programação e o outro através de algoritmos genéticos. Foi ainda analisada a influência no potencial de uma distribuição simétrica ou assimétrica de cargas. Concluiu-se que o potencial eléctrico resultante possui características de ordem fraccionária. No entanto, ao contrário do que acontece com o potencial eléctrico de ordem inteira, que possui uma natureza global, o potencial eléctrico fraccionário apenas possui uma natureza local, pelo que apenas se consegue detectá-lo numa região restrita. Mais ainda, pela análise do posicionamento das cargas eléctricas, constatou-se a impossibilidade de se definir um padrão geométrico que as descreva. Verificou-se que, quando se comparam os desempenhos dos algoritmos os AGs se revelam superiores pois apresentam um menor erro da aproximação e um menor tempo computacional. O estudo efectuado para o potencial eléctrico, corresponde à primeira etapa para o desenvolvimento sistemático desta técnica, pois poderão ser estudados e validados outros aspectos inerentes ao potencial eléctrico.

No Capítulo 5 descrevem-se várias experiências efectuadas com impedâncias eléctricas analisadas na perspectiva do CF. Assim, introduziram-se alguns conceitos teóricos relacionados com as impedâncias de ordem fraccionária, que viriam posteriormente a servir de base ao estudo. As experiências consistiram na medição das impedâncias de diversos frutos e



vegetais e na posterior análise das mesmas no domínio das frequências. Verificou-se que todas as impedâncias dos vegetais e dos frutos possuem diferentes características às altas e às baixas frequências, mantendo no entanto, a sua natureza linear quando se alteram as condições do sistema, nomeadamente quando se altera a amplitude do sinal de entrada do sistema ou se varia a temperatura, o peso ou o comprimento do eléctrodo introduzido no sistema. Além disso, todas as impedâncias revelaram às altas frequências, similaridades com condensadores de ordem fraccionária, designados usualmente por fractâncias.

Para a modelização dos vegetais e dos frutos efectuou-se uma aproximação das impedâncias através do circuito Randles, o qual revelou bons resultados. Por isso conclui-se que este modelo pode ser utilizado para a fabricação de inovadoras metodologias ao nível industrial, visando a optimização do método adoptado, nomeadamente no desenvolvimento de novos eléctrodos não intrusivos.

Numa segunda parte deste capítulo, utilizaram-se placas de circuito impresso com estruturas fractais impressas nas suas faces, visando a criação de condensadores de ordem fraccionária que constituam uma alternativa tecnológica aos clássicos condensadores.

## ***6.2 Contribuições deste Trabalho***

A concretização dos objectivos propostos para este trabalho levou à realização de vários estudos em diversas áreas, visando a análise dinâmica de sistemas.

Deste trabalho surgiram as seguintes contribuições para as áreas científicas estudadas:

- ❖ desenvolvimento de novos algoritmos de controlo para compensar efeitos de atraso na resposta de sistemas de ordem fraccionária;
- ❖ apresentação de novas interpretações de fenómenos electromagnéticos tais como o efeito pelicular, as correntes de *Eddy* e o potencial eléctrico;
- ❖ proposta de uma nova técnica para medição da maturidade de frutos e vegetais;
- ❖ introdução de conceitos inovadores para o desenvolvimento de condensadores fraccionários como alternativa aos elementos clássicos.

### ***6.3 Perspectivas de Desenvolvimento Futuro***

Decorrente da investigação efectuada ao longo deste trabalho surgiram várias linhas de orientação para desenvolvimentos futuros, nomeadamente no que concerne aos sistemas de difusão de calor. Assim, num futuro próximo pretende-se:

- ❖ desenvolver modelos aproximados de ordem fraccionária com vista a uma reavaliação da estrutura de PS com o algoritmo  $PI^{\alpha}D^{\beta}$ ;
- ❖ estudar novos índices de desempenho.

Relativamente aos fenómenos electromagnéticos efeito pelicular e corrente de *Eddy* prevê-se:

- ❖ estudar os fenómenos noutras geometrias de condutores;

- ❖ correlacionar as geometrias dos condutores com os valores dos modelos de ordem fraccionária propostos.

Para o potencial eléctrico pretende-se:

- ❖ comparar os padrões de distribuição de cargas obtidos com estruturas fractais;
- ❖ estudar o potencial eléctrico resultante da distribuição de cargas eléctricas noutras configurações, tais como em dois filamentos ou numa superfície.

Relativamente às impedâncias de ordem fraccionária estão em vista:

- ❖ a realização de um protótipo para a medição da maturidade de frutos e vegetais sem a intrusão dos eléctrodos, e baseado no modelo do circuito apresentado no Capítulo 5;
- ❖ o desenvolvimento de condensadores de ordem fraccionária baseados em estruturas fractais.

Os objectivos propostos surgem no seguimento natural dos estudos efectuados para a concretização deste Doutoramento, bem como dos resultados obtidos nas áreas abordadas.

Como conclusão final, pode-se afirmar que os objectivos propostos para este trabalho foram cumpridos.



# Anexo A

---

## DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DO CÁLCULO FRACCIONÁRIO

Neste anexo são apresentadas na Tabela A.1 as derivadas e os integrais de ordem fraccionária de algumas funções matemáticas. Na Tabela A.2 são indicadas algumas das principais definições de derivadas e integrais de ordem fraccionária [Samko, *et al.*, (1987)], [Oldham e Spanier (1974)], [Miller e Ross (1993)], [Machado, (1995)].

Tabela A.1 - Derivadas e integrais de ordem fraccionária.

$\varphi(x), x \in \mathfrak{R}$	$I_+^\alpha \varphi(x), x \in \mathfrak{R}, \alpha \in \mathbb{C}$
$(x - a)^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (x - a)^{\alpha+\beta-1}, \operatorname{Re}(\beta) > 0$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}, \operatorname{Re}(\lambda > 0)$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin(\lambda x) \\ \cos(\lambda x) \end{cases} & \lambda^{-\alpha} \begin{cases} \sin(\lambda x - \alpha\pi/2) \\ \cos(\lambda x - \alpha\pi/2) \end{cases} & \lambda > 0, \operatorname{Re}(\alpha > 1) \\ \\ & e^{\lambda x} \begin{cases} \sin(\gamma x) \\ \cos(\gamma x) \end{cases} & \frac{e^{\lambda x}}{(\lambda^2 + \gamma^2)^{\alpha/2}} \begin{cases} \sin(\gamma x - \alpha\phi) \\ \cos(\gamma x - \alpha\phi) \end{cases} & \begin{aligned} & \phi = \arctan(\gamma/\lambda) \\ & \gamma > 0, \operatorname{Re}(\lambda) > 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Tabela A.2 - Algumas definições de integrais de ordem fraccionária.

Definição	Expressão
Grünwald-Letnikov	$I_{a+}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{h \rightarrow +0} h^{\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{x-a}{h} \right]} \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)} \varphi(x-jh)$
Riemann-Liouville	$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad a < x$
	$I_{a+}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad a < x$
Transformada de Laplace	$L\{I_{0+}^{\alpha} \varphi\} = L\{\varphi\} / s^{\alpha}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0$
	$L\{D_{0+}^{\alpha} \varphi\} = s^{\alpha} L\{\varphi\}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$
Transformada de Fourier	$F\{I_{\pm}^{\alpha} \varphi\} = F\{\varphi\} / (\mp j\omega)^{\alpha}, \quad 0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$
	$F\{D_{\pm}^{\alpha} \varphi\} = F\{\varphi\} (\mp j\omega)^{\alpha}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$

onde  $j = (-1)^{1/2}$ .

## Referências

---

- Machado J. A. Tenreiro (1995). Integrais e Derivadas Fraccionárias, aplicação à modelização e controlo. *Robótica e Automatização*, nº. 19, pp. 11–15.
- Miller K. S., B. Ross (1993). *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Oldham Keith B. e Jerome Spanier (1974). *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New York.
- Samko Stefan G., Anatoly A. Kilbas, Oleg I. Marichev (1987). *Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications*. Nauka & Tekhnika, Minsk.





# *Anexo B*

---

## *EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS*

Muitos dos fenómenos físicos, tais como a dinâmica de fluidos, electricidade, magnetismo, fenómenos mecânicos, ópticos, transferência de calor, são frequentemente descritos por equações às derivadas parciais (EDP). De facto, muitos dos fenómenos físicos são descritos matematicamente por EDPs [Stanley, (1993)].

Em contraste com as equações diferenciais ordinárias (EDO), onde a função apenas depende de uma variável, nas EDPs as funções dependem de várias variáveis (*e.g.*, uma temperatura  $u(x,t)$  que depende do deslocamento  $x$  e do tempo  $t$ ).

Na Tabela B.1 a seguir, apresentam-se algumas EDPs. Por simplificação das equações irá ser utilizada a seguinte nomenclatura:

$$u_t = \partial u / \partial t, \quad u_x = \partial u / \partial x, \quad u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$$

Tabela B.1 - Equações às derivadas parciais.

Designação	Função representativa
Equação do calor (1 dimensão)	$u_t = u_{xx}$
Equação do calor (2 dimensões)	$u_t = u_{xx} + u_{yy}$
Equação de Laplace (coordenadas polares)	$u_{rr} + u_r/r + u_{\theta\theta}/r^2 = 0 \quad r \in \mathfrak{R}$
Equação de onda (3 dimensões)	$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
Equação telegráfica	$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$

A função desconhecida  $u$  depende sempre de mais do que uma variável. A variável  $u$  é designada por variável dependente, e as variáveis em ordem às quais se deriva, designam-se por variáveis independentes.

Muitas das leis naturais da física, tais como as equações de Maxwell, as equações de Navier-Stokes, as equações de movimento de Newton e as equações de Schrödinger da mecânica quântica, são descritas por equações às derivadas parciais em função do tempo e do espaço. Nestes sistemas as derivadas parciais descrevem fenómenos tais como a velocidade, a aceleração, a força, o atrito, o fluxo ou a corrente.

## ***B.1 Tipos de EDPs***

As equações às derivadas parciais são classificadas de acordo com vários aspectos. A classificação destas equações é um conceito bastante importante,

porque a teoria geral e os métodos para a obtenção da solução usualmente utilizados apenas se aplicam a uma determinada classe de equações. São utilizados seis conceitos básicos para a sua classificação, nomeadamente:

1. *Ordem da EDP* – é obtida através da derivada parcial de maior ordem na equação;
2. *Número de variáveis* – é o número de variáveis independentes da equação;
3. *Linearidade* – as equações às derivadas parciais podem ser lineares ou não lineares. No caso das equações lineares a variável dependente  $u$  e todas as suas derivadas, aparecem numa forma linear. Mais precisamente a equação linear de segunda ordem com duas variáveis é uma equação da forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (\text{B.1})$$

onde  $A, B, C, D, E, F, G$  podem ser constantes ou representar funções de  $x$  ou  $y$ ;

4. *Homogeneidade* – a equação (B.1) é designada de homogénea se o seu lado direito  $G(x,y)$  é zero para  $x$  e  $y$ . Se  $G(x,y)$  não for idêntica a zero, então a equação é designada de não-homogénea;
5. *Tipos de coeficientes* – Se os coeficientes  $A, B, C, D, E, F$  na equação (B.1) forem constantes, então diz-se que a equação (B.1) tem coeficientes constantes; no caso contrário diz-se que a equação possui coeficientes variáveis;
6. *Três tipos básicos de equações lineares* – Todas as equações lineares de derivadas parciais, tais como a equação (B.1) são designadas por:

- a. *Parabólicas*
- b. *Hiperbólicas*
- c. *Elípticas*

As equações parabólicas descrevem o fluxo de calor e o processo de difusão e satisfazem a propriedade  $B^2 - 4AC = 0$  (e.g.,  $u_t = u_{xx}$ ).

As equações hiperbólicas descrevem a vibração de sistemas e o movimento de ondas e satisfazem a propriedade  $B^2 - 4AC > 0$  (e.g.,  $u_{tt} = u_{xx}$ ).

As equações elípticas descrevem fenómenos em regime permanente e satisfazem a propriedade  $B^2 - 4AC < 0$  (e.g.,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ).

No caso dos coeficientes serem variáveis, podem ocorrer vários casos.

Apresenta-se de seguida uma listagem de algumas das equações às derivadas parciais que descrevem fenómenos físicos.

### **Equações Parabólicas às derivadas parciais**

$u_t = \alpha^2 u_{xx}$	Eq. unidimensional da difusão
$u_t = \alpha^2 u_{xx} - hu_x$	Eq. difusão-convecção
$u_t = \alpha^2 u_{xx} - ku$	Difusão de calor-concentração com perdas laterais
$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$	Difusão com fonte de calor (ou perda)

### **Equações Hiperbólicas às derivadas parciais**

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	Eq. unidimensional da vibração de uma corda
$u_{tt} = c^2 u_{xx} - hu_t$	Vibração de uma corda com atrito
$u_{tt} = c^2 u_{xx} - hu_t - ku$	Eq. das linhas de transmissão
$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$	Eq. onda com forças de vibração
$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$	Eq. onda de dimensões superiores
$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u - hu_t$	Eq. onda com atrito

### **Equações Elípticas às derivadas parciais**

$\nabla^2 u = 0$	Equação Laplaciana
$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$	Equação de Helmholtz
$\nabla^2 u = k$	Equação de Poisson
$\nabla^2 u + k(E - V)u = 0$	Equação de Schrödinger

Os pontos que se seguem, descrevem com maior pormenor cada um dos três tipos de EDPs, apresentando-se alguns sistemas físicos que constituem um bom exemplo.

#### ***B.1.1 Equações Parabólicas***

A análise dos fenómenos físicos descritos por este tipo de equações requer três tipos de equações:

1. A EDP que descreve o fenómeno físico da transferência de calor.
2. As condições de fronteira que descrevem a natureza física do problema nas suas fronteiras.
3. As condições (iniciais) que caracterizam o fenómeno físico no início da experiência.

A equação unidimensional que descreve o fluxo de calor é dada por:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t < \infty \quad (\text{B.2})$$

onde  $u_t$  representa a taxa de variação da temperatura em função do tempo (graus/segundo) e  $u_{xx}$  compara a temperatura de um ponto, relativamente a outro ponto vizinho.

Esta equação descreve a temperatura  $u(x,t)$ , num ponto  $x$  localizado numa viga, num instante de tempo  $t$ . A constante de proporcionalidade  $\alpha$ , caracteriza as propriedades físicas do material.

As condições de fronteira indicam o valor da temperatura nas extremidades da viga:

$$u(0,t) = T_1, \quad 0 < t < \infty \quad (\text{B.3a})$$

$$u(L,t) = T_2 \quad (\text{B.3b})$$

As condições iniciais descrevem o fenómeno físico no início do estudo (geralmente para  $t = 0$ ):

$$u(x,0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{B.4})$$

Existe apenas uma função  $f(x,t)$  que satisfaz as equações (B.2), (B.3) e (B.4), e que descreve a temperatura ao longo da viga.

### B.1.2 Equações Hiperbólicas

A segunda classe das EDPs consiste nas equações hiperbólicas. Como exemplo destas equações temos a equação de onda unidimensional, que descreve as vibrações transversais de uma corda. Essencialmente, a equação de onda não é mais do que a equação de Newton relativa ao movimento aplicado a uma corda (a alteração do momento de um pequeno segmento de uma corda é igual às forças que lhe são aplicadas).

Se se aplicar a equação de movimento de Newton a um pequeno segmento da corda, obtemos

$$\Delta x \rho u_{tt} = T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + \Delta x F(x, t) - \Delta x \beta u_t(x, t) - \Delta x \gamma u(x, t) \quad (\text{B.5})$$

onde  $\rho$  representa a densidade da corda,  $\beta$  a força de atrito aplicada à corda,  $\gamma$  é a força de restabelecimento (oposta ao deslocamento),  $T$  é a tensão aplicada à corda e  $F$  é a força externa aplicada (por exemplo, a gravidade ou impulsos aplicados à corda em diferentes instantes de tempo) [Stanley, (1993)]. Se dividirmos ambos os membros da equação por  $\Delta x$  e tornando  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtemos a conhecida equação telegráfica:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - (\beta/\rho)u_t - (\gamma/\rho)u + F(x, t)/\rho \quad (\text{B.6})$$

onde  $u_{tt}$  representa a aceleração vertical da corda num ponto  $x$ .

Simplificando a equação anterior obtemos:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \quad (\text{B.7})$$

pelo que se pode dizer que a aceleração num determinado ponto da corda é dada pela tensão na própria corda. Mais ainda, a intensidade da força será tanto maior quanto maior for a largura da concavidade  $u_{xx}$ . Esta equação descreve também as vibrações longitudinais e torsionais da viga. Nestas vibrações, o

deslocamento relativamente à viga é paralelo e  $u(x,t)$  fica, relativamente à sua posição de equilíbrio num ponto na viga, posicionado longitudinalmente.

Se a equação de onda (B.7) contiver uma segunda ordem de derivação relativamente ao tempo, são necessárias duas condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x) \quad (\text{posição inicial})$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad (\text{velocidade inicial})$$

Estas duas condições iniciais contrastam com a equação de calor, onde é requerida apenas uma condição inicial.

Outra situação que pode ser descrita por uma equação de onda unidimensional é a corrente eléctrica ao longo de um condutor. Com a ajuda das leis de Kirchhoff, pode-se chegar ao sistema com duas EDPs de primeira ordem:

$$i_x + Cv_t + Gv = 0 \quad (\text{B.8a})$$

$$v_x + Li_t + Ri = 0 \quad (\text{B.8b})$$

As equações B.8 descrevem as conhecidas equações das linhas de transmissão. No entanto, deve-se referir que as linhas de transmissão não são geralmente utilizadas sob esta forma. Assim, as equações são manipuladas por forma a obter-se duas novas equações, uma em função da corrente e outra em função da tensão. A equação para a corrente é descrita por:

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi \quad (\text{B.9})$$

Esta equação é uma equação hiperbólica de segunda ordem; no entanto, se  $L$  ou  $C$  forem zero, obtém-se uma equação parabólica.

A correspondente equação para as tensões tem a seguinte forma:



$$v_{xx} = CL v_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv \quad (\text{B.10})$$

De notar, que se  $G = R = 0$ , obtém-se as equações:

$$v_{tt} = \alpha^2 v_{xx} \quad \text{onde} \quad \alpha^2 = 1/CL \quad (\text{B.11a})$$

$$i_{tt} = \alpha^2 i_{xx} \quad (\text{B.11b})$$

### B.1.3 Equações Elípticas

O operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad (\text{B.12})$$

é provavelmente o operador mais importante na física matemática. A função Laplaciana permite comparar a função num ponto com a função num outro ponto da sua vizinhança. De seguida apresentam-se algumas das interpretações do operador Laplaciano.

A equação do calor  $u_t = \alpha^2 \nabla^2 u$  mede a temperatura (ou a concentração)  $u$ , e a equação pode ser interpretada como a alteração da temperatura (ou a concentração)  $u_t$  proporcional a  $\nabla^2 u$ .

A equação de onda  $u_{tt} = \alpha^2 \nabla^2 u$  mede o deslocamento da viga e pode ser interpretada como a aceleração (ou a força)  $u_{tt}$  num ponto da viga proporcional a  $\nabla^2 u$ .

A equação Laplaciana  $\nabla^2 u = 0$  diz que a solução  $u$  é sempre igual à média da vizinhança.

A velocidade do fluxo de um fluido não viscoso incompressível satisfaz a equação de Laplace e indica-nos que a velocidade com que o fluido entra na superfície é igual à taxa com que a abandona.

A equação de Poisson é descrita por  $\nabla^2 u = f$  onde  $f$  é uma função que depende apenas das variáveis espaciais. Um exemplo físico traduzido pela equação de Poisson, é a tensão  $V$  associada à distribuição bidimensional de electrões de densidade de carga  $\rho$ , dada por  $\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \rho / \epsilon = 0$ , onde  $\epsilon$  é a constante dieléctrica. Esta é a equação às derivadas parciais que descreve o conhecido teorema de Gauss, que diz que o fluxo eléctrico total numa superfície fechada é igual à variação total nela incluída.

## ***B.2 Soluções Numéricas de Equações às Derivadas Parciais***

Uma equação diferencial parcial pode ser convertida num sistema de equações algébricas por conversão da derivada parcial, numa equação diferencial com as respectivas aproximações às diferenças finitas. O sistema com equações algébricas pode ser resolvido numericamente por um processo iterativo com o objectivo de obter uma solução aproximada da EDP.

Nas últimas duas décadas, cientistas e engenheiros iniciaram um estudo mais aprofundado de certos problemas, como resultado de um maior poder computacional e de métodos numéricos mais sofisticados. Muitas das novas tecnologias foram desenvolvidas por forma a se obterem maiores vantagens nas velocidades computacionais das máquinas. Problemas de não linearidades nos fluidos dinâmicos, e na elasticidade, bem como em sistemas que envolvam duas ou três dimensões, começaram a ser resolvidas nesta época.

Nas subsecções seguintes é abordada a utilização do método das diferenças finitas para resolver equações parabólicas, hiperbólicas e elípticas.

### B.2.1 Aproximações às Diferenças Finitas

Inicia-se esta secção apresentando a expansão da série de Taylor da função  $f(x)$ :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2! + \dots \quad (\text{B.13})$$

Efectuando a truncatura desta série após os dois primeiros termos, obtém-se a seguinte aproximação:

$$f(x+h) \cong f(x) + f'(x)h \quad (\text{B.14})$$

Então, pode-se resolve-la em ordem a  $f'(x)$ , obtendo-se o seguinte:

$$f'(x) \cong [f(x+h) - f(x)]/h \quad (\text{B.15})$$

que é designada por aproximação às diferenças em avanço para a primeira derivada  $f'(x)$ .

No entanto, se substituirmos  $h$  por  $-h$  na série de Taylor obtém-se uma aproximação às diferenças em atraso:

$$f'(x) \cong [f(x) - f(x-h)]/h \quad (\text{B.16})$$

Pode-se ainda obter uma aproximação às diferenças centrais:

$$f'(x) \cong [f(x+h) - f(x-h)]/2h \quad (\text{B.17})$$

Se mantivermos outro termo na série de Taylor, este tipo de análise pode ser extensível por forma a obter-se uma aproximação às diferenças centrais para uma derivada de segunda ordem  $f''(x)$ :

$$f''(x) \cong [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]/h^2 \quad (\text{B.18})$$

Pode-se estender as aproximações às diferenças finitas às derivadas parciais. Se se iniciar com a expansão da série de Taylor com duas variáveis, temos:

$$u(x+h,y) = u(x,y) + u_x(x,y)h + u_{xx}(x,y)h^2/2! + \dots \quad (\text{B.19a})$$

$$u(x-h,y) = u(x,y) - u_x(x,y)h + u_{xx}(x,y)h^2/2! - \dots \quad (\text{B.19b})$$

pelo que se deduzem as seguintes expressões:

$$u_x(x,y) \cong [u(x+h,y) - u(x,y)]/h \quad (\text{Diferença em avanço})$$

$$u_{xx}(x,y) \cong [u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)]/h^2$$

$$u_y(x,y) \cong [u(x,y+k) - u(x,y)]/k$$

$$u_{yy}(x,y) \cong [u(x,y+k) - 2u(x,y) + u(x,y-k)]/k^2$$

A aproximação que se deve utilizar (em avanço, em atraso ou central) depende do problema em análise.

Para solucionar um problema, deve-se substituir as derivadas parciais pelas correspondentes aproximações às diferenças finitas, segundo a grelha da Figura B.1, obtendo-se:

$$u(x,y) = u_{i,j}$$

$$u(x,y+k) = u_{i,j+1}$$

$$u(x,y-k) = u_{i,j-1}$$

$$u(x+h,y) = u_{i+1,j}$$

$$u(x-h,y) = u_{i-1,j}$$

$$u_x(x,y) = (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})/(2h)$$

$$u_y(x,y) = (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})/(2k)$$

$$u_{xx}(x,y) = (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})/h^2$$

$$u_{yy}(x,y) = (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})/k^2$$

e de seguida colocar em evidência o termo com os índices mais elevados.

### B.2.2 Método Explícito das Diferenças Finitas

O método explícito das diferenças finitas para a resolução de equações parciais hiperbólicas ou parabólicas baseia-se numa equação do tipo:

$$u_t = u_{xx} \tag{B.20}$$

Após a equação (B.20) ser substituída pelas aproximações às diferenças finitas, dadas por:

$$u_t = \frac{1}{\Delta t} [u_{i,j+1} - u_{i,j}]$$

$$u_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} [u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}]$$

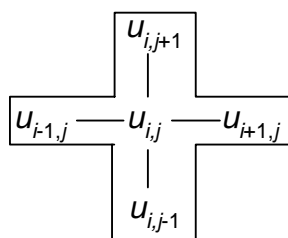


Figura B.1 - Grelha do plano  $xy$  para o método das aproximações às diferenças finitas.

Pode-se obter a solução explícita para um valor de tempo  $j$ , em termos da solução dos valores obtidos para tempos anteriores, segundo a grelha da Figura B.2, pelo que se obtém a seguinte equação:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}] \quad (\text{B.21})$$

Neste caso, os valores iniciais para as condições de fronteira podem ser determinados pela consequente obtenção da solução para valores do tempo superiores.

No caso das equações elípticas, resolve-se o problema das condições de fronteira onde as EDPs são satisfeitas numa dada região do espaço, e a solução é especificada nas fronteiras dessa região. Neste tipo de problemas, encontramos a solução aproximada no interior da grelha de pontos, através da determinação de um sistema algébrico de equações, obtendo-se, simultaneamente, as soluções de todos os pontos do interior da grelha.

Os problemas relacionados com os valores da equação para os diversos instantes de tempo, podem ser solucionados através das aproximações às diferenças finitas. A ideia será fornecer a solução para o valor inicial do tempo e obter as soluções para os instantes de tempo seguintes. Se substituirmos as derivadas, tanto em ordem ao espaço como em ordem ao tempo, pelas aproximações às diferenças finitas, podemos obter a solução  $u_{i,j}$  na equação diferencial explícita em termos da solução dos tempos anteriores.

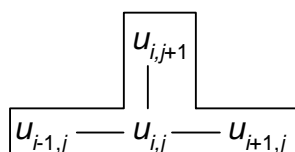


Figura B.2 - Grelha do plano  $ij$  para o método explícito.

Este processo é designado de método explícito, devido ao facto de se obterem as soluções para um valor específico do tempo em função da solução dos valores anteriores, também em ordem ao tempo.

No entanto, deve-se notar que é necessário substituir as equações pelas aproximações às diferenças pelo método em atraso (em vez do método em avanço) devido ao facto de este último requerer o conhecimento de valores  $u_{i,j}$  fora do domínio.

### ***B.2.2.1 Problemas na Utilização do Método Explícito***

Existem sérios problemas no método explícito para a resolução das EDPs. Se o valor do incremento no domínio dos tempos  $t$  for bastante elevado, relativamente ao tamanho do incremento no domínio do espaço  $x$ , o valor do erro acabará por aumentar até destruir a exactidão da solução. Os tamanhos relativos destes dois incrementos em  $x$  e em  $t$ , depende particularmente da equação que se está a estudar e das condições de fronteira. Todavia, geralmente, o tamanho do incremento de tempo deve ser muito menor que o tamanho do incremento do espaço. De referir, ainda, que o quociente entre o incremento de tempo  $\Delta t$  e o incremento do espaço  $\Delta x$ , dado por  $\Delta t/\Delta x^2$  deve ser menor ou igual a 0,5 para que este método funcione adequadamente. Para valores desta relação superiores a 0,5, este método diverge devido ao aumento excessivo do erro, ou, dito de outra forma, torna o algoritmo instável.

Regra geral, se os tamanhos dos incrementos de tempo e de espaço forem pequenos, o erro de truncatura introduzido pelo método decorrente da aproximação das derivadas parciais pelas diferenças finitas, será minimizado. De qualquer forma, a solução utilizando os métodos das diferenças finitas, é satisfatória quando comparado com as fórmulas analíticas.

No caso das equações hiperbólicas, verifica-se ainda o problema da necessidade de se conhecerem os valores de dois instantes de tempo iniciais, para as poder resolver pelo método explícito.

### B.2.3 Método Implícito das Diferenças Finitas

No método implícito das diferenças finitas, tem que se substituir as derivadas parciais pelas aproximações correspondentes às diferenças finitas, resolvendo o sistema de equações com vista à obtenção dos valores no domínio dos tempos. Por outras palavras, para cada novo valor de tempo devemos resolver o sistema de equações algébricas com vista à obtenção de todos os valores.

O método implícito possui uma vantagem relativamente ao método explícito anteriormente descrito, pois permite que os incrementos possam ser elevados, sem originarem problemas excessivos de erros numéricos.

O método implícito mais conhecido consiste no método de *Crank-Nicholson* e é utilizado para solucionar problemas relativos a equações parabólicas.

Neste método substitui-se  $u_t$  e  $u_{xx}$  pelas seguintes aproximações às diferenças finitas:

$$u_t(x,t) = \frac{1}{\Delta t} [u(i,j+1) - u(i,j)]$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\lambda}{\Delta x^2} [u(i+1,j+1) - 2u(i,j+1) + u(i-1,j+1)] + \frac{(1-\lambda)}{\Delta x^2} [u(i+1,j) - 2u(i,j) + u(i-1,j)]$$

onde  $\lambda$  é um número pertencente ao intervalo entre  $[0,1]$ . De notar que a aproximação para  $u_{xx}$  é a média ponderada para a aproximação às diferenças centrais relativas à derivada  $u_{xx}$  para os valores do tempo  $t$  e  $t+\Delta t$ . No caso especial de  $\lambda=0,5$  estamos perante a média ordinária destas duas diferenças



centrais, enquanto que se  $\lambda=0,75$ , a aproximação coloca pesos de 0,75 e 0,25 em cada um dos termos. De notar que se  $\lambda=0$ , estamos perante o método explícito das diferenças finitas.

Se após a substituição das derivadas parciais pelas correspondentes equações às diferenças finitas (segundo a grelha da Figura B.3) colocarmos em evidência os termos que possuem o índice temporal mais elevado, obtemos:

$$-\lambda ru_{i+1,j+1} + (1+2r\lambda)u_{i,j+1} - \lambda ru_{i-1,j+1} = r(1-\lambda)u_{i+1,j} + [1-2r(1-\lambda)]u_{i,j} + r(1-\lambda)u_{i-1,j} \quad (\text{B.22})$$

O método implícito implica maior tempo de computação para cada discretização no domínio do tempo, quando comparado com o método explícito, mas permite a utilização de maiores incrementos de tempo mantendo uma boa aproximação.

### B.3 Soluções Numéricas versus Soluções Analíticas

Nesta sessão é realizada uma discussão sobre as vantagens e inconveniente das soluções analíticas e das soluções numéricas.

As soluções analíticas possuem expressões onde as variáveis desconhecidas são dadas por funções matemáticas em termos de variáveis independentes e pelos parâmetros do sistema que, normalmente são representados por séries infinitas ou integrais.

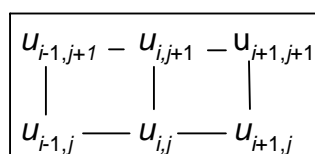


Figura B. 3 - Grelha do plano  $ij$  para o método implícito.

Por seu lado, as soluções numéricas procuram a solução das EDPs por substituição da equação diferencial através de equações aproximadas. Por exemplo, o método das aproximações às diferenças finitas, substitui as derivadas parciais pelas diferenças finitas. O resultado é, geralmente, uma tabela de números da solução  $u$ , para vários valores das variáveis independentes.

### ***B.3.1 Vantagens da Solução Analítica***

As equações analíticas possuem mais informação sobre os sistemas físicos que descrevem do que as equações numéricas. Se se pretender avaliar a solução para um ponto específico  $(x,t)$ , pode-se fazê-lo com um certo grau de precisão, adicionando um número suficiente de termos na série infinita. Pode ser obtido um limite superior no erro sem grande dificuldade.

A solução analítica permite encontrar a solução para um determinado ponto  $(x,t)$  sem necessitarmos de encontrar a solução para outros pontos, como acontece com os métodos explícito e implícito.

A solução analítica permite determinar a solução para um qualquer ponto e não apenas para os pontos pertencentes à malha de discretização.

Provavelmente, e mais importante que todos os outros aspectos, a solução analítica diz-nos como os parâmetros físicos, as condições iniciais e as condições de fronteira afectam a solução.

A solução numérica não despreza estas inter-relações, desde que se encontre a solução numérica para parâmetros específicos, condições iniciais e de fronteira. Em muitas soluções, é crítico o conhecimento da relação entre os parâmetros do modelo e a solução, o objectivo é a estimação dos parâmetros para a solução.

### ***B.3.2 Vantagens da Solução Numérica***

Uma das maiores vantagens da solução numérica resulta de em muitos dos problemas não se conhecer a solução analítica. Praticamente todos os sistemas não lineares descritos por EDPs têm que ser resolvidos por métodos numéricos e, de facto, muitos dos modelos reais físicos, químicos, biológicos entre outros, são sistemas naturais não lineares. Os sistemas lineares, representam na sua maioria, aproximações onde se desprezam certos componentes não lineares. Muitas das equações mais importantes, não possuem soluções analíticas conhecidas para o caso de conterem não linearidades. Desta forma, para atacar os problemas de muitas das não linearidades (bem como de algumas lineares) é necessário o uso das soluções numéricas.

## *Referências*

---

Stanley J. Farlow (1993). *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*.  
Wiley.

# *Anexo C*

---

## ***ALGORITMOS GENÉTICOS***

Os algoritmos genéticos (AG) são uma técnica de optimização usada na ciência dos computadores, que visa encontrar soluções aproximadas na optimização e em problemas de procura. Os AGs são uma classe particular dos algoritmos evolutivos que utilizam uma técnica inspirada na biologia evolutiva, tais como a hereditariedade, a selecção natural, a mutação ou a recombinação de cromossomas, normalmente designada de cruzamento [Goldberg, (1989)], [Michalewicz, (1996)], [Mitchell, (1998)]. Neste contexto, e tendo os AGs sido implementados no decorrer do estudo efectuado para o Capítulo 4 desta tese, neste anexo é apresentada a metodologia usada e algumas das definições inerentes aos elementos que constituem os AGs.

Estes algoritmos iniciam-se com um conjunto de soluções, designadas por cromossomas, as quais constituem uma população (P). Inicialmente P é gerada através de um processo aleatório, sendo as soluções de P, que se designam de *pais*, utilizadas para formar novas populações através de processos análogos à reprodução biológica. Esta reprodução é motivada pela expectativa de que a nova geração P seja melhor do que aquela que a antecedeu.

Os indivíduos são posteriormente seleccionados através de funções de aptidão, por forma a darem origem a novas populações. Assim, quanto melhores forem os desempenhos dos novos indivíduos, maior será a probabilidade de ingressarem num novo processo de reprodução e virem a integrar o conjunto de soluções do problema. Este processo repete-se até que uma determinada condição ou condições sejam satisfeitas, baseando-se na função de optimização. Por exemplo, através da quantificação do erro entre a solução em questão e a solução óptima para o problema.

A Figura C.1 ilustra um diagrama de blocos elucidativo da metodologia adoptada pelos AGs.

Nestes algoritmos os operadores de cruzamento (C) e de mutação (M) são porventura os mais importantes. O operador C cruza partes dos cromossomas de dois pais de uma população, durante o processo de reprodução, para originar uma descendência que contenha material genético dos dois “pais”.

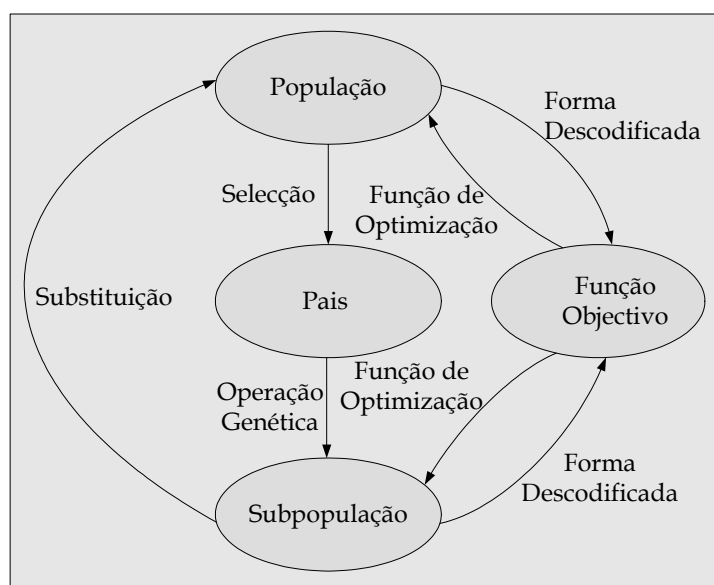


Figura C.1 - Diagrama de blocos dos AGs.

A forma mais fácil de efectuar um cruzamento consiste em escolher aleatoriamente um ponto do cromossoma e copiar de um dos pais tudo o que estiver antes desse ponto, e do outro pai tudo o que estiver depois desse ponto (Figura C.2).

Existem mais formas de efectuar o cruzamento como, por exemplo, escolhendo mais do que um ponto de cruzamento.

Por sua vez, o operador mutação altera de uma forma aleatória os descendentes de uma operação de cruzamento. Este procedimento visa prevenir a perda de uma solução óptima, sendo apenas aplicado a valores baixos (*e.g.*, 1%) da população total. No caso de uma codificação binária, a operação consiste na troca aleatória de um bit de 0 para 1, ou de 1 para 0. A Figura C.3 ilustra um exemplo da operação de mutação.

Outro conceito importante nos AGs é o elitismo. A estratégia elitista (EE) força a que o AG retenha um determinado número dos melhores indivíduos de cada geração. Com esta ferramenta, alguns indivíduos podem ser perdidos caso não tenham sido seleccionados para a reprodução ou caso tenham sido destruídos pelos operadores C ou M.

Cromossoma 1	11011   11000011110
Cromossoma 2	<b>11011</b>   <b>00100110110</b>
Descendente 1	11011   <b>00100110110</b>
Descendente 2	<b>11011</b>   11000011110

Figura C.2 - Exemplo de cruzamento (o símbolo | representa o ponto de C).

Descendente 1	1101111000011110
Descendente 2	1101100100110110
Descendente 1 com mutação	1111101000010110
Descendente 2 com mutação	1100100110110100

Figura C.3 - Exemplo de Mutação.

A EE é considerada por muitos investigadores como sendo uma mais valia na melhoria do desempenho dos AGs, sendo normalmente aplicada a valores elevados (*e.g.*, 90%) da população total.

Saliente-se ainda que a grande maioria das aplicações dos AGs utilizam representações indirectas das soluções. Assim, o algoritmo trabalha sobre uma população de soluções codificadas. Desta forma, antes de se avaliar um cromossoma (antes da aplicação da função de aptidão) é necessário efectuar uma transição da codificação da solução para a solução real. A forma mais usual de codificação são os códigos binários. Se for pretendida uma solução representada por números reais, então é necessário o AG descodificar o código binário que constitui os cromossomas para o correspondente número real. A escolha da melhor técnica de descodificação depende do problema que temos para resolver.



## Referências

---

Goldberg D. E., (1989). *Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning*. Ed. Addison-Wesley.

Michalewicz Z., (1996). *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag.

Mitchell Melanie, (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press.



# *Anexo D*

---

## ***CARACTERÍSTICAS DO APARELHO DE MEDIDA SCOPEMETER 123***

Neste anexo são apresentadas as principais características do aparelho de medida utilizado nas experiências descritas no Capítulo 5.

### ***D.1. Características do ScopeMeter 123***

Através do aparelho de medida ScopeMeter 123 (Figura D.1) obtiveram-se os valores da frequência, da tensão, da corrente, a diferença de fases entre a tensão aplicada e a tensão nas impedâncias sob teste (frutos, vegetais ou eléctrodos).

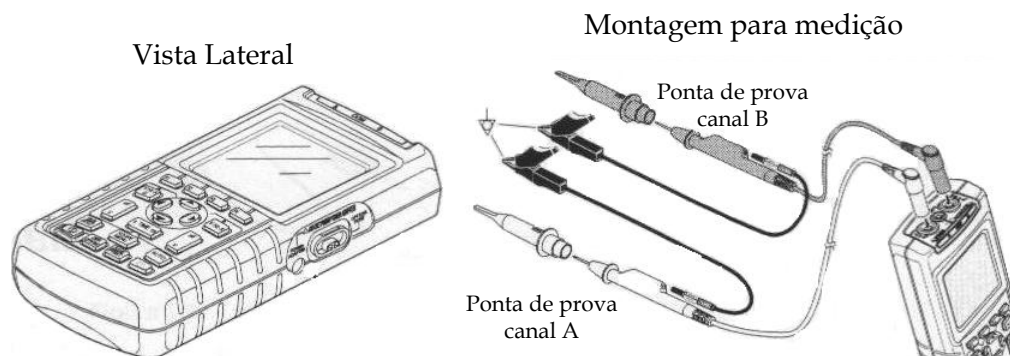


Figura D.1 - Aparelho de medida ScopeMeter 123.

A selecção das medições a efectuar em cada um dos canais do osciloscópio, é obtida através do seguinte menu (Figura D.2).

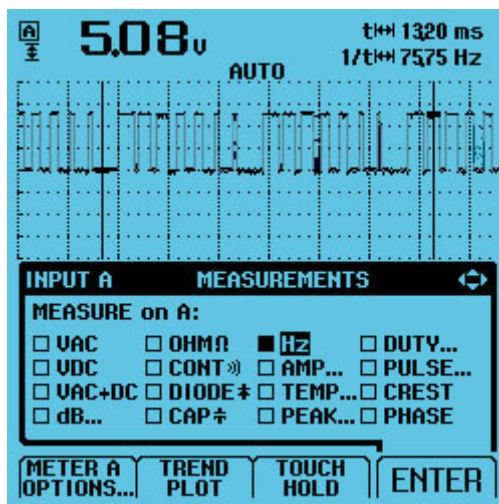


Figura D.2 - Menu de atribuição a cada canal das medidas a realizar.

A Figura D.3 ilustra um exemplo de duas medições. No canal A é medida a tensão, no canal B a corrente, visualizando-se ainda o valor da frequência.

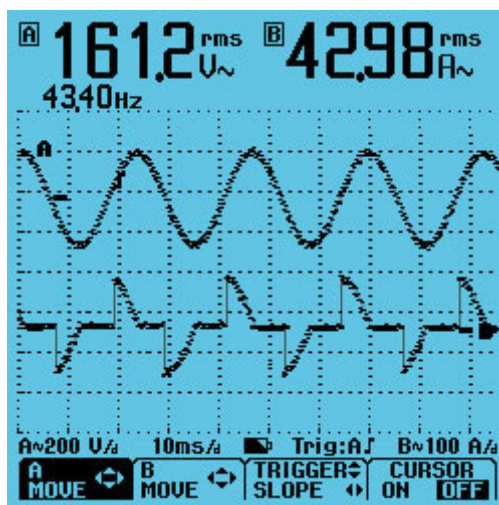


Figura D.3 - Exemplo ilustrativo do funcionamento do aparelho de medida.

A precisão deste aparelho de medida encontra-se dentro do intervalo  $\pm$  (percentagem de leitura + número de pontos). Assim, temos as seguintes precisões:

- ❖ Frequência, para uma escala total de 10 000 pontos:
  - de 1 Hz a 1 MHz:  $\pm$  (0,5% + 2 pontos)
  - de 1 MHz a 10 MHz:  $\pm$  (1,0% + 2 pontos)
  - de 10 MHz a 40 MHz:  $\pm$  (2,5% + 2 pontos)
- ❖ Tensão pico-a-pico: 10% da escala completa (500 pontos).
- ❖ Corrente: 10% da escala completa (500 pontos).
- ❖ Fase:  $\pm$  (1 grau + 1 ponto)
- ❖ Resistência:  $\pm$  (0,6% + 5 pontos), para uma escala total de 5000 pontos.

## *Anexo D – Características do Aparelho de Medida ScopeMeter 123*

---

As figuras e as características do ScopMeter 123 apresentadas ao longo deste anexo foram retiradas do endereço <http://us.Fluke.com>.