



Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Dinâmica e Controlo de Sistemas de Ordem Fraccionária

Ramiro de Sousa Barbosa

(Mestre em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto)

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Porto, Fevereiro de 2005

Aos meus pais

Dissertação realizada sob a orientação do
Professor Doutor J. A. Tenreiro Machado,
do Departamento de Engenharia Electrotécnica do
Instituto Superior de Engenharia do Instituto Politécnico do Porto

e co-orientação da
Professora Doutora Isabel M. Ferreira,
do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Resumo

O trabalho realizado nesta tese de dissertação enquadra-se na aplicação da *teoria das derivadas e integrais fraccionários* para a análise dinâmica e controlo de sistemas.

Esta área da matemática é vulgarmente designada por *cálculo fraccionário*; todavia, trata-se de uma designação que não é a mais adequada, devido essencialmente a razões históricas, sendo que a denominação mais correcta seria de *cálculo integro-diferencial de ordem arbitrária*.

O conceito de derivadas e integrais de ordem fraccionária remonta ao início da teoria do cálculo diferencial. No entanto, a complexidade acrescida desta teoria levou a que a sua aplicação na física e na química e, mais recentemente, nas ciências da engenharia, nomeadamente na modelação e no controlo, só nos últimos anos tenha conhecido um desenvolvimento mais acentuado. De facto, assiste-se actualmente a um interesse crescente na sua aplicação e no desenvolvimento de um conjunto de estudos nas mais diversas áreas científicas, tais como a viscoelasticidade, caos e fractais, biologia, processamento de sinal, difusão, irreversibilidade, electrónica, entre outros. Mais ainda, as potencialidades reveladas por este “novo” método matemático tornam-no, actualmente, numa das ferramentas mais poderosas e úteis na resolução de inúmeros problemas na matemática, ciência e engenharia.

No tocante à área do controlo automático de sistemas, só nas últimas décadas é que a teoria do cálculo fraccionário encontrou as suas primeiras aplicações. No entanto, a sua adopção nesta área tem revelado elevados desempenhos face às estratégias “clássicas”, fazendo com que seja, actualmente, uma das áreas com mais potencialidades de aplicação dos conceitos associados à teoria do cálculo fraccionário. Nesta perspectiva, o trabalho apresentado “Análise Dinâmica e Controlo de Sistemas de Ordem Fraccionária” insere-se nas correntes actualmente emergentes que apontam para o desenvolvimento deste tipo de sistemas.

Assim, numa primeira abordagem ao tema, estabelecem-se os fundamentos do cálculo fraccionário e apresentam-se alguns dos métodos mais utilizados para o estudo e análise dos sistemas de ordem fraccionária. São também descritas algumas das aplicações mais significativas do cálculo fraccionário na área do controlo de sistemas. De seguida, definem-se vários modelos dinâmicos para diversos fenómenos, seja a partir de uma formulação matemática, seja a partir de uma formulação com base em algoritmos computacionais. Uma vez estabelecidos os modelos adequados desenvolve-se, de seguida, uma análise dinâmica para sistemas lineares e não lineares. Por último, são desenvolvidos novos métodos e aplicações da teoria das derivadas e integrais fraccionários na área do controlo automático de sistemas. Nesta perspectiva, comparam-se também várias estruturas e algoritmos de controlo sob os pontos de vista de projecto, robustez e facilidade de implementação computacional.

Esta tese de dissertação tem também por objectivo divulgar e fomentar a aplicação da teoria das derivadas e integrais fraccionários nas mais diversas áreas da ciência e engenharia e, em particular, na área do controlo automático de sistemas. A ordem fraccionária abre uma nova dimensão em praticamente todas as áreas do conhecimento humano, para as quais ainda está por esclarecer o seu verdadeiro impacto.

Palavras-chaves: Cálculo fraccionário, derivadas e integrais fraccionários, sistemas de ordem fraccionária, controlo de ordem fraccionária, sistemas não lineares, modelação de sinal, aproximações digitais, PID, controlo robusto.



Abstract

THE work developed in this dissertation is devoted to the application of the *theory of fractional derivatives and integrals* in the dynamic analysis and control of automatic systems.

This area of mathematics is usually called *fractional calculus*. Nevertheless, the term “fractional” is a misnomer, but it is retained following historical reasons. This theory should be more precisely defined as *theory of derivatives and integrals of arbitrary order*.

The concept of derivatives and integrals to a fractional-order goes back to the beginning of the theory of differential calculus but its inherent complexity postponed the application of the associated concepts. Their application in the fields of physics and mathematics and, more recently, in the sciences of engineering, namely in the modeling and control, had a more pronounced development only during the last years. In fact, the growing interest in fractional calculus motivated its application in the most diverse scientific areas, such as viscoelasticity, chaos and fractals, biology, signal processing, diffusion, irreversibility, electronics and control. Moreover, the potentialities revealed by this “new” mathematical method makes it, nowadays, one of the most powerful and useful tool for the resolution of problems in the areas of mathematics, science and engineering.

In what concerns the area of automatic control systems, the first applications only took place in the last decades. However, its adoption in this field revealed superior performance when compared to the “classical” strategies, being, nowadays, one of the most promising areas for the application of the concepts associated to the fractional calculus theory. In this perspective, the presented work “Análise Dinâmica e Controlo de Sistemas de Ordem Fraccionária” points out to the development of this type of systems. In a first phase are introduced the fundamentals of fractional calculus, the most relevant methods for the study

and analysis of fractional-order systems and some important applications in the area of automatic control systems. In a second phase the dynamic models for several phenomena are defined, from a mathematical or computational viewpoint. Once established the appropriate models, a dynamic analysis for linear and nonlinear systems is developed. Finally, new methods and applications of the theory of fractional derivatives and integrals for the field of control systems are developed. Bearing these ideas in mind, several structures and control algorithms are also compared from the viewpoint of design, robustness and computational implementation easiness.

This dissertation constitutes also a medium to spread and encourage the adoption of the theory of fractional calculus in science and engineering and, particularly, in the field of automatic control systems. In fact, the fractional-order opens a new dimension in almost all areas of the human knowledge, for which the complete understanding of its real impact it is still lacking.

Keywords: Fractional calculus, fractional integrals and derivatives, fractional-order systems, fractional-order control, nonlinear systems, signal modeling, digital approximations, PID, robust control.

Résumé

LE travail développé dans cette dissertation est consacré à l'application de la *théorie de dérivées et d'intégrales fractionnaires* dans l'analyse et le control dynamique des systèmes automatiques.

Ce domaine des mathématiques s'appelle habituellement *calcul fractionnaire*. Néanmoins, le terme "fractionnaire" est un misnomer, mais il est maintenu pour des raisons historiques. Cette théorie devrait être définie avec plus de précision comme *théorie de dérivées et d'intégrales d'ordre arbitraire*.

Le concept de dérivées et d'intégrales d'ordre fractionnaire est développé depuis le début de la théorie du calcul différentiel, mais sa complexité inhérente a remis l'application dans des domaines tels que la physique, la chimie et, plus récemment, les sciences du génie, à savoir dans le modelage et control. Au fait, son intérêt croissant a motivé l'application et le développement des études dans des secteurs scientifiques les plus divers, tels que la visco-élasticité, le chaos et les fractals, la biologie, le traitement des signaux, la diffusion, l'irréversibilité, l'électronique et le control. D'ailleurs, les potentialités indiquées par cette "nouvelle" méthode mathématique l'on transformé, de nos jours, dans un des outils les plus puissants et plus utiles pour la résolution de problèmes de mathématiques, de la science et du génie.

Dans ce qui concerne les systèmes de contrôle automatique, seulement dans les dernières décades ont lieu les premières applications. Cependant, son adoption dans ce domaine a indiqué des performances supérieures à celles des stratégies classiques. Ainsi, de nos jours, c'est une méthode à envisager, l'application des concepts associés à la théorie du calcul fractionnaire. Dans cette perspective, le travail présenté "Análise Dinâmica e Control de Sistemas de Ordem Fraccionária" concerne le développement de ce type de systèmes. Par

conséquent, dans une première approche, les principes fondamentaux du calcul fractionnaire sont fournis et certaines des méthodes les plus utilisées pour l'étude et l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire sont présentés. Quelques applications importantes du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de control automatique sont aussi décrits. Ensuite, les divers modèles dynamiques sont définis pour plusieurs phénomènes, soit d'un point de vue de formulation mathématique, soit s'appuyant sur algorithmes informatiques. Une fois établi les modèles appropriés, une analyse dynamique pour les systèmes linéaires et non linéaires a été développée. Finalement, de nouvelles méthodes et applications de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires sont développées pour des systèmes de control automatique. Dans cette perspective, plusieurs structures et control d'algorithmes sont également comparées du point de vue de la conception, de la robustesse et de la facilité d'exécution informatique.

Cette dissertation a également le but de répandre et d'encourager l'utilisation de la théorie du calcul de dérivées et d'intégrales dans des secteurs scientifiques et du génie les plus divers aussi bien que, et en particulier, dans le domaine des systèmes de control automatique. L'ordre fractionnaire ouvre une nouvelle dimension dans presque tous les secteurs du savoir humain, dont l'impact est encore à découvrir.

Mots-clés: Calcul fractionnaire, intégrales fractionnaires et dérivées, systèmes d'ordre-fractionnaire, control d'ordre-fractionnaire, systèmes non-linéaires, signal modelant, approximations numériques, PID, control robuste.

Agradecimentos

O maior agradecimento é devido aos meus pais pelo seu apoio, encorajamento e compreensão que sempre manifestaram na prossecução dos meus estudos académicos. É a eles que dedico este trabalho.

Ao longo da realização deste trabalho contei com o apoio de pessoas e instituições, que de uma forma ou de outra, contribuíram para que este fosse concluído. A todas elas exprimo aqui os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Tenreiro Machado, a forma como orientou os meus trabalhos de Doutoramento. O seu apoio, dedicação, entusiasmo e disponibilidade foram uma constante ao longo de toda a orientação. De igual forma, a sua experiência e competência profissional contribuíram decisivamente para a realização dos trabalhos conducentes à elaboração desta tese de dissertação. Agradeço ainda o esforço desenvolvido na leitura e as sugestões de revisão que permitiram o enriquecimento do texto desta dissertação. Agradeço também à Professora Doutora Isabel M. Ferreira a sua co-orientação.

Agradeço também a todos os meus colegas de trabalho do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), em especial ao Manuel Silva, Isabel Jesus, Lino Figueiredo e Cecília Reis pela colaboração prestada e disponibilidade sempre demonstrada. Uma menção especial ao meu colega de gabinete, Manuel Silva, pelas inúmeras trocas de ideias, discussões e sugestões dadas ao longo do período de realização deste trabalho, as quais se revelaram úteis e muitas vezes pertinentes e que, de certa forma, também contribuíram para a realização de um trabalho melhor. Outro agradecimento especial vai para a Isabel Jesus pela ajuda prestada na formatação desta tese de dissertação.

Deixo também uma palavra de agradecimento ao Dr. Fernando Duarte, da Escola Superior de Tecnologia de Viseu (ESTV), ao Eduardo Pires, da Universidade de Trás-os-Montes e Alto

Douro (UTAD), e ao Nuno Ferreira, do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra (ISEC), pela sua disponibilidade, quer telefónica quer por correio electrónico, assim como pelas várias palestras (nos mais diversos temas) por eles proferidas.

Gostaria ainda de agradecer ao ISEP as condições disponibilizadas para a realização deste trabalho, nomeadamente através do Departamento de Engenharia Electrotécnica, grupo de Automação e Robótica, e a todos os seus elementos.

Agradeço ao Programa PRODEP III – Medida 5 – Acção 5.3 referente ao concurso 2/5.3/PRODEP/2000, pela concessão de uma bolsa de Doutoramento que me permitiu beneficiar de dispensa de serviço docente durante três anos.

Por último, gostaria de deixar os meus agradecimentos ao ISEP, ao Instituto de Sistemas e Robótica do Porto (ISR – Porto), à Fundação Calouste Gulbenkian e à Fundação Luso-Americana para o Desenvolvimento (FLAD) pelo apoio financeiro concedido para a participação em diversas conferências internacionais.



Índice

Índice	xv
Índice de Figuras	xix
Índice de Tabelas	xxvii
Tabela de Acrónimos	xxix

CAPÍTULO 1

Introdução	1
1.1 Resumo Histórico.....	1
1.2 Aplicações do Cálculo Fraccionário	3
1.3 Motivação e Objectivos	4
1.4 Estrutura da Tese.....	5

CAPÍTULO 2

Fundamentos do Cálculo Fraccionário e Aplicações	7
2.1 Introdução	8
2.2 Notação das Derivadas Fraccionárias	10
2.3 Definições Básicas de Derivadas Fraccionárias.....	11
2.3.1 Definição de Grünwald-Letnikov	12
2.3.2 Definição de Riemann-Liouville.....	14
2.3.3 Definição de Caputo.....	17
2.4 Propriedades das Derivadas Fraccionárias.....	18
2.4.1 Linearidade.....	18
2.4.2 Regra de Leibniz	19

2.5	Transformada de Laplace de Derivadas Fraccionárias.....	19
2.5.1	Integral Fraccionário.....	20
2.5.2	Derivada Fraccionária.....	21
2.6	Transformada de Fourier de Derivadas Fraccionárias.....	23
2.6.1	Integral Fraccionário.....	24
2.6.2	Derivada Fraccionária.....	25
2.7	Solução Analítica de Equações Diferenciais Fraccionárias	26
2.7.1	Aplicação na Solução Analítica de Equações Diferenciais Fraccionárias.....	27
2.8	Cálculo Numérico de Derivadas Fraccionárias	28
2.8.1	Princípio da “Memória-Curta”	29
2.8.2	Cálculo dos Coeficientes	31
2.8.3	Aplicação na Solução Numérica de Equações Diferenciais Fraccionárias	32
2.9	Cálculo Matricial de Derivadas Fraccionárias.....	33
2.9.1	Aplicação na Solução Numérica de Equações Diferenciais Fraccionárias	35
2.10	Aplicações do Cálculo Fraccionário.....	38
2.10.1	Função de Transferência Ideal de Bode como Sistema de Referência.....	39
2.10.2	Controlo CRONE	42
2.10.3	Controlador $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Fraccionário	48
2.11	Conclusões.....	50

CAPÍTULO 3

Análise Dinâmica de Alguns Sistemas Não Lineares.....	53	
3.1	Introdução.....	54
3.2	Fundamentos da Análise Através do Método da Função Descritiva.....	55
3.3	Análise de Sistemas com Folga e Impactos.....	58
3.3.1	Sistema de Folga Estática	59
3.3.2	Sistema de Folga Dinâmica	62
3.3.3	Predição de Ciclos Limite.....	70
3.4	Oscilador de Van der Pol.....	72
3.4.1	Análise por Função Descritiva	75
3.5	Oscilador de Van der Pol Fraccionário.....	79
3.5.1	Esquema de Simulação	79
3.5.2	Aproximações Inteiras ao Integrador Fraccionário	80

3.5.3 Apresentação dos Resultados Obtidos	83
3.6 Conclusões	90

CAPÍTULO 4

Aproximações Digitais de Operadores Fraccionários Através de Funções Racionais..... 93

4.1 Introdução	94
4.2 Discretização de Integradores e Diferenciadores de Ordem Fraccionária	96
4.3 Aproximações Digitais de Operadores Fraccionários Através de Funções Racionais	100
4.4 Resposta Impulsional de Operadores Digitais Fraccionários	102
4.5 Modelação de Sinal	105
4.5.1 Método de Padé	107
4.5.2 Método de Prony	110
4.5.3 Método de Shanks	112
4.6 Aproximação Digitais Racionais Através do Método de Identificação dos Mínimos Quadrados	116
4.7 Aplicação das Técnicas Propostas: Exemplo Ilustrativo	119
4.7.1 Aproximações de Padé	123
4.7.2 Aproximações de Prony	127
4.7.3 Aproximações de Shanks	132
4.7.4 Observações Sobre os Resultados Obtidos	136
4.8 Desempenho das Aproximações Digitais no Cálculo de Derivadas e Integrais Fraccionários de Funções Temporais	138
4.9 Conclusões	146

CAPÍTULO 5

Sintonia de Controladores PID Robustos..... 149

5.1 Introdução	150
5.2 Função de Transferência Ideal de Bode Como Sistema de Referência	151
5.2.1 Integral de Bode	154
5.2.2 Análise no Plano Complexo	156
5.2.3 Análise no Domínio das Frequências	157
5.2.4 Análise no Domínio dos Tempos	160

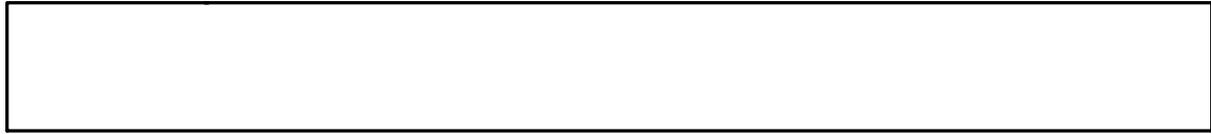
5.3	Sintonia de Controladores PID	167
5.3.1	Controlador PID	168
5.3.2	Método de Optimização.....	169
5.4	Aplicação da Metodologia Proposta: Exemplos Ilustrativos.....	172
5.5	Conclusões.....	184

CAPÍTULO 6

Conclusões e Perspectivas de Evolução Futura.....	187	
6.1	Discussão dos Resultados e Conclusões.....	187
6.1.1	Análise de Sistemas com Folga Dinâmica e do Oscilador de Van der Pol Fraccionário	188
6.1.2	Desenvolvimento de Aproximações Digitais Racionais aos Operadores Fraccionários	189
6.1.3	Sintonia de Controladores PID Robustos	190
6.2	Contribuições da Tese	191
6.3	Perspectivas de Evolução Futura.....	192

ANEXO A

Funções Especiais do Cálculo Fraccionário.....	197	
A.1	Função Gama.....	197
A.2	Função Beta	199
A.3	Função de Mittag-Leffler.....	200
A.4	Integrais de Fresnel.....	201
Referências Bibliográficas.....	203	



Índice de Figuras

Figura 2. 1 – Evolução dos coeficientes $\left \omega_k^{(\alpha)} \right $ para vários valores de $\alpha = 0,1; 0,3; \dots; 0,9$	30
Figura 2. 2 – Sistema de referência com função de transferência ideal de Bode.	39
Figura 2. 3 – Resposta ao degrau unitário de $T(s)$ para $K = 1$ e $\alpha = 0,25; 0,5; \dots; 2$	41
Figura 2. 4 – Resposta em frequência de $T(s)$ para $K = 1$ e $\alpha = 0,25; 0,5; \dots; 1,75$	41
Figura 2. 5 – Ilustração da robustez do CRONE no plano- s	43
Figura 2. 6 – Ilustração da robustez do CRONE na resposta temporal.	44
Figura 2. 7 – Sistema de realimentação unitário definindo uma função de transferência em malha aberta não inteira.	44
Figura 2. 8 – Ilustração da robustez do CRONE nas frequências.	45
Figura 2. 9 – Sistema de controlo.	46
Figura 2. 10 – Definição no plano dos controladores PID (clássico e fraccionário).	49
Figura 3.1 – Diagrama de blocos do sistema não linear realimentado usado para a análise por função descritiva.	57
Figura 3.2 – Representação da não linearidade folga estática: a) Modelo geométrico e b) Característica entrada-saída.	60
Figura 3.3 – Sistema da folga estática com massa.	60
Figura 3.4 – Traçado de Nyquist de $-1/N(F, \omega)$ para o sistema da Figura 3.3, $F = 10, 20, \dots, 50$ N, $0 < \omega < \omega_L$, $M_1 = M_2 = 1$ kg e $h = 10^{-1}$ m.	61
Figura 3.5 – Sistema com duas massas sujeito a folga dinâmica.	62
Figura 3.6 – Diagrama de Nyquist de $-1/N(F, \omega)$ para a folga dinâmica com $F = 50$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e $\epsilon = \{0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8\}$	64

- Figura 3.7 – Diagramas de Nyquist de $-1/N(F,\omega)$ para a folga dinâmica com $F = \{20, 60, 100\}$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e para: a) $\varepsilon = 0,2$, b) $\varepsilon = 0,5$ e c) $\varepsilon = 0,8$ 66
- Figura 3.8 – Gráficos log-log das partes: a) $\text{Re}\{-1/N\}$ e b) $\text{Im}\{-1/N\}$, em função da frequência de excitação ω para $F = 50$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e $\varepsilon = \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$ 67
- Figura 3.9 – Gráficos da transformada de Fourier do deslocamento de saída $x_1(t)$, $TF\{x_1(t)\}$, sobre 100 ciclos, em função da frequência de excitação $1,0 < \omega < 40,5$ rad/s e com um índice harmónico compreendido entre $0 < k < 4$ para $F = 50$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e para: a) $\varepsilon = 0,2$; b) $\varepsilon = 0,5$ e c) $\varepsilon = 0,8$ 69
- Figura 3.10 – Sistema de controlo realimentado com algoritmo PID e sistema de duas massas sujeito a folga e impactos (a entrada de referência é zero, $r(t) = 0$). 70
- Figura 3.11 – Traçado de Nyquist de $-1/N(F,\omega)$ com $F = 27,5$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m, $\varepsilon = 0,5$ e $C(j\omega)$ para o sistema com folga dinâmica. 71
- Figura 3.12 – Resposta nos tempos da força de excitação $f(t)$ e do deslocamento de saída $x_1(t)$ do sistema com folga dinâmica para a situação de ciclo limite da Figura 3.11. 72
- Figura 3.13 – Plano de fase (y_1, y_2) do oscilador de Van der Pol para: a) $\beta = \{0,2; 1; 2; 5; 10\}$ e b) $\beta = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$. De notar que as escalas dos eixos diferem para os diferentes valores de β 74
- Figura 3.14– Oscilação de saída $y(t)$ e correspondente amplitude do espectro de frequências do sistema VPO para: a) $\beta = 0,2$, b) $\beta = 1$, c) $\beta = 5$ e d) $\beta = 10$ 75
- Figura 3.15 – Representação em malha fechada da equação de Van der Pol. 76
- Figura 3.16 – Traçado de Nyquist de $G(j\omega)$ e de $-1/N(A)$ para o oscilador de Van der Pol. 77
- Figura 3.17 – Variação do período T em função de β do oscilador de Van der Pol. Para $\beta = 0$, o período $T = 2\pi$ (*i.e.*, oscilador harmónico). À medida que $\beta \rightarrow \infty$ observa-se que o período $T \rightarrow \infty$ 78
- Figura 3.18– Diagrama de blocos do FrVPO não forçado. Para $\alpha = 1$ obtém-se o clássico VPO. 80
- Figura 3.19 – Plano de fase (y_1, y_2) para o sistema FrVPO com ordem fraccionária de $\alpha = \{0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0\}$ e um parâmetro de controlo de $\beta = 1$ 84

Figura 3.20 – Plano de fase (y_1, y_2) para o sistema FrVPO com ordem fraccionária de $\alpha = 0,8$ e um parâmetro de controlo de $\beta = \{0,5; 1; 2; 4; 8; 16\}$ 84

Figura 3.21 – Evolução do período T do ciclo limite para $\beta_{\min}(\alpha) \leq \beta \leq 1$ e $0,3 \leq \alpha \leq 1$ 85

Figura 3.22 – Evolução da amplitude A do ciclo limite para $\beta_{\min}(\alpha) \leq \beta \leq 1$ e $0,3 \leq \alpha \leq 1$ 85

Figura 3.23 – Valor máximo do parâmetro de controlo em função de α , $\beta_{\min}(\alpha)$, para $0,3 \leq \alpha \leq 1$ 86

Figura 3.24 – Respostas nos tempos da saída $y(t)$ (esquerda) e espectro de frequências (direita) do sistema FrVPO, com $\alpha = \{0,4; 0,6; 0,8; 1,0\}$ e $\beta = 1$ 87

Figura 3.25 – Critério de potência em percentagem, $\eta(\%)$, para $0 < \alpha \leq 1$ e $\beta = 1$ 89

Figura 4.1 – Amplitude das sequências impulsionais, $|h^\alpha(k)|$, dos operadores de Euler, Tustin e Al-Alaoui com $T = 1$ s e para: a) $\alpha = 1/2$, b) $\alpha = -1/2$ 104

Figura 4.2 – Método (directo) dos mínimos quadrados. 106

Figura 4.3 – Interpretação do método de Prony para modelação de sinal. 110

Figura 4.4 – Interpretação do método de Shanks para a modelação de sinal. 113

Figura 4.5 – Ilustração do método de identificação. 116

Figura 4.6 – Diagramas de Bode (esquerda) e respostas ao degrau (direita) das aproximações de Prony ao operador de Euler, com $\alpha = -1/2$, para $m = n = 5$ e $N = \{11, 100, 200, 500, 1000\}$ 122

Figura 4.7 – Diagramas de Bode (esquerda) e respostas ao degrau (direita) das aproximações de Prony ao operador de Tustin, com $\alpha = -1/2$, para $m = n = 5$ e $N = \{11, 100, 200, 500, 1000\}$ 122

Figura 4.8 – Diagramas de Bode (esquerda) e respostas ao degrau (direita) das aproximações de Prony ao operador de Al-Alaoui, com $\alpha = -1/2$, para $m = n = 5$ e $N = \{11, 100, 200, 500, 1000\}$ 122

Figura 4.9 – Respostas impulsionais das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$. 125

Figura 4.10 – Diagramas de Bode das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	125
Figura 4.11 – Respostas ao degrau unitário das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	126
Figura 4.12 – Distribuição dos pólos e dos zeros das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin e c) Al-Alaoui.	127
Figura 4.13 – Respostas impulsiais das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	129
Figura 4.14 – Diagramas de Bode das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	130
Figura 4.15 – Respostas ao degrau unitário das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	131
Figura 4.16 – Distribuição dos pólos e dos zeros das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin e c) Al-Alaoui.	131
Figura 4.17 – Respostas impulsiais das aproximações de Shanks para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	134
Figura 4.18 – Diagramas de Bode das aproximações de Shanks para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	135
Figura 4.19 – Respostas ao degrau unitário das aproximações de Shanks para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$	135
Figura 4.20 – Distribuição dos pólos e dos zeros das aproximações de Shanks para $m = n = \{1, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin e c) Al-Alaoui.	136

Figura 4.21 – Ilustração das componentes presentes no cálculo da semiderivada da função $\sin(t)$ 140

Figura 4.22 – Semi-integral e semiderivada da função degrau $u(t-1)$ com a aproximação de Prony ao operador de Al-Alaoui para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários..... 141

Figura 4.23 – Semi-integral e semiderivada da função onda quadrada $qua(t)$ com a aproximação de Shanks ao operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários..... 142

Figura 4.24 – Semi-integral e semiderivada da função onda triangular $tri(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Tustin para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários..... 143

Figura 4.25 – Semi-integral e semiderivada da função onda triangular $tri(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários..... 144

Figura 4.26 – Semi-integral e semiderivada da função seno $s(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários. 145

Figura 4.27 – Semi-integral e semiderivada da função coseno $c(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação racional digital do integral e derivada fraccionários. 145

Figura 5. 1– Sistema de controlo de ordem fraccionária com função de transferência em malha aberta dada por $L(s)$ 152

Figura 5. 2 – Diagramas de Bode da amplitude e da fase de $L(j\omega)$ para $1 < \alpha < 2$.	153
Figura 5. 3 – Ilustração do princípio proposto. Note a fase constante em torno da frequência ao ganho unitário ω_c .	155
Figura 5. 4 – Lugar de raízes da equação característica (5.8). O deslizamento ao longo das rectas assegura a robustez do sistema.	157
Figura 5. 5 – Diagramas de Bode da amplitude e da fase de $T(j\omega)$ para $1 < \alpha < 2$.	159
Figura 5. 6 – Resposta ao degrau unitário de $T(s)$ para $1 < \alpha < 2$.	163
Figura 5. 7 – Sobreelongação da resposta ao degrau unitário de $T(s)$ para $1 \leq \alpha \leq 2$.	163
Figura 5. 8 – Tempo de estabelecimento T_s (normalizado) para $1 < \alpha < 2$, com as curvas analítica (linha sólida) e aproximada (linha pontilhada).	165
Figura 5. 9 – Respostas ao degrau unitário das soluções analítica $y(t)$, aproximada $y_a(t)$, e respectivos erros $e(t) = y(t) - y_a(t)$ para $1 \leq \alpha \leq 2$.	166
Figura 5. 10 – Sistema de controlo realimentado com o controlador PID $G_c(s)$.	168
Figura 5. 11 – Estrutura do sistema para sintonia de controladores PID.	170
Figura 5. 12 – Respostas $y_r(t)$ e $y_p(t)$ a um degrau unitário aplicado na entrada de referência e na entrada de perturbação, respectivamente, do sistema em malha fechada com o controlador PID e para $G_{pn}(s) = 1/(s+1)^n$, $n = 2, 3, 4$. As especificações desejadas são $\alpha = 1,5$ (MF = 45°) e $\omega_c = 0,6$ rad/s.	172
Figura 5. 13 – Diagramas de Bode da amplitude e da fase do sistema em malha aberta com o controlador PID, para $G_{pn}(s) = 1/(s+1)^n$, $n = 2, 3, 4$. As especificações desejadas são $\alpha = 1,5$ (MF = 45°) e $\omega_c = 0,6$ rad/s. Para efeitos de comparação é também mostrada a curva do integrador de ordem fraccionária ideal correspondente, que é dado por $(0,6/j\omega)^{1,5}$.	174
Figura 5. 14 – Respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado pelo método proposto, para $G_{p3}(s) = 1/(s+1)^3$, com as especificações: a) MF = 60° e $\omega_c = \{0,5; 0,75; 1\}$ rad/s, b) $\omega_c = 1$ rad/s e MF = {30°; 45°; 60°}.	175

Figura 5. 15 – Diagrama de Bode da fase e resposta ao degrau unitário, $y_r(t)$, do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado pelo método proposto, para $G_{p3}(s) = 1/(s+1)^3$ e $\alpha = 3/2$ (MF = 45°), $\omega_c = 0,8$ rad/s. Os parâmetros obtidos para o PID são $K = 1,9158$, $T_i = 1,1407$ e $T_d = 0,9040$ 176

Figura 5. 16 – Diagrama de Bode da fase e resposta ao degrau unitário, $y_r(t)$, do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado pelo método proposto, para $G_{p4}(s) = 1/(s+1)^4$ e $\alpha = 4/3$ (MF = 60°), $\omega_c = 0,5$ rad/s. Os parâmetros obtidos para o PID são $K = 1,3774$, $T_i = 1,7030$ e $T_d = 1,7187$ 177

Figura 5. 17 – Respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado através do método proposto, para $\hat{G}_{pb}(s)$, com as especificações: a) MF = 45° e $\omega_c = \{0,15; 0,20; 0,25\}$ rad/s, b) $\omega_c = 0,25$ rad/s e MF = {30°, 45°, 60°}. 180

Figura 5. 18 – Respostas ao degrau $r(t)$ e à perturbação $p(t)$ do sistema em malha fechada com o controlador PID sintonizado de acordo com as heurísticas de Z-N, o critério ISTE e o método proposto para $G_{pc}(s)$. As especificações do sistema (para o método proposto) são MF = 80° e $\omega_c = 0,25$ rad/s. 182

Figura A.1 – Função Gama $\Gamma(x)$, $-4 < x < 4$ 199

Figura A.2 – Integrais de Fresnel. 201



Índice de Tabelas

Tabela 3.1: Lista de aproximações inteiras para o integrador fraccionário $1/s^\alpha$, com uma discrepância máxima de $\Delta = 2$ dB.	82
Tabela 4. 1 – Métodos de discretização de $s \rightarrow z$	97
Tabela 4. 2: Aproximações de Padé ao operador de Euler para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$	123
Tabela 4. 3: Aproximações de Padé ao operador de Tustin para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$	123
Tabela 4. 4: Aproximações de Padé ao operador de Al-Alaoui para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$	124
Tabela 4. 5: Aproximações de Prony ao operador de Euler para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$	127
Tabela 4. 6: Aproximações de Prony ao operador de Tustin para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$	128
Tabela 4. 7: Aproximações de Prony ao operador de Al-Alaoui para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$	128
Tabela 4. 8: Aproximações de Shanks ao operador de Euler para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$	132
Tabela 4. 9: Aproximações de Shanks ao operador de Tustin para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$	132

Tabela 4. 10: Aproximações de Shanks ao operador de Al-Alaoui para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$.	133
Tabela 5. 1: Parâmetros do controlador PID, (K, T_i, T_d) , para os processos $G_{pn}(s) = 1/(s+1)^n$, $n = 2, 3, 4$. As especificações do sistema são $\alpha = 1,5$ e $\omega_c = 0,6$ rad/s.	172
Tabela 5. 2: Parâmetros do controlador PID, (K, T_i, T_d) , para o processo $G_{p3}(s)$.	175
Tabela 5. 3: Parâmetros do controlador PID, (K, T_i, T_d) , para o processo $\hat{G}_{pb}(s)$.	179
Tabela 5. 4: Coeficientes (a_i, b_i) , $i = 1, 2, 3$, do critério ISTE, para variações na entrada de referência $r(t)$.	181
Tabela 5. 5: Parâmetros do PID, (K, T_i, T_d) , e especificações temporais, $(T_r, T_s, \%OS)$, do sistema compensado com $G_{pc}(s)$.	182
Tabela A.1: Relações da função Gama.	198
Tabela A.2: Alguns valores particulares da função Gama.	198



Tabela de Acrónimos

C	Caputo
CFE	Continued Fraction Expansion
CRONE	Commande Robuste d'Ordre Non Entier
DF	Derivada Fraccionária
DIF	Derivada e Integral Fraccionário
F	Transformada de Fourier
FD	Função Descritiva
FIR	Finite Impulse Response
FFT	Fast Fourier Transform
FOPDT	First-Order Plus Dead-Time
FrPID	Fractional PID
FrVPO	Fractional Van der Pol Oscillator
G	Grünwald-Letnikov
IAE	Integral Absolute Error
IIR	Infinite Impulse Response
ISE	Integral Squared Error
ISTE	Integral Squared Time Weighted Error

IST ² E	Integral Squared Time-Squared Weighted Error
ITAE	Integral Time Absolute Error
L	Transformada de Laplace
OS	Overshoot Percentual
PID	Proporcional Integral Derivativo
PSE	Power Series Expansion
R	Riemann-Liouville
VPO	Van der Pol Oscillator

Capítulo 1

Introdução

ESTA tese dissertação tem por objectivo estudar a aplicação da teoria das derivadas e dos integrais de ordem não inteira, usualmente designada por *teoria do cálculo fraccionário*, na análise dinâmica e no controlo de sistemas.

Nesta ordem de ideias, o capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. A secção 1.1 apresenta um resumo histórico sobre a evolução da teoria das derivadas e dos integrais fraccionários. De seguida, a secção 1.2 descreve algumas aplicações do cálculo fraccionário e a secção 1.3 formula as motivações e os objectivos que enquadram a realização desta tese de dissertação. Por último, a secção 1.4 faz uma breve descrição da estrutura e dos capítulos que compõem esta tese.

1.1 Resumo Histórico

É usual adoptar os operadores diferenciais d^{-1}/dt^{-1} , d/dt , d^2/dt^2 , d^3/dt^3 , nas mais diversas áreas da ciência e da engenharia. No entanto, pode-se questionar a necessidade da ordem de diferenciação ser um inteiro. Por exemplo, porque não a existência de um operador $d^{1/2}/dt^{1/2}$ ou $d^{\sqrt{2}+j3}/dt^{\sqrt{2}+j3}$? A diferenciação fraccionária é mais complexa que a integrodiferenciação inteira e, até ao momento, não existe uma interpretação geométrica óbvia, como acontece para a habitual associação dos declives e áreas respectivamente para as derivadas e integrais inteiros. Embora tenha havido algumas tentativas (Méhauté, 1991; Nigmatullin, 1992; Rutman, 1994, 1995; Tatom, 1995; Adda, 1997, 1998; Yu, *et al.*, 1997;

Gorenflo, 1998; Kiryakova, 1998; Mainardi, 1998; Torbati e Hammond, 1998; Westerlund, 2002; Moltz, *et al.*, 2002; Podlubny, 2002; Machado, 2003) no sentido de se estabelecer uma interpretação geométrica e física para as derivadas e integrais fraccionários, o certo é que esta questão não tem sido pacífica na comunidade científica, estando ainda hoje por se definir, de uma forma consensual e clara, o significado real dos operadores fraccionários.

¹O conceito da generalização da diferenciação e integração a uma ordem não inteira não é de todo nova! O interesse neste assunto surgiu ao mesmo tempo que as ideias da teoria do cálculo diferencial, há mais de 300 anos, e constitui a base do cálculo diferencial tal como o conhecemos hoje. De facto, as primeiras especulações sobre esta matéria são encontradas na correspondência de Leibniz com Bernoulli e, posteriormente, com L'Hôpital (1695) e Wallis (1697), onde se encontram alguns apontamentos relativos à derivada de ordem $\alpha = 1/2$. No entanto, deveu-se a Euler (1738) o primeiro passo, quando este analisou o cálculo de derivadas fraccionárias (DF's) para a função potência. No seguimento deste resultado Laplace (1812), Lacroix (1820) e Fourier (1822) sugeriram, também, algumas ideias relativas ao cálculo de DF's.

²O verdadeiro início da teoria relativa ao cálculo de derivadas e integrais fraccionários (DIF's) deu-se com os trabalhos de Abel e Liouville. Abel (1823) investigou certas expressões fora do contexto do cálculo de DIF, mas os resultados foram de importância considerável para o desenvolvimento da teoria. Por seu lado, Liouville (1822-1837) estudou, explicitamente, várias questões nomeadamente a definição e o cálculo de DF para valores complexos e a sua aplicação a certos tipos de equações diferenciais lineares ordinárias, o efeito de uma mudança de variável no cálculo de DIF e a definição de uma DF como o limite do quociente $\Delta_h^\alpha f / h^\alpha$, onde $\Delta_h^\alpha f$ é a diferença de ordem fraccionária α . Posteriormente, Riemann (1847), Holmgren (1865-1867) e Letnikov (1868) tiveram, também, papéis de relevo no prosseguimento da teoria. Entre outros resultados, Holmgren considerou, pela primeira vez, a derivação e a integração fraccionárias como operações inversas e generalizou a expressão de $d^\alpha(u \cdot v) / dx^\alpha$. Por seu lado, Letnikov desenvolveu a DF como limite da expressão $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h^\alpha f / h^\alpha$, demonstrou que as expressões propostas por Liouville e Riemann estavam de acordo com esta definição e generalizou a teoria dos DIF's para valores

^{1, 2} A lista de referências bibliográficas apresentadas neste parágrafo são retiradas dos livros de Oldham e Spanier (1974) e de Samko, *et al.* (1993)

complexos. Mais próximo dos nossos dias, são de referir numerosas contribuições tais como as de Hadamard (1892), Weyl (1917) e Marchaud (1927), que tem ampliam o âmbito desta teoria.

1.2 Aplicações do Cálculo Fraccionário

Ao longo de quase três séculos que a teoria das derivadas e integrais fraccionários tem sido essencialmente desenvolvida sob um ponto de vista teórico, sendo unicamente alvo de estudo por parte dos matemáticos.

Os operadores fraccionários são definidos através da operação de convolução, o que os tornam particularmente adequados para caracterizar fenómenos de memória e de hereditariedade (tais como, a difusão, a viscoelasticidade e a transmissão de linhas). Na realidade, esta é uma das vantagens das derivadas fraccionárias em comparação com os modelos de ordem inteira “clássicos”, onde estas propriedades são simplesmente ignoradas.

O cálculo fraccionário encontra aplicações em numerosas áreas da ciência e engenharia (dinâmica de fluídos, reologia, electromagnetismo, controlo, biologia, caos, fractais, entre outros), nas áreas sociais e humanas, passando pelas probabilidades e estatística, até às áreas da economia e finanças. Este facto está comprovado pelo número crescente de publicações a que se tem assistido nos últimos anos. Algumas das suas aplicações mais significativas são:

- Nas áreas da física e da química, onde as derivadas fraccionárias estão normalmente associadas com a aplicação dos fractais na modelação de reacções electroquímicas, da irreversibilidade e do electromagnetismo;
- Na teoria dos fractais, para a modelação dinâmica de sistemas caracterizados por estruturas auto-similares e porosas (*i.e.*, estruturas fractais). Os recentes avanços na área dos fractais (e também do caos) revelam algumas relações com o cálculo fraccionário, motivando um renascer do seu interesse e abrindo novas perspectivas de aplicação dos operadores fraccionários;
- Na teoria do controlo de sistemas dinâmicos, em que o sistema controlado e/ou o controlador são descritos por equações diferenciais fraccionárias. Apesar de ser uma das áreas mais promissoras da sua aplicação, é necessário uma análise mais

aprofundada da teoria e o desenvolvimento de métodos que levem a uma efectiva utilização do cálculo fraccionário nesta área;

Praticamente todas as áreas científicas são tocadas pelo cálculo fraccionário. Embora este tema remonte à própria origem do cálculo diferencial, raramente é incluído nos programas curriculares dos cursos actualmente oferecidos. Possivelmente, isto seja devido ao facto de a comunidade académica ainda se sentir pouco familiarizada com este assunto e com as suas aplicações.

Concluindo, as derivadas e integrais fraccionários são tão antigos e sólidos quanto as de ordem inteira, passando a ficar aberta uma nova dimensão quando se considera o operador d^α/dt^α tendo a ordem α como um parâmetro arbitrário. Muitos problemas da ciência e da engenharia podem ser expressos e resolvidos de uma forma sucinta e elegante fazendo uso da teoria do cálculo fraccionário. Mais ainda, as potencialidades reveladas por este “novo” método matemático tornam-no, actualmente, numa das ferramentas mais poderosas e úteis para a resolução de inúmeros problemas.

1.3 Motivação e Objectivos

O principal objectivo desta tese consiste na aplicação dos conceitos associados à teoria das derivadas e integrais fraccionários na área do controlo automático de sistemas. Deve-se referir que só nas últimas décadas é possível encontrar as primeiras aplicações no controlo automático (Bode, 1945; Tustin, *et al.*, 1958; Manabe, 1961, 1963; Carlson e Halijak, 1961, 1963; Oustaloup, 1981). Recentemente, assiste-se a um desenvolvimento acentuado na identificação, modelação e controlo de sistemas. A adopção na área do controlo tem revelado elevados desempenhos face às estratégias “clássicas” de controlo, fazendo com que seja actualmente uma área de investigação com enormes potencialidades para uma utilização vantajosa dos conceitos associados à teoria dos sistemas de ordem fraccionária. Nesta perspectiva, o trabalho aqui apresentado insere-se nas correntes actualmente emergentes que apontam para o desenvolvimento deste tipo de algoritmos.

Tomando estas ideias em consideração, podem estabelecer-se os seguintes aspectos a serem cumpridos com a realização dos trabalhos conducentes à elaboração desta tese de dissertação:

- Análise dinâmica e controlo de sistemas lineares e de sistemas não lineares por intermédio da ferramenta proporcionada pelo cálculo fraccionário;
- Exploração de novos métodos para o projecto de operadores (integradores e diferenciadores) discretos fraccionários que sejam adequados para uma análise por transformada dos Z e adequados para uma implementação digital em tempo real. Deste modo, pretende-se simular sistemas de ordem fraccionária e implementar controladores fraccionários com um melhor desempenho;
- Desenvolvimento de novas técnicas de sintonia do algoritmo de controlo mais utilizado em sistemas de controlo industriais, ou seja, o controlador PID. Neste caso, o objectivo será a definição de uma estratégia de sintonia que leve ao desenvolvimento de heurísticas robustas e ao estabelecimento de esquemas de sintonia comuns aos sistemas de ordem inteira e de ordem fraccionária;
- Divulgação das potencialidades reveladas pela utilização do cálculo fraccionário nas mais diversas áreas das ciências da engenharia e, em particular, na área do controlo de sistemas.

1.4 Estrutura da Tese

Esta tese de dissertação encontra-se organizada em seis capítulos e um anexo.

O **Capítulo 1** – Introdução – corresponde à presente introdução, no qual se definem o problema, principais motivações e objectivos e, por último, se faz uma descrição dos diversos capítulos que compõem esta tese.

No **Capítulo 2** – Fundamentos do Cálculo Fraccionário e Aplicações – apresentam-se os fundamentos e algumas aplicações do cálculo fraccionário na área do controlo automático de sistemas. Este capítulo pretende estabelecer um enquadramento matemático que sirva de base para os outros capítulos. Assim, aqui são estabelecidas definições, propriedades, métodos de solução (analítica e numérica) de equações diferenciais fraccionárias, assim como algumas técnicas de análise usadas pelo cálculo fraccionário. Por último, são referidas também algumas das aplicações mais relevantes desta teoria na área do controlo de sistemas.

No **Capítulo 3** – Análise Dinâmica de Alguns Sistemas Não Lineares – estudam-se dois tipos de sistemas não lineares numa perspectiva da aplicação da teoria do cálculo fraccionário. Na primeira parte abordam-se os sistemas de folga com impactos, baseado na aplicação da

função descritiva. Na segunda parte analisa-se uma nova versão do oscilador de Van der Pol, introduzindo uma derivada de ordem fraccionária na formulação de espaço de estados que descreve a sua dinâmica. A este sistema designou-se de oscilador de Van der Pol fraccionário, o qual é analisado, tanto no domínio das frequências como no domínio dos tempos, para diversas ordens da derivada fraccionária e, conseqüentemente, da ordem total do sistema.

No **Capítulo 4** – Aproximações Digitais de Operadores Fraccionários Através de Funções Racionais – é proposto uma nova abordagem para a obtenção de aproximações digitais na forma de funções racionais de integradores e de diferenciadores de ordem fraccionária. A nova estratégia adopta as técnicas de modelação de sinais determinísticos para a realização de aproximações racionais (filtros IIR) dos operadores fraccionários. Nesta perspectiva, são desenvolvidas as técnicas de Padé, Prony e de Shanks, as quais requerem somente a resolução de um sistema de equações lineares. Apresenta-se também um novo método que constitui uma alternativa eficiente às técnicas de modelação de sinal, baseado no algoritmo de identificação de sistemas pelos mínimos quadrados, e que gera as mesmas aproximações que o método de Prony, mas com a vantagem de se obter, num só passo, a função racional desejada.

No **Capítulo 5** – Sintonia de Controladores PID Robustos – apresenta-se uma nova estratégia de sintonia de controladores PID. O método proposto baseia-se na aplicação de conceitos básicos associados à teoria dos sistemas de ordem fraccionária. Os parâmetros do PID são obtidos através da minimização do integral do erro quadrático entre as respostas ao degrau sistema de referência, com a *função de transferência ideal de Bode* em malha aberta, e o sistema compensado com o controlador PID. Verifica-se que os sistemas, sintonizados por este método, tornam-se robustos a variações do ganho exibindo respostas ao degrau com uma sobreelongação constante, ou seja, com uma propriedade de amortecimento constante. São também encontradas diversas expressões úteis para a caracterização da função de transferência fraccionária utilizada para a sintonia do sistema com o controlador PID, tanto no domínio das frequências como no domínio dos tempos.

No **Capítulo 6** – Conclusões e Perspectivas de Evolução Futura – são apresentadas as principais conclusões e são apontadas perspectivas de evolução futura do trabalho. Neste enquadramento, são, também, realçadas as principais contribuições desta tese de dissertação.

Esta tese fica concluída com o **Anexo A** – Funções Especiais do Cálculo Fraccionário – onde se relembram algumas funções especiais que desempenham um papel fundamental na teoria do cálculo fraccionário.

Capítulo 2

Fundamentos do Cálculo Fraccionário e Aplicações

NESTE capítulo apresentam-se os fundamentos da teoria das derivadas e integrais fraccionários, vulgarmente designada de *cálculo fraccionário*, e que serve de base matemática para os capítulos seguintes. Nesta perspectiva, são estabelecidas várias definições, propriedades, métodos de solução (analítica e numérica) de equações diferenciais fraccionárias, assim como algumas técnicas de análise usadas pelo cálculo fraccionário. São referidas também algumas das aplicações mais relevantes desta teoria na área do controlo automático de sistemas.

Tomando estas ideias em consideração, o capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. Na secção 2.1 é feito um enquadramento histórico da evolução da teoria do cálculo fraccionário até aos nossos dias. Nas secções 2.2, 2.3 e 2.4 são estabelecidas respectivamente a notação, as definições e as propriedades das derivadas fraccionárias. De seguida, as secções 2.5 e 2.6 abordam a utilização das transformadas de Laplace e de Fourier no cálculo fraccionário. Nesta ordem de ideias, a secção 2.7 propõe um método de resolução analítica de equações diferenciais fraccionárias baseado na transformada de Laplace. Na secção 2.8 analisa-se o cálculo numérico de derivadas fraccionárias e a sua aplicação à resolução numérica de equações diferenciais fraccionárias. Na secção 2.9 é sugerida uma abordagem alternativa para o cálculo numérico de derivadas fraccionárias baseada numa representação matricial dos equivalentes discretos dos operadores de diferenciação e integração fraccionários. A sua utilização é estendida à solução numérica de equações diferenciais

fraccionárias. A secção 2.10 ilustra algumas das áreas de aplicação do cálculo fraccionário e descreve, com algum detalhe, três aplicações desta teoria na área do controlo automático de sistemas, as quais se revelam de grande utilidade prática. Por último, a secção 2.11 estabelece as principais conclusões.

2.1 Introdução

O *cálculo fraccionário* designa a teoria das derivadas e integrais a uma ordem arbitrária, a qual unifica e generaliza as noções de integração e diferenciação de ordem inteira. A primeira vez que se colocou a questão do significado de uma derivada de ordem não inteira foi em 1695, quando L'Hôpital interrogou Leibniz sobre uma interpretação de $d^\alpha f/dt^\alpha$, no caso em que α fosse uma *fracção*. Daqui surgiu o termo *fraccionário*, que se mantém até hoje, devido essencialmente a razões históricas. De facto, a designação correcta desta teoria seria a já referida *integração e diferenciação a uma ordem arbitrária*.

A derivada a uma ordem α real arbitrária pode ser considerada como uma interpolação da seguinte sequência de integrais e derivadas de ordem múltipla inteira:

$$\dots, \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \dots$$

A generalização do conceito de derivada $d^\alpha f/dt^\alpha$ para valores não inteiros de α remonta ao início do desenvolvimento do cálculo diferencial. De facto, na correspondência de Leibniz com Bernoulli e, posteriormente¹, com L'Hôpital (1695) e Wallis (1697) encontram-se alguns apontamentos relativos à derivada de ordem $\alpha = 1/2$. No entanto, deveu-se a Euler (1738) o primeiro passo, quando este analisou o cálculo de derivadas fraccionárias para a função potência. Desde essa altura o cálculo fraccionário tem sido objecto de uma intensa investigação sob o ponto de vista matemático.

Pode-se referenciar uma extensa lista de matemáticos (a maioria famosos) que deram importantes contribuições tanto para a teoria como para a aplicação do cálculo fraccionário. Assim, até meados do século XX, incluem-se² Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823),

^{1,2} A lista de referências bibliográficas apresentadas neste parágrafo estão por ordem cronológica e são retiradas do livro de Oldham e Spanier (1974)

Liouville (1832), Riemann (1847), Grünwald (1867), Letnikov (1868-1872), Laurent (1884), Krug (1890), Hadamard (1892), Heaviside (1892-1912), Hardy e Littlewood (1917-1928), Weyl (1917), Lévy (1923), Davis (1924-1936), Post (1930), Zygmund (1935-1945), Love (1938), Erdélyi (1939-1965), Kober (1940), Riesz (1949), Feller (1952), entre muitos outros.

Contudo, só nas últimas décadas é que este assunto tem sido objecto de conferências e textos especializados. De facto, a primeira conferência foi organizada por B. Ross sob o título “First Conference on Fractional Calculus and its Applications”, na Universidade de New Haven, EUA, em 1974. O primeiro livro inteiramente dedicado ao cálculo fraccionário surge também em 1974, pelos autores Oldham e Spanier (1974).

Actualmente, existem diversos livros dedicados ao cálculo fraccionário (embora esta lista ainda seja escassa), nomeadamente Oldham e Spanier (1974), Samko, *et al.*, (1993), Miller e Ross (1993), Kiryakova (1994), Podluny (1999b), entre outros. Nos últimos anos, o crescente interesse neste assunto tem sido estimulado por aplicações em análise numérica e em diferentes áreas da ciência e engenharia, incluindo possivelmente as áreas do caos e dos fractais. Este facto levou ao aparecimento de vários livros de colectânea de artigos (Carpinteri e Mainardi (1997); Hilfer (2000)), assim como ao lançamento de diversos números especiais em revistas (Nonlinear Dynamics, Vol. 29, Nos. 1-4, 2002, editado por J. A. Tenreiro Machado; Signal Processing, Vol. 83, No. 11, 2003, editado por Manuel D. Ortigueira e J. A. Tenreiro Machado; Nonlinear Dynamics, 2005 (data prevista da publicação), editado por Om P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado e J. Sabatier) sobre aplicações do cálculo fraccionário.

Um dos objectivos deste capítulo consiste em apresentar e esclarecer os aspectos fundamentais da teoria das derivadas e integrais fraccionários. Assim, os resultados aqui apresentados não são meramente expostos na sua forma final, mas, sempre que possível, derivados de uma forma facilmente compreensível até à obtenção do resultado desejado. Isto verifica-se para o estabelecimento das várias definições, propriedades, transformadas de Laplace e de Fourier, e soluções analítica ou numérica de equações diferenciais fraccionárias. Uma boa compreensão da teoria conduzirá a uma melhor utilização e aplicação prática dos operadores fraccionários, assim como à determinação do seu real impacto nas mais diversas áreas da engenharia e ciência e, em particular, na área do controlo automático de sistemas, que é o tema central desta tese.

Como referência para a teoria (e algumas aplicações) das derivadas e integrais fraccionários aponta-se a consulta, e pela seguinte ordem crescente de complexidade, dos livros de Oldham e Spanier (1974), Podlubny (1999b) e de Miller e Ross (1993). Para uma

análise mais detalhada sobre este assunto consultar a obra enciclopédica sobre a teoria das derivadas e integrais a uma ordem arbitrária de Samko, *et al.*, (1993). Os dois primeiros livros serviram como referência na elaboração de grande parte deste capítulo, especialmente o texto devido a Podlubny (1999b).

2.2 Notação das Derivadas Fraccionárias

O tipo de notação adoptada é um aspecto importante quando se lida com as derivadas e integrais a uma ordem arbitrária. Dela dependem uma boa compreensão e utilização prática das diferentes definições existentes para as derivadas e integrais a uma ordem arbitrária.

Este texto usa a notação que foi inicialmente estabelecida por Davis (1936), e posteriormente adoptada por vários outros autores que a divulgaram na área do cálculo fraccionário (Miller e Ross, 1993; Podlubny (1999b), entre outros). Assim, a derivada a uma ordem α arbitrária é definida através do operador:

$${}_a D_t^\alpha \quad (2.1)$$

em que D denota a operação de diferenciação. O nome abreviado para derivadas a uma ordem arbitrária é *derivadas fraccionárias*. Do mesmo modo, o termo *integrais fraccionários* significa integrais a uma ordem arbitrária e corresponde a valores negativos de α . Neste caso, a notação utilizada é a mesma e, portanto, um integral fraccionário de ordem $\beta > 0$ é definido por:

$${}_a D_t^{-\beta} \quad (2.2)$$

Os índices a e t denotam os limites inferior e superior da diferenciação, respectivamente. O aparecimento explícito destes limites no operador revela-se essencial, como veremos a seguir na secção 2.3. De facto, a sua utilização pode evitar algumas problemas que possam surgir na aplicação prática dos operadores fraccionários.

Apesar de anotação atrás referida ser, sem dúvida, a mais usada e a que talvez suscite menos ambiguidade em termos de sua utilização prática, encontram-se, contudo, outras notações em textos fundamentais sobre o cálculo fraccionário. De entre estas, saliente-se a usada por Oldham and Spanier (1974), que define o operador fraccionário como:

$$\frac{d^\alpha}{[d(t-a)]^\alpha} \quad (2.3)$$

em que α assume um valor arbitrário (real ou complexo, inteiro ou fraccionário). Oldham and Spanier (1974) designa o operador (2.3) por *integro-diferenciador*, pois unifica num único operador as noções de integração e diferenciação. Assim, verifica-se a equivalência:

$${}_a D_t^\alpha \equiv \frac{d^\alpha}{[d(t-a)]^\alpha} \quad (2.4)$$

Esta notação é também muito utilizada devido ao facto que, para valores inteiros de $\alpha = n$, resulta no simbolismo associado ao cálculo diferencial clássico (com $a = 0$) d^n/dt^n .

Neste texto, quando os operadores fraccionários aparecem sem os seus limites de integração, considera-se que implicitamente estes tomam os valores de $a = 0$ e que a variável independente é t , ou seja, é designado pelo símbolo D^α ou então por D_t^α .

2.3 Definições Básicas de Derivadas Fraccionárias

Nesta secção são apresentadas várias definições para as derivadas e integrais fraccionários, assim como algumas das suas propriedades básicas. Estas definições resultam de uma generalização das noções de derivadas e integrais de ordem inteira provenientes do cálculo diferencial clássico. Ao longo dos últimos três séculos, as derivadas e integrais fraccionários têm sido alvo de diversas abordagens resultando em definições matemáticas nem sempre equivalentes entre si (Oldham e Spanier, 1974; Podlubny, 1999b; Miller e Ross, 1993; Samko, *et al.*, 1993).

O operador fundamental, ${}_a D_t^\alpha$, que generaliza as derivadas e integrais a uma ordem α arbitrária, é definido da seguinte forma:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} d^\alpha/dt^\alpha, & \text{Re}(\alpha) > 0 \\ 1, & \text{Re}(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha}, & \text{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

onde α pode tomar um valor arbitrário: real, racional, irracional ou mesmo complexo. Neste texto, só se considera valores reais da ordem α .

Na secção seguinte são apresentadas somente as definições mais frequentemente usadas e consideradas como as mais importantes, quer sob o ponto de vista de desenvolvimento matemático quer da sua aplicação na resolução de problemas práticos e, em particular, na área do controlo automático de sistemas. Estas definições são, e pela seguinte ordem de apresentação, as expressões de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e de Caputo.

2.3.1 Definição de Grünwald-Letnikov

A definição de Grünwald-Letnikov aqui estabelecida é considerada como sendo a mais fundamental, dado que é a que impõe menos restrições nas funções em que é aplicada e unifica num único operador as noções de derivada e integral (Oldham e Spanier, 1974). De facto, esta definição, expande e unifica directamente as noções de quociente de diferenças e somas de Riemann também para as derivadas e integrais fraccionários, como é demonstrado a seguir.

Considera-se a definição usual para a primeira derivada de uma função $f(t)$ como sendo o limite do quociente das diferenças atrasadas:

$$\frac{df}{dt} \equiv f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.6)$$

De forma similar obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &\equiv f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

e, do mesmo modo:

$$\frac{d^3 f}{dt^3} \equiv f'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (2.8)$$

Assim, por indução, chega-se à expressão geral para valores inteiros positivos de n :

$$D^n f \equiv \frac{d^n f}{dt^n} \equiv f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

em que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.10)$$

é a notação usual para os coeficientes binomiais.

De notar que a derivada de ordem n (2.9) é uma combinação linear dos valores da função para os $(n+1)$ valores $t, t-h, t-2h, \dots, t-nh$ da variável independente. Os coeficientes são coeficientes binomiais e alternam no sinal.

Partindo agora da conhecida definição de integral como sendo o limite da soma de Riemann, e seguindo um processo iterativo similar ao anterior, chega-se à expressão final para um integral de ordem n (Oldham e Spanier, 1974; Podlubny, 1999b):

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^k \binom{-n}{k} f(t-kh) \quad (2.11)$$

em que $[x]$ denota a parte inteira de x e:

$$(-1)^k \binom{-n}{k} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} \quad (2.12)$$

De notar que o integral múltiplo de ordem n (2.11) é também uma soma pesada dos valores da função, mas em que o número de termos tende para *infinito* à medida que $h \rightarrow 0$. Os pesos são também definidos por coeficientes binomiais, e todos eles positivos.

Comparando as expressões (2.9) e (2.11), verifica-se que a derivada e o integral de ordem inteira n da função $f(t)$ podem ser definidos através de uma única expressão geral, resultando:

$${}_a D_t^q f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-q} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^k \binom{q}{k} f(t-kh) \quad (2.13)$$

a qual representa a derivada e integral de ordem n para $q = n$ e $q = -n$, respectivamente. Esta observação leva-nos a generalizar as noções de integração e diferenciação a uma ordem não inteira fazendo $q = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) na expressão (2.13). Nesta perspectiva, a *definição de Grünwald-Letnikov para a derivada e integral fraccionário de ordem α* é dada por:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

em que:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (2.15)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função Gama (ver Anexo A – Funções Especiais do Cálculo Fraccionário), que generaliza a função factorial para valores não inteiros do argumento.

2.3.2 Definição de Riemann-Liouville

A definição de Riemann-Liouville resulta da generalização da conhecida fórmula do integral de Cauchy que reduz o cálculo da primitiva, correspondente à integração de multiplicidade n de uma função $f(t)$, a uma integração simples do tipo convolução. Considerando $t > a \in \mathbb{R}$, a fórmula de Cauchy é expressa como:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-n} f(t) &\equiv \int_a^t \int_a^{\tau_{n-1}} \dots \int_a^{\tau_2} \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.16)$$

De uma forma natural, a fórmula anterior pode ser estendida de valores inteiros positivos ($n \in \mathbb{N}$) a valores reais positivos ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) usando a função Gama. Assim, tendo em conta que $(n-1)! = \Gamma(n)$, e introduzindo o número real positivo α , o *integral fraccionário da função $f(t)$ de ordem $\alpha > 0$* é definido como:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.17)$$

A escolha do limite inferior com $a = -\infty$ é devida originalmente a Liouville³ (1832), enquanto que com $a = 0$ é devida a Riemann⁴ (1847).

O operador (2.17) possui as seguintes propriedades importantes ($\alpha, \beta > 0$):

$${}_a D_t^{-0} f(t) = f(t) \quad (2.18)$$

$${}_a D_t^{-\alpha} \left({}_a D_t^{-\beta} f(t) \right) = {}_a D_t^{-\beta} \left({}_a D_t^{-\alpha} f(t) \right) = {}_a D_t^{-\alpha-\beta} f(t) \quad (2.19)$$

As propriedades (2.18) e (2.19) são, obviamente, uma generalização natural das propriedades conhecidas quando a ordem é um inteiro positivo.

Para introduzir a noção de derivada fraccionária de ordem α , pode-se considerar a possibilidade de substituição de α por $-\alpha$ na definição (2.17). Contudo, esta generalização necessita de algum cuidado, de forma a garantir a convergência do integral e a preservar as propriedades conhecidas das derivadas de ordem inteira.

De facto, considerando D^n , com $n \in \mathbb{N}$, o operador da derivada de ordem n , e I o operador identidade, sabe-se que:

$$D^n D^{-n} = I, \quad D^{-n} D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.20)$$

Isto é, D^n é inversa à esquerda (e não inversa à direita) do correspondente operador integral D^{-n} . Como consequência, é de esperar que D^α seja também definida como inversa à esquerda de $D^{-\alpha}$. Para tal, introduzindo um inteiro positivo n tal que $n-1 < \alpha < n$, obtém-se a definição Riemann-Liouville para a *derivada fraccionária da função $f(t)$ de ordem $\alpha > 0$* :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \end{aligned} \quad (2.21)$$

O operador (2.21) possui as seguintes propriedades importantes:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \alpha = n \quad (2.22)$$

^{3,4} Referências do livro de Oldham e Spanier (1974)

$${}_a D_t^\alpha \left({}_a D_t^{-\alpha} f(t) \right) = f(t), \quad \alpha \geq 0 \quad (2.23)$$

$${}_a D_t^\alpha \left({}_a D_t^{-\beta} f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (2.24)$$

É interessante referir alguns aspectos relacionados com o cálculo da derivada fraccionária de Riemann-Liouville de algumas funções conhecidas. Assim, para a função potência $f(t) = t^\lambda$, obtém-se a expressão (Podlubny, 1999b):

$${}_0 D_t^\alpha \left(t^\lambda \right) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, \quad \lambda > -1, \quad \alpha > 0, \quad t > 0 \quad (2.25)$$

O resultado (2.25) é uma generalização natural da derivação inteira. Um facto interessante a notar é que a derivada fraccionária ${}_0 D_t^\alpha f(t)$ é diferente de zero para a função constante $f(t) = C$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$. De facto, colocando $\lambda = 0$ na função (2.25) obtém-se:

$${}_0 D_t^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha \geq 0, \quad t > 0 \quad (2.26)$$

Constata-se que a função (2.26) só é igual a zero para $\alpha \in \mathbb{N}$, devido às assíntotas verticais da função Gama nos pontos $0, -1, -2, \dots$

A definição de Riemann-Liouville desempenha um papel muito importante no desenvolvimento da teoria das derivadas e integrais fraccionários e na sua aplicação na área da matemática pura (*e.g.*, solução de equações diferenciais de ordem inteira, definição de novas classes de funções, somatório de séries, etc.). No entanto, a sua utilização na resolução de problemas aplicados é muito restrita, dado que conduz à formulação de condições iniciais dadas por derivadas fraccionárias da função $f(t)$ no limite inferior $t = a$, na forma:

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-k} f(t) = b_k \quad (2.27)$$

onde $b_k, k = 1, 2, \dots, n$ representam constantes. Estas condições iniciais não possuem uma interpretação física conhecida.

Este facto pode ser verificado aplicando a transformada de Laplace à derivada fraccionária de Riemann-Liouville (este resultado é apresentado aqui apenas para efeitos de comparação com a definição de Caputo a seguir estabelecida), resultando (com $a = 0$) (ver secção 2.5):

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \left\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \right\} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left. {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right|_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha < n \quad (2.28)$$

Observa-se que as condições iniciais são dadas na forma (2.27), o que pode, obviamente, causar problemas com a sua interpretação física.

2.3.3 Definição de Caputo

Uma outra abordagem da generalização da noção de diferenciação e integração é a sugerida por Caputo, a qual revela-se muito útil para a formulação e resolução de problemas aplicados. Por este facto, é designada de *derivada fraccionária de Caputo de ordem* $\alpha > 0$ e definida como:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= D_t^{-(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad n-1 < \alpha < n \end{aligned} \quad (2.29)$$

satisfazendo também a propriedade:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \alpha = n \quad (2.30)$$

No entanto, esta definição é mais restritiva que a de Riemann-Liouville, na medida que requer a integrabilidade absoluta da derivada de ordem n da função $f(t)$. De notar que em geral:

$${}_a D_t^\alpha f(t) \triangleq \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right) \neq {}_a D_t^{-(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \triangleq {}_a^C D_t^\alpha f(t) \quad (2.31)$$

excepto se a função $f(t)$ e as suas primeiras $n-1$ derivadas vão a zero para $t = a$.

A principal vantagem da definição de Caputo é a de conduzir à formulação de condições iniciais dadas por derivadas inteiras da função $f(t)$ no limite inferior $t = a$, tais como $f'(a)$, $f''(a)$, etc., ou seja, fisicamente interpretáveis.

Aplicando a transformada de Laplace à derivada fraccionária de Caputo obtém-se (com $a = 0$) (ver secção 2.5):

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \left\{ {}_0^C D_t^\alpha f(t) \right\} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n \quad (2.32)$$

Observa-se, neste caso, que as condições iniciais são dadas através dos valores iniciais de derivadas inteiras (no sentido clássico) com interpretações físicas bem conhecidas, o que as tornam adequadas para a resolução de problemas de valor inicial de equações diferenciais fraccionárias.

De acordo com a definição de Caputo (2.29) chega-se à importante propriedade que a derivada fraccionária de uma constante é zero, isto é:

$${}_0 D_t^\alpha C = 0, \quad \alpha > 0 \quad (2.33)$$

Esta definição estabelece mais um resultado conhecido através das derivadas inteiras, ou seja, a derivada fraccionária de uma constante vai a zero para qualquer valor de α (inteiro ou fraccionário).

2.4 Propriedades das Derivadas Fraccionárias

De seguida são estabelecidas algumas das propriedades mais relevantes da integração e diferenciação fraccionária, e que são mais frequentemente usadas em aplicações. Outras propriedades são referenciadas em (Podlubny, 1999b; Samko, *et al.*, 1993).

2.4.1 Linearidade

De forma similar à diferenciação de ordem inteira, a diferenciação fraccionária é uma operação linear:

$$D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t) \quad (2.34)$$

em que D^α denota qualquer uma das definições para a diferenciação fraccionária expostas na secção 2.3.

2.4.2 Regra de Leibniz

A aplicação da regra de Leibniz para obter a derivada de ordem inteira n do produto de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é dada por:

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t) \quad (2.35)$$

A diferenciação fraccionária do produto de duas funções pode ser obtida a partir da generalização da expressão (2.35) fazendo $n = \alpha$. Assim, a regra de Leibniz para a diferenciação fraccionária toma a forma (Podlubny, 1999b):

$${}_a D_t^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) {}_a D_t^{\alpha-k}(t) \quad (2.36)$$

A regra de Leibniz (2.36) é particularmente útil para a determinação de derivadas fraccionárias de uma função que é o produto de um polinómio por uma função em que a derivada fraccionária é conhecida.

2.5 Transformada de Laplace de Derivadas Fraccionárias

A transformada de Laplace, aqui designada através do símbolo L , é uma das ferramentas matemáticas mais usadas para a análise e controlo de sistemas lineares invariantes no tempo. A sua aptidão de transformar operações complexas como a integração e a diferenciação (entre outras) em operações algébricas na variável complexa s revela-se extremamente útil no projecto de sistemas de controlo. Do mesmo modo, a sua apetência para reduzir a complexidade associada à análise no domínio dos tempos das derivadas e integrais fraccionárias (ilustrada através das definições dadas na secção 2.3) é também fundamental para o estudo de sistemas fraccionários.

A análise subsequente tem em conta os seguintes resultados conhecidos da transformada de Laplace:

- A transformada de Laplace de uma função $f(t)$, $F(s)$, é definida por:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.37)$$

- Sendo a convolução de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ causais (*i.e.* iguais a zero para $t < 0$) definida por:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (2.38)$$

então, a respectiva transformada de Laplace é dada por:

$$L[f(t) * g(t)] = F(s)G(s) \quad (2.39)$$

- A transformada de Laplace da derivada de ordem inteira n de uma função $f(t)$ é:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (2.40)$$

2.5.1 Integral Fraccionário

O integral fraccionário de Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov de ordem $\alpha > 0$ pode ser expresso como a convolução das funções $g(t) = t^{\alpha-1}$ e $f(t)$:

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \quad (2.41)$$

Sabendo-se que:

$$L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (2.42)$$

e usando a propriedade da transformada de Laplace da convolução (2.39), obtém-se a *transformada de Laplace do integral fraccionário de Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov*:

$$L\{{}_0D_t^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (2.43)$$

2.5.2 Derivada Fraccionária

A derivada fraccionária de Riemann-Liouville pode ser dada na forma ($\alpha > 0$):

$${}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^n \left({}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right) \quad (2.44)$$

Fazendo:

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n \quad (2.45)$$

e usando a expressão (2.40) para a transformada de Laplace de uma derivada inteira de ordem n em (2.44), obtém-se:

$$L\left\{{}_0D_t^\alpha f(t)\right\} = L\left\{g^{(n)}(t)\right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (2.46)$$

A transformada de Laplace da função $g(t)$ é obtida por intermédio da equação (2.43):

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s) \quad (2.47)$$

A partir da definição de derivada segue que:

$$g^{(n-k-1)} = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \quad (2.48)$$

Substituindo as equações (2.47) e (2.48) na equação (2.46) obtém-se a expressão final para a *transformada de Laplace da derivada fraccionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$* :

$$\begin{aligned} L\left\{{}_0^R D_t^\alpha\right\} &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k s^k, \quad n-1 \leq \alpha < n \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde:

$$b_k = \left[{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.50)$$

representam as condições iniciais, as quais não possuem uma interpretação física óbvia, pois são dadas na forma de derivadas fraccionárias para o limite inferior $t = 0$. Deste modo, a sua

utilização prática encontra-se limitada devido à ausência de tal interpretação que, até ao presente momento, ainda não é conhecida.

A derivada fraccionária de Caputo (2.29) pode ser dada na forma ($\alpha > 0$):

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t), \quad n-1 < \alpha \leq n \quad (2.51)$$

Assim, usando os resultados (2.43) e (2.40) para as transformadas de Laplace do integral fraccionário de Riemann-Liouville e da derivada de ordem inteira, obtém-se respectivamente:

$$L\left\{{}_0^C D_t^\alpha g(t)\right\} = s^{-(n-\alpha)} G(s) \quad (2.52)$$

$$G(s) = L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (2.53)$$

Inserindo a equação (2.53) na equação (2.52) chega-se à expressão da *transformada de Laplace da derivada fraccionária de Caputo*:

$$L\left\{{}_0^C D_t^\alpha\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n \quad (2.54)$$

Como se vê, a expressão (2.54) incorpora as condições iniciais $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ definidas na forma tradicional. De facto, a equação (2.54) é uma generalização da correspondente transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ fazendo $\alpha = n$ (ver expressão 2.40). Dado que esta expressão envolve os valores da função $f(t)$ e suas derivadas no limite inferior $t=0$, para os quais existe uma interpretação física bem conhecida (por exemplo, $f(0)$ é a posição inicial, $f'(0)$ é a velocidade inicial e $f''(0)$ é a aceleração inicial), esta pode ser utilizada para a resolução de problemas de valor inicial em equações diferenciais fraccionárias com condições iniciais fisicamente interpretáveis.

A *transformada de Laplace da derivada fraccionária de Grünwald-Letnikov* é dada por (Podluny, 1999b):

$$L\left\{{}_0^G D_t^\alpha\right\} = s^\alpha F(s), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.55)$$

A análise atrás feita sobre a transformada de Laplace dos operadores fraccionários merece as seguintes observações:

- Se as condições iniciais forem nulas, então a transformada de Laplace das derivadas e integrais fraccionários é dada simplesmente pela expressão:

$$L\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.56)$$

- De notar que a expressão anterior (2.56) é uma generalização directa do resultado do caso de ordem inteira com a multiplicação da transformada do sinal pelo operador s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$). Isto significa que os métodos clássicos de análise e projecto de sistemas lineares baseados no plano complexo s são facilmente adaptáveis para o caso de sistemas lineares fraccionários;
- A transformação dos operadores de diferenciação e integração do cálculo fraccionário (domínio dos tempos) para o domínio s de Laplace reduz a complexidade de manipulação de funções complexas (como, por exemplo, a função Gama $\Gamma(x)$) para simples operações algébricas do operador s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$). Este facto simplifica de forma significativa a análise e projecto de sistemas de ordem fraccionária. De sublinhar, no entanto, que estas técnicas (clássicas) têm de ser adaptadas ao novo paradigma de possuir uma ordem α fraccionária.

2.6 Transformada de Fourier de Derivadas Fraccionárias

A transformada de Fourier, aqui denotada através do símbolo F , é uma das ferramentas mais poderosas para a análise da resposta em frequência de sistemas dinâmicos lineares.

Para a análise subsequente tem-se em conta os seguintes resultados conhecidos da transformada de Fourier:

- A transformada de Fourier de uma função $h(t)$, $H(\omega)$, integrável no intervalo $(-\infty, \infty)$, é definida por:

$$H(\omega) = F\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.57)$$

- Se a convolução de duas funções $h(t)$ e $g(t)$, definidas no intervalo $(-\infty, \infty)$, é definida por:

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (2.58)$$

então, a respectiva transformada de Fourier é dada por:

$$F[h(t) * g(t)] = H(\omega)G(\omega) \quad (2.59)$$

- A transformada de Fourier da derivada a uma ordem inteira n de uma função $h(t)$, supondo que tanto $h(t)$ como as suas derivadas $h'(t), h''(t), \dots, h^{(n-1)}(t)$ se anulem quando $t \rightarrow \pm\infty$, é dada pela expressão:

$$F\{h^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n F(\omega) \quad (2.60)$$

2.6.1 Integral Fraccionário

Procedendo da mesma forma que no caso da transformada de Laplace, o integral fraccionário de Riemann-Liouville (com o limite inferior $a = -\infty$) é expresso como sendo a convolução⁵:

$${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * g(t) \quad (2.61)$$

Sabendo que:

$$F\left\{\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} = (j\omega)^{-\alpha} \quad (2.62)$$

e usando a propriedade da convolução (2.59), obtém-se a *transformada de Fourier do integral fraccionário de Riemann-Liouville*:

$$F\left\{{}_{-\infty}^R D_t^{-\alpha} g(t)\right\} = (j\omega)^{-\alpha} G(\omega) \quad (2.63)$$

em que $G(\omega) = F\{g(t)\}$. A expressão (2.63) fornece também as *transformadas de Fourier dos integrais fraccionários de Grünwald-Letnikov* ${}_{-\infty}^G D_t^\alpha g(t)$ e de *Caputo* ${}_{-\infty}^C D_t^\alpha g(t)$, dado que neste caso coincidem com o integral fraccionário de Riemann-Liouville ${}_{-\infty}^R D_t^\alpha g(t)$.

⁵ O sufixo + significa que a função é igual a zero para $t \leq 0$

2.6.2 Derivada Fraccionária

As definições de Riemann-Liouville (R), Grünwald-Letnikov (G) e de Caputo (C) podem ser escritas na mesma forma (considerando o limite inferior $a = -\infty$), ou seja:

$$\left. \begin{array}{l} {}_{-\infty}^R D_t^\alpha g(t) \\ {}_{-\infty}^G D_t^\alpha g(t) \\ {}_{-\infty}^C D_t^\alpha g(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{g^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} = {}_{-\infty} D_t^{\alpha-n} g^{(n)}(t), \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.64)$$

Usando a transformada de Fourier do integral fraccionário de Riemann-Liouville (2.63) e a transformada de Fourier da derivada de ordem inteira (2.60) obtém-se a seguinte expressão para a *transformada de Fourier da derivada fraccionária* (2.64):

$$\begin{aligned} F\{D^\alpha g(t)\} &= F\{D^{\alpha-n} g^{(n)}(t)\} = (j\omega)^{\alpha-n} F\{g^{(n)}(t)\} \\ &= (j\omega)^\alpha G(\omega) \end{aligned} \quad (2.65)$$

em que o símbolo D^α denota qualquer uma das mencionadas derivadas fraccionárias (Riemann-Liouville ${}_{-\infty}^R D_t^\alpha g(t)$, Grünwald-Letnikov ${}_{-\infty}^G D_t^\alpha g(t)$ ou Caputo ${}_{-\infty}^C D_t^\alpha g(t)$).

A análise efectuada sobre a transformada de Fourier dos operadores fraccionários merece as seguintes observações:

- Os resultados atrás ilustrados são obtidos com o limite inferior dos operadores fraccionários igual a $a = -\infty$. No entanto, pode-se facilmente provar que os resultados seriam os mesmos considerando o limite inferior $a = 0$ e supondo que a função $g(t)$ é causal (*i.e.* $g(t) = 0$ para $t < 0$).
- A resposta em frequência de um sistema fraccionário pode ser obtida substituindo o operador s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) por $(j\omega)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) na sua função de transferência. Deste modo, os métodos clássicos de análise e de projecto de sistemas dinâmicos no domínio das frequências continuam válidos para a análise e projecto de sistemas de controlo fraccionários. De sublinhar, no entanto, que estas técnicas (clássicas) têm de ser adaptadas ao novo paradigma de possuir uma ordem α fraccionária.

2.7 Solução Analítica de Equações Diferenciais Fraccionárias

O método aqui apresentado para obter a solução analítica de equações diferenciais fraccionárias (com coeficientes constantes) é baseado na transformada de Laplace, estando descrito nos trabalhos de (Podlubny, 1999a, 1999b).

Para isso, é introduzida a chamada função Mittag-Leffler a dois parâmetros $E_{\alpha,\beta}(z)$:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.66)$$

A função de Mittag-Leffler desempenha um papel muito importante nas equações diferenciais fraccionárias (e, logo, no desenvolvimento da teoria do cálculo fraccionário), possuindo um papel análogo ao da função exponencial nas equações diferenciais de ordem inteira. De facto, a função de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ é uma generalização da função exponencial e^z e, portanto, a função exponencial é um caso particular da função de Mittag-Leffler (ver Anexo A—Funções Especiais do Cálculo Fraccionário).

A derivada de $E_{\alpha,\beta}(z)$ de ordem k é dada por:

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.67)$$

É conveniente introduzir a função:

$$\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y t^\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.68)$$

A transformada de Laplace de $\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta)$ (2.68) é:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \varepsilon_k(t, \pm y; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp y)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > |y|^{1/\alpha} \quad (2.69)$$

Uma outra propriedade útil de $\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta)$ é a sua simples diferenciação fraccionária:

$${}_0 D_t^\lambda \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta - \lambda), \quad \lambda < \beta \quad (2.70)$$

2.7.1 Aplicação na Solução Analítica de Equações Diferenciais Fraccionárias

Considere-se a equação diferencial fraccionária de dois termos, com condições iniciais nulas, dada por:

$$aD^\alpha y(t) + by(t) = f(t) \quad (2.71)$$

Aplicando a transformada de Laplace obtém-se:

$$Y(s) = F(s)G_2(s) \quad (2.72)$$

em que:

$$G_2(s) = \frac{1}{as^\alpha + b} = \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + b/a} \quad (2.73)$$

Assim, usando (2.67)–(2.69), a transformada inversa de Laplace fornece a solução $g_2(t)$ da função (2.73) como:

$$g_2(t) = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (2.74)$$

a qual representa a resposta impulsional do sistema de ordem fraccionário dado pela função de transferência (2.73). Portanto, a expressão (2.74) é a solução da equação diferencial fraccionária (2.71) a uma entrada em impulso unitário, isto é, $y_{impulso}(t) = g_2(t)$.

Para determinar a resposta do sistema a uma entrada em degrau unitário, $y_{degrau}(t)$, a expressão (2.74) é integrada (*i.e.* $y_{degrau}(t) = {}_0D_t^{-1} g_2(t)$) que, com a ajuda da propriedade (2.70), fornece:

$$y_{degrau}(t) = \frac{1}{a} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (2.75)$$

De uma forma geral, a solução da expressão (2.72) (e, portanto, da equação diferencial (2.71)), é dada através da convolução das duas funções $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ e $g_2(t)$:

$$y(t) = f(t) * g_2(t) \quad (2.76)$$

A análise anterior pode ser generalizada para uma equação diferencial com n termos, do tipo:

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = f(t) \quad (2.77)$$

onde $\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0 > 0$. A solução da equação (2.77) é obtida em (Podlubny, 2000) para as entradas ao impulso e ao degrau unitário, $y_{\text{impulso}}(t) = g_n(t)$ e $y_{\text{degrau}}(t)$, respectivamente, a partir de $g_n(t)$ (a designada *função de Green fraccionária* da equação (2.77) de n termos).

2.8 Cálculo Numérico de Derivadas Fraccionárias

Nesta secção é apresentado um método simples mas eficiente para o cálculo de derivadas fraccionárias. Este método, desenvolvido por Podlubny (1999b), é baseado na utilização das diferenças finitas fraccionárias e no princípio da “memória curta”, o qual reduz o tempo de cálculo do algoritmo numérico. No entanto, existem outras formas propostas para realizar o seu cálculo numérico como, por exemplo, através de fórmulas de quadratura (Oldham e Spanier, 1974; Blank, 1996; Dielthem, 1997; Dielthem e Weilbeer, 2004), splines (Hwang, *et al.*, 2002), entre outras.

Esta abordagem é baseada no facto que, para grande parte das classes de funções relacionadas com problemas aplicados, as definições de Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov são equivalentes (ver secção 2.3). Este facto permite o uso da definição de Riemann-Liouville durante a formulação do problema e, de seguida, utilizar a definição de Grünwald-Letnikov para obter a sua solução numérica, ou seja:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_a \Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha}, \quad {}_a \Delta_h^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.78)$$

em que $[x]$ denota aparte inteira de x .

Assim, omitindo o limite na definição (2.78), obtém-se a aproximação de primeira ordem da derivada fraccionária de ordem α :

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx {}_a \Delta_h^\alpha f(t) \quad (2.79)$$

É possível usar também aproximações de ordem superior, conforme se demonstra em (Lubich, 1986). Desta forma, chega-se a algoritmos numéricos explícitos que permitem

calcular passo-a-passo os valores da solução final. A principal dificuldade deste algoritmo é o número crescente de termos que se verificam nas somas das fórmulas recorrentes usadas para o cálculo. Devido a isto, para grandes intervalos da variável independente t , o seu cálculo torna-se praticamente impossível. Para contornar esta dificuldade, utiliza-se o princípio da “memória curta” (Podlubny, 1997), que a seguir é descrito.

2.8.1 Princípio da “Memória-Curta”

Como se pode observar a partir da expressão (2.79), para $t \gg a$, o número de termos da aproximação cresce de uma forma ilimitada, o que impossibilita a sua implementação prática. Para contornar este problema, Podlubny (1997) formulou o chamado princípio da “memória-curta”. Esta princípio baseia-se no facto que, para valores elevados de t , os coeficientes:

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.80)$$

da definição de Grünwald-Letnikov (2.78), próximos do limite inferior, isto é, no “ponto de início” $t = a$, têm pouca influência na solução e, conseqüentemente, podem ser desprezados sob certas condições (Podlubny, 1999b). A Figura 2.1 mostra o gráfico dos coeficientes $|\omega_k^{(\alpha)}|$ para alguns valores de α , onde se confirma a influência cada vez menor destes coeficientes à medida que k aumenta. De facto, usando a fórmula assintótica para os coeficientes binomiais vem, para todos os valores de α não inteiros positivos (Gorenflo e Mainardi, 1998):

$$\left| \omega_k^{(\alpha)} \right| \sim \Gamma(\alpha + 1) \frac{|\sin(\alpha\pi)|}{\pi} k^{-(\alpha+1)}, \quad k \rightarrow \infty \quad (2.81)$$

A expressão (2.81) mostra um comportamento dos coeficientes do tipo potência $k^{-(\alpha+1)}$ à medida que $k \rightarrow \infty$, ilustrando, deste modo, uma propriedade de “memória” e realçando a importância que as derivadas fracionárias dão aos eventos passados, em contraste com o caso das derivadas inteiras (Machado, 2003).

Estas observações levaram ao estabelecimento do princípio da “memória-curta”, o que significa tomar em consideração somente o comportamento de $f(t)$ no “passado recente”, isto é, no intervalo $[t - L, t]$, em que L é o “comprimento de memória”, ou seja:

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx {}_{t-L} D_t^\alpha f(t), \quad t > (a + L) \quad (2.82)$$

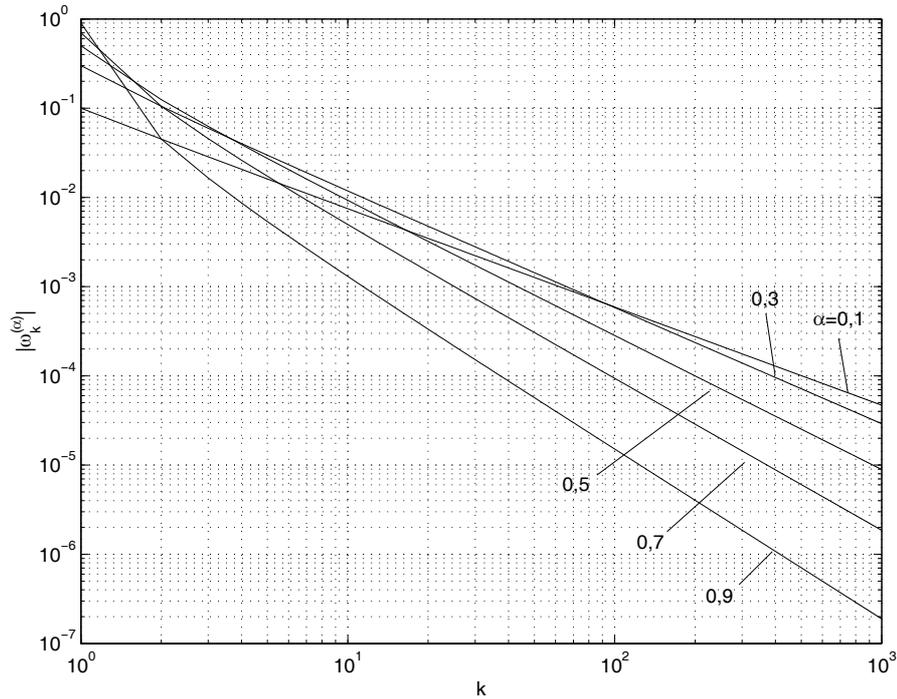


Figura 2. 1 – Evolução dos coeficientes $|\omega_k^{(\alpha)}|$ para vários valores de $\alpha = 0,1; 0,3; \dots; 0,9$.

Por outras palavras, a derivada fraccionária com o limite inferior a é aproximada pela derivada fraccionária com o limite inferior deslocado de $t-L$. Deste modo, o número de termos da aproximação (2.79) nunca é superior ao valor $[L/h]$, maximizando, assim, o tempo de cálculo para um valor máximo de L segundos.

Obviamente que esta simplificação acarreta alguma imprecisão nos resultados. Assim, se $f(t) \leq M$ para $a \leq t \leq b$, o que normalmente se verifica em aplicações, o erro introduzido pela utilização do princípio da “memória-curta” é dado por (Podlubny, 1999b):

$$\Delta(t) = \left| {}_a D_t^\alpha f(t) - {}_{t-L} D_t^\alpha f(t) \right| \leq \frac{ML^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|}, \quad (a+L) \leq t \leq b \quad (2.83)$$

A expressão (2.83) pode ser utilizada para determinar o “comprimento de memória” L necessário para obter uma determinada precisão ε , do seguinte modo:

$$\Delta(t) \leq \varepsilon, \quad a+L \leq t \leq b \Rightarrow L \geq \left(\frac{M}{\varepsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{1/\alpha} \quad (2.84)$$

2.8.2 Cálculo dos Coeficientes

Para a implementação do método das diferenças finitas fracionárias é necessário o cálculo dos coeficientes $\omega_k^{(\alpha)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, onde α é a ordem da diferenciação fracionária. Uma das formas possíveis é usar a fórmula recorrente (Podlubny, 1999b):

$$\omega_0^{(\alpha)} = 1; \quad \omega_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) \omega_{k-1}^{(\alpha)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.85)$$

a qual é adequada para um valor fixo de α . Para o caso de termos de considerar vários valores de α (e.g., na identificação de sistemas onde α é um parâmetro a determinar), as relações recursivas (2.85) não são as mais desejáveis, isto é, para cada valor particular de α os coeficientes $\omega_k^{(\alpha)}$ têm de ser calculados separadamente. Neste caso, é mais conveniente usar o método da FFT⁶ (transformada rápida de Fourier). Para isso, considera-se que os coeficientes $\omega_k^{(\alpha)}$ são os mesmos que os obtidos através do desenvolvimento em série de potências da função $(1-z)^\alpha$, isto é:

$$(1-z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^{(\alpha)} z^k \quad (2.86)$$

Substituindo $z = e^{-jw}$ em (2.86), tem-se:

$$(1 - e^{-jw})^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^{(\alpha)} e^{-jkw} \quad (2.87)$$

Os coeficientes $\omega_k^{(\alpha)}$ podem ser assim expressos em termos da transformada de Fourier inversa, como:

$$\omega_k^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-jw})^\alpha e^{jkw} dw \quad (2.88)$$

os quais podem ser calculados utilizando qualquer uma das implementações da FFT. Mais ainda, sendo que neste caso obtém-se um número finito de coeficientes $\omega_k^{(\alpha)}$, o método da FFT deve ser sempre combinado com o princípio da “memória-curta”.

⁶ Fast Fourier Transform

2.8.3 Aplicação na Solução Numérica de Equações Diferenciais Fraccionárias

Considere-se, como exemplo, a aplicação do método anterior na solução de uma das equações diferenciais fraccionárias mais simples, e que surge em alguns problemas aplicados (e.g. (Oustaloup,1999)):

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha y(t) + Ay(t) &= f(t), \quad t > 0 \\ y^{(k)}(0) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde $n-1 < \alpha < n$. Para $0 < \alpha \leq 2$ esta equação é designada como *equação de relaxação-oscilação*.

A aproximação numérica de primeira ordem para o problema de valor inicial (2.89) é:

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^m \omega_j^{(\alpha)} y_{m-j} + Ay_m = f_m, \quad m = 1, 2, \dots; y_0 = 0 \quad (2.90)$$

em que:

$$\begin{aligned} t_m &= mh, \quad y_m = y(t_m), \quad f_m = f(t_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ \omega_j^{(\alpha)} &= (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.91)$$

Adoptando a aproximação (2.90), obtém-se o seguinte algoritmo para a solução numérica da equação (2.89):

$$\begin{aligned} y_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ y_m &= -Ah^\alpha y_{m-1} - h^{-\alpha} \sum_{j=1}^m \omega_j^{(\alpha)} y_{m-j} + h^\alpha f_m, \quad m = n, n+1, \dots \end{aligned} \quad (2.92)$$

Os resultados da aplicação do algoritmo numérico (2.92) para diferentes valores de α ($1 \leq \alpha \leq 2$) e com $f(t) = H(t)$, em que $H(t)$ é a função degrau unitário de Heaviside, são ilustrados em (Podlubny, 1999b), os quais estão em perfeita concordância com as soluções analíticas obtidas por Podlubny (1999b) e Gorenflo e Mainardi (1997). De facto, a solução analítica já foi obtida na secção 2.7, sendo dada por:

$$y(t) = t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-At^\alpha) \quad (2.93)$$

O método apresentado foi testado com sucesso na solução numérica de equações diferenciais fraccionárias com coeficientes constantes, coeficientes não constantes, e em equações diferenciais fraccionárias não lineares (Podlubny, 1999b). Este facto atesta a sua grande aplicabilidade.

2.9 Cálculo Matricial de Derivadas Fraccionárias

Nesta secção é sugerida uma representação matricial dos equivalentes discretos dos operadores de integração e diferenciação fraccionários. A aproximação, proposta por Podlubny (2000), unifica as noções de diferenciação numérica de ordem inteira e a integração múltipla através de uma representação matricial. Aplicada à solução numérica de equações diferenciais, unifica também a solução de equações diferenciais de ordem inteira e de ordem fraccionária, e as equações integrais fraccionárias. A aproximação aqui sugerida resulta numa simplificação significativa na solução numérica de equações diferenciais e integrais fraccionárias.

A aproximação da derivada fraccionária ${}_a D_t^\alpha f(t)$ de uma função $f(t)$ definida no intervalo $[a, b]$, e satisfazendo a condição $f(t) = 0$ para $t < a$ (*i.e.*, função causal), pode ser dada através da representação de Grünwald-Letnikov para operadores diferenciais fraccionários, conforme já referido nas secções anteriores. Assim, considerando no intervalo $[a, b]$ pontos equidistantes com passo h : $t_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots, N$), em que $t_0 = a$ e $t_N = b$, a sua definição vem:

$${}_a D_{t_k}^\alpha f(t) \approx \frac{\nabla^\alpha f(t_k)}{h^\alpha} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f_{k-j}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (2.94)$$

Em notação matricial, as $N+1$ expressões anteriores (2.94) podem ser escritas simultaneamente na forma:

$$\begin{bmatrix} h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_0) \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_1) \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_2) \\ \vdots \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_{N-1}) \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_N) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^\alpha} \begin{bmatrix} \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \cdots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 \\ \omega_N^{(\alpha)} & \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \cdots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (2.96)$$

Na expressão (2.95) o vector coluna dos valores da função f_k ($k = 0, 1, \dots, N$) é multiplicada pela matriz:

$$B_N^\alpha = \frac{1}{h^\alpha} \begin{bmatrix} \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \cdots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 \\ \omega_N^{(\alpha)} & \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \cdots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

e o resultado é o vector coluna dos valores aproximados da derivada fraccionária ${}_a D_{t_k}^\alpha f(t)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Deste modo, a matriz B_N^α representa o equivalente discreto da derivada fraccionária de ordem α .

De notar que a matriz triangular inferior B_N^α (2.97) é completamente descrita pela sua primeira coluna, cujos elementos são os coeficientes $\omega_j^{(\alpha)}$ ($j = 0, 1, \dots, N$), determinados através da equação (2.96). A matriz B_N^α pode ser então definida através de uma função geradora cujos os primeiros $N+1$ coeficientes da expansão em série de Taylor coincidem com os coeficientes $\omega_0^{(\alpha)}, \omega_1^{(\alpha)}, \dots, \omega_N^{(\alpha)}$. A função geradora para a matriz B_N^α é:

$$\beta_\alpha(z) = h^{-\alpha} (1-z)^\alpha \quad (2.98)$$

a qual, como já foi referido atrás, fornece uma aproximação de primeira ordem da derivada fraccionária de ordem α . Contudo, é possível considerar aproximações de ordem superior (Lubich, 1986; Podlubny, 1999b), embora estas acarretem algoritmos mais complexos e com custos adicionais no tempo de processamento.

Os equivalentes discretos de integrais fraccionários podem ser obtidos por inversão dos correspondentes equivalentes discretos das derivadas fraccionárias. Assim, para obter a matriz I_N^α , correspondente ao equivalente discreto da integração fraccionária ($\alpha > 0$), a matriz B_N^α é simplesmente invertida, ou seja, gerada por:

$$I_N^\alpha = \left(B_N^\alpha \right)^{-1} \quad (2.99)$$

Portanto, a matriz I_N^α possui a seguinte forma:

$$I_N^\alpha = h^\alpha \begin{bmatrix} \omega_0^{(-\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2^{(-\alpha)} & \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1}^{(-\alpha)} & \cdots & \omega_2^{(-\alpha)} & \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} & 0 \\ \omega_N^{(-\alpha)} & \omega_{N-1}^{(-\alpha)} & \cdots & \omega_2^{(-\alpha)} & \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

2.9.1 Aplicação na Solução Numérica de Equações Diferenciais Fraccionárias

A aproximação matricial apresentada simplifica significativamente a solução numérica de equações diferenciais fraccionárias, pois a solução final é dada na forma de um sistema de equações algébricas, o qual é obtido substituindo todas as derivadas (fraccionárias ou inteiras) pelas correspondentes matrizes B_N^α dos seus equivalentes discretos.

Como exemplo, considere-se uma equação diferencial fraccionária de coeficientes constantes com m termos, representada da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^m p_k D^{\alpha_k} y(t) = f(t), \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m, \quad n-1 < \alpha_m < n \quad (2.101)$$

onde D^{α_k} denota a derivada fraccionária de Riemann-Liouville ou de Caputo de ordem α_k .

As discretizações de $y(t)$ e $f(t)$ são dadas como:

$$Y_N = \left(y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N) \right)^T, \quad F_N = \left(f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_N) \right)^T \quad (2.102)$$

Usando as notações em (2.102), e considerando que o equivalente discreto de D^{α_k} é B_N^α , chega-se ao equivalente discreto da equação diferencial fraccionária (2.101):

$$\sum_{k=1}^m p_k B_N^{\alpha_k} Y_N = F_N \quad (2.103)$$

Considerando que as condições iniciais são nulas, as formulações de Riemann-Liouville e de Caputo são equivalentes, vindo:

$$y^{(k)}(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.104)$$

do qual resultam os valores iniciais da função $y(t)$, dados por:

$$y(t_0) = y(t_1) = \dots = y(t_{n-1}) = 0 \quad (2.105)$$

Assim, a partir do sistema (2.103) obtém-se um sistema de equações lineares para a determinação de y_0, y_1, \dots, y_N da seguinte forma (Podlubny, 2000):

$$\sum_{k=1}^m p_k B_{N-n}^{\alpha_k} \{S_{0,1,\dots,n-1} Y_N\} = S_{0,1,\dots,n-1} F_N \quad (2.106)$$

em que, de uma forma geral, a matriz S_{r_1, r_2, \dots, r_k} (designada de eliminador) é obtida a partir da matriz unidade $E \in N \times N$ eliminando as linhas com os índices r_1, r_2, \dots, r_k . A solução do sistema de equações algébrico (2.106), em conjunto com os valores iniciais da função (2.105), formam a solução numérica da equação diferencial fraccionária (2.101) com condições iniciais nulas (2.104).

Para ilustração do método, considere-se a seguinte equação diferencial fraccionária de dois termos com condições iniciais nulas:

$$D^\alpha y(t) + y(t) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (2.107)$$

A solução numérica de (2.107) pode ser obtida a partir do sistema (2.106), em que $m = 2$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$, $n = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, $B_{N-n}^{\alpha_1} = B_{N-2}^\alpha$, $B_{N-n}^{\alpha_2} = E_{N-2}$, $F_N = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_N^T$. Para estes valores, o sistema de equações algébricas para a determinação de y_k , $k = 2, 3, \dots, N$ toma a forma:

$$\{B_{N-2}^\alpha + E_{N-2}\} \{S_{0,1} Y_N\} = S_{0,1} F_N \quad (2.108)$$

à qual deve ser adicionado os valores iniciais $y_0 = y_1 = 0$ determinados a partir das condições iniciais.

O método aqui descrito foi aplicado com sucesso na solução numérica de equações diferenciais fraccionárias para diferentes tipos de condições iniciais, tais como condições iniciais nulas, condições iniciais dadas em termos de derivadas inteiras ou na forma de derivadas fraccionárias de Riemann-Liouville. Foi também utilizado para a solução de equações diferenciais fraccionárias não lineares (Podlubny, 2000).

A aproximação matricial sugerida simplifica significativamente a solução numérica de equações integrais e diferenciais de ordem fraccionária. Mais ainda, permite:

- Uma uniformização para a discretização das derivadas a uma ordem real arbitrária, incluindo as derivadas de ordem inteira clássicas, e vários outros tipos de derivadas fraccionárias, incluindo as derivadas fraccionárias sequenciais (Miller e Ross, 1993);
- Uma uniformização para a solução numérica de equações diferenciais de ordem inteira e de ordem fraccionária;
- Uma forma adequada para a discretização de equações diferenciais a uma ordem real arbitrária;
- Um método para a solução numérica de problemas de valor inicial e problemas com condições de fronteira para equações diferenciais de ordem real arbitrária;
- Um possível método para a solução numérica de equações diferenciais não lineares de ordem real arbitrária.

A aproximação por matrizes pode ainda ser usada para o desenvolvimento de novas fórmulas de quadratura para os integrais fraccionários. Para isso, uma dada aproximação das derivadas fraccionárias é colocada numa representação matricial, a qual invertendo-se fornece a correspondente fórmula para os integrais fraccionários. Do mesmo modo, podem-se obter novas aproximações para as derivadas fraccionárias invertendo as matrizes correspondentes às fórmulas de quadratura para os integrais fraccionários.

2.10 Aplicações do Cálculo Fraccionário

Nas últimas décadas tem-se assistido a um número crescente de publicações relacionado com a aplicação das derivadas e integrais fraccionários nas mais diversas áreas da ciência e engenharia. De facto, as potencialidades reveladas por este novo método matemático torna-o, actualmente, uma das ferramentas mais poderosas e úteis na resolução de inúmeros problemas na matemática, ciência e engenharia.

As áreas de aplicação do cálculo fraccionário incluem a viscoelasticidade e amortecimento (Gemant, 1936; Stiassnie 1979; Rogers, 1983; Bagley e Torvik 1983; Torvik e Bagley, 1984, 1986, 1991; Koeller, 1984, 1986; Padovan, 1987; Koh e Kelly, 1990; Makris e Constantinou, 1991; Makris, *et al.*, 1993, 1995; Gaul e Chen, 1993; Constantinou e Symans, 1993; Gaul e Schanz, 1994; Fenander, 1996; Liebst e Torvik, 1996), caos e fractais (Clerc, *et al.*, 1984; Liu, 1985; Kaplan, *et al.*, 1987; Méhauté, 1991), biologia (Anastasio, 1994), electrónica (Oustaloup, 1981), electromagnetismo (Engheta, 1996, 1997, 2000), processamento de sinal (Hosking, 1981; Ozaktas, *et al.*, 1996; Ortigueira, 2000a, 2000b; Tseng, 2001), identificação de sistemas (Dubois, *et al.*, 1996), difusão e propagação de ondas (Nigmatullin, 1986; Méhauté, *et al.*, 1993; Mainardi, 1994,1996), percolação (Webman, 1984), modelação e identificação (Matignon e Anréa-Novel, 1996; Mathieu, *et al.*, 1996; Lorenzo e Hartley, 1998; Hartley e Lorenzo, 1998), química (Méhauté, 1990), irreversibilidade (Méhauté, 1984), robótica (Machado, *et al.*, 2002; Silva, *et al.*, 2003, 2004) e controlo (Axtell e Bise, 1990; Oustaloup, 1991, 1995b; Podlubny, 1999a, 1999b, Machado, 1997), só para citar alguns exemplos. Contudo, e apesar dos estudos já realizados, muitos dos aspectos merecem ainda uma investigação mais detalhada e outros simplesmente continuam ainda por investigar, em quase todos as áreas do conhecimento humano.

No que diz respeito à área do controlo automático de sistemas, só nas últimas décadas é que o cálculo fraccionário encontrou as suas primeiras aplicações (Bode, 1945; Tustin, *et al.*, 1958; Manabe, 1961, 1963; Carlson e Halijak, 1961, 1963; Oustaloup, 1981). Actualmente, existem inúmeros estudos realizados neste domínio, sendo uma das áreas com mais potencialidades de aplicação dos conceitos associados à teoria do cálculo fraccionário. Apesar disso, é necessário uma análise mais aprofundada da teoria e desenvolvimento de métodos que levem a uma efectiva utilização do cálculo fraccionário nesta área.

Esta secção ilustra apenas algumas aplicações do cálculo fraccionário na área do controlo automático de sistemas. Dadas as inúmeras aplicações neste domínio, são referidas somente aquelas consideradas como sendo as mais relevantes em termos de aplicação prática. Nesta categoria salienta-se o controlo CRONE e o controlador PID fraccionário. É dada também especial atenção ao designado sistema de referência ideal de Bode, o qual é utilizado no Capítulo 6 para a sintonia de controladores PID robustos.

2.10.1 Função de Transferência Ideal de Bode como Sistema de Referência

No seu estudo sobre projecto de amplificadores de realimentação Bode (1945) sugeriu uma forma ideal da função de transferência em malha aberta da forma:

$$G(s) = \frac{K}{s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.109)$$

a qual representa um integrador fraccionário de ganho K e de ordem α , passando desde então a ser denominada como *função de transferência ideal de Bode*.

O *sistema de referência* é obtido inserindo a função de transferência $G(s)$ numa malha de realimentação unitária, conforme mostra o sistema de controlo da Figura 2.2. A função de transferência em malha fechada do sistema de referência é então determinada e dada por:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^\alpha + K}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.110)$$

O sistema com a função de transferência ideal de Bode (Figura 2.2) apresenta as seguintes características (Vinagre, 2001; Barbosa, *et al.*, 2003b):

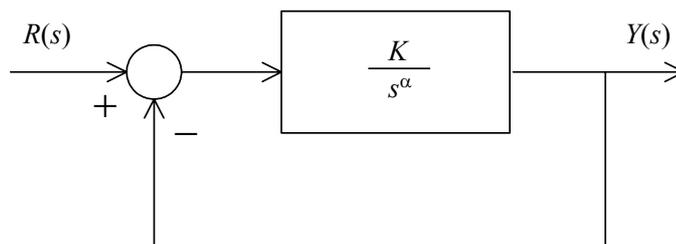


Figura 2.2 – Sistema de referência com função de transferência ideal de Bode.

a) Em malha aberta (função de transferência (2.109)):

- A curva da amplitude (em dB) apresenta um declive de $-\alpha 20$ dB/dec;
- A frequência ao ganho unitário depende do valor de K ;
- A curva da fase é uma recta horizontal de ordenada $-\alpha \pi/2$ rad;
- O diagrama de Nyquist é uma recta que parte da origem com argumento de $-\alpha \pi/2$ rad.

b) Em malha fechada (função de transferência (2.110)):

- A margem de ganho é infinita;
- A margem de fase é constante e igual a $MF = \pi(1-\alpha/2)$, ou seja, depende somente de α ;
- A resposta a uma entrada em degrau unitário é da forma (Westerlund e Ekstam, 1994):

$$y(t) = 1 - E_{\alpha}(-Kt^{\alpha}) \quad (2.111)$$

em que $E_{\alpha}(x)$ é a função de Mittag-Leffler a um parâmetro (ver Anexo A- Funções Especiais do Cálculo Fraccionário).

As Figuras 2.3 e 2.4 ilustram as respostas ao degrau unitário e a resposta em frequência da função $T(s)$ para $K = 1$ e diversos valores da ordem α . As curvas obtidas mostram que se podem obter dinâmicas que vão desde a relaxação ($0 < \alpha < 1$) até à oscilação ($1 < \alpha < 2$), sendo que os sistemas de primeira e de segunda ordem são apenas casos particulares da função $T(s)$.

A caracterização destes dois tipos de respostas (tempos e frequências) é tratada com mais detalhe no Capítulo 6, onde são estabelecidas as principais características, nos tempos e nas frequências, do sistema de referência com a função de transferência ideal de Bode ilustrado na Figura 2.2.

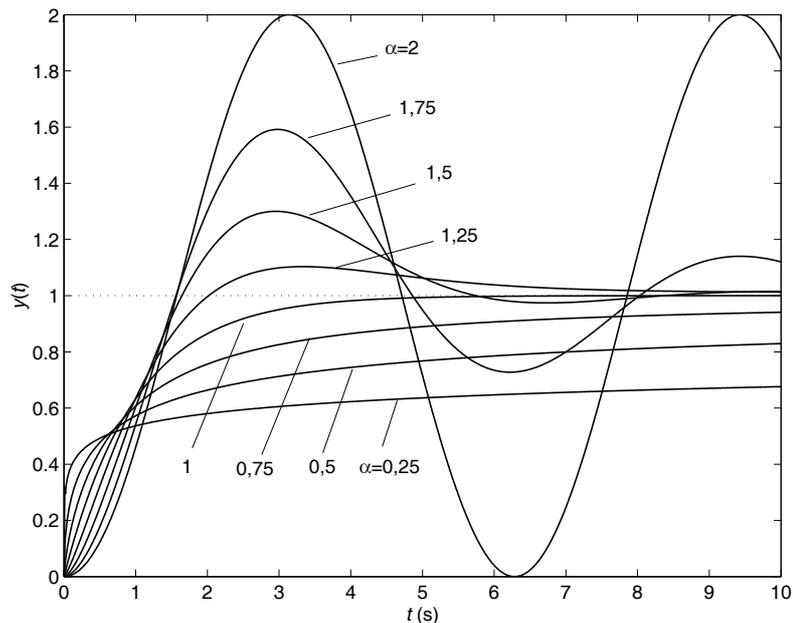


Figura 2.3 – Resposta ao degrau unitário de $T(s)$ para $K = 1$ e $\alpha = 0.25; 0.5; \dots; 2$.

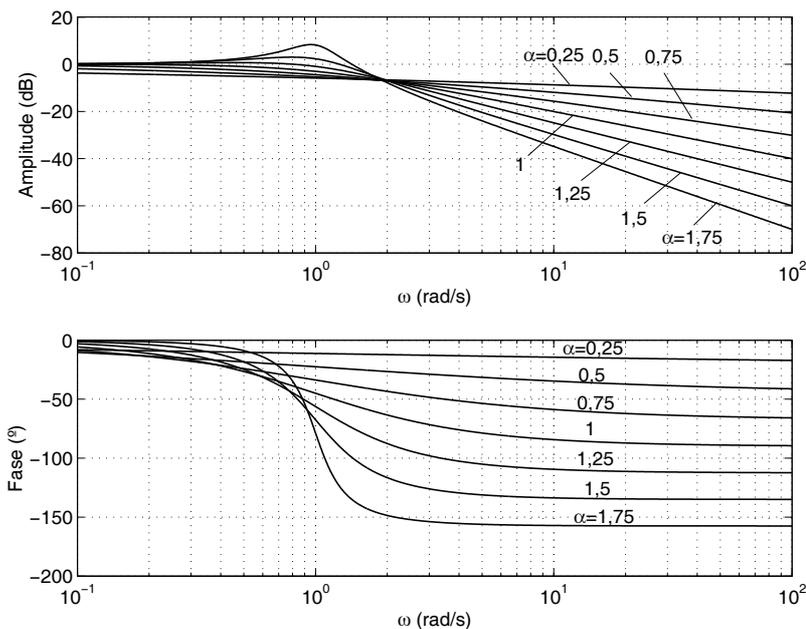


Figura 2.4 – Resposta em frequência de $T(s)$ para $K = 1$ e $\alpha = 0.25; 0.5; \dots; 1.75$.

O sistema de referência da Figura 2.2 pode ser utilizado para o projecto de sistemas mais robustos a variações do ganho e da carga. Uma das aplicações mais importantes é o caso do controlo CRONE, que a seguir é descrito de uma forma mais detalhada. Este sistema também é usado no Capítulo 6 para o desenvolvimento de uma estratégia de controlo para a sintonia de controladores PID robustos. Verifica-se que os sistemas compensados obtidos por este método tornam-se robustos a variações do ganho exibindo respostas ao degrau com um amortecimento constante.

2.10.2 Controlo CRONE

Uma das aplicações mais “visíveis” do cálculo fraccionário na engenharia do controlo é, sem dúvida, o chamado controlo CRONE (abreviatura do francês *Commande Robuste d’Ordre Non Entier*, o que significa controlo robusto de ordem não inteira) desenvolvido por Oustaloup (1991, 1995b) e sua equipa na Universidade de Bordéus-I, França. A “robustez” do seu nome vem do facto de fornecer um amortecimento que é insensível a variações dos parâmetros do sistema controlado, sobre uma faixa alargada de frequências. Foram desenvolvidas três estratégias do CRONE de forma a garantir uma excelente robustez sendo, actualmente, utilizadas em várias aplicações tecnológicas. Cada estratégia é a base de uma geração do controlo CRONE que alarga o domínio de aplicação da sua antecessora.

O controlo CRONE é a transposição para o controlo automático da “robustez fractal” apresentada pela relaxação da água num dique poroso. Este fenómeno natural é considerado robusto na medida que, paradoxalmente à aproximação inteira da mecânica clássica, fornece um amortecimento que é independente da massa da água em movimento. Oustaloup (1991) mostrou que o fenómeno da relaxação é modelizado por uma equação diferencial de ordem não inteira (ou fraccionária) da forma:

$$\tau^\alpha \left(\frac{d}{dt} \right)^\alpha P(t) + P(t) = 0 \quad (2.112)$$

com $1 < \alpha < 2$. A variável $P(t)$ representa a pressão dinâmica na interface água-dique e $\tau = f(M)$ é a constante de tempo, que é função da massa M da água em movimento.

A equação característica correspondente à equação diferencial (2.112) é:

$$(\tau s)^\alpha + 1 = 0 \quad (2.113)$$

a qual possui dois pólos complexos conjugados dados por:

$$s = \frac{1}{\tau} e^{\pm j\pi/\alpha} \quad (2.114)$$

para $1 < \alpha < 2$. A Figura 2.5 apresenta o lugar de raízes da equação característica (2.113), onde $\omega_n = 1/\tau$. O gráfico mostra que os pólos formam um ângulo ao centro de 2θ com $\theta = (\pi - \pi/\alpha)$ constante, independente de τ . Claramente, os pólos deslocam-se ao longo de duas semi-rectas que formam o mesmo ângulo θ com o eixo real (fixado pela ordem α)

quando τ varia. A robustez no plano- s do CRONE é ilustrada pois por estas duas semi-rectas que fornecem um amortecimento constante.

A frequência natural ω_p e o coeficiente de amortecimento ζ do sistema podem ser deduzidos directamente a partir do pólos, através do seu módulo $1/\tau$ e do semi-ângulo θ que formam:

$$\omega_p = \frac{1}{\tau} \sin \theta = \frac{1}{\tau} \sin \left(\pi - \frac{\pi}{\alpha} \right) = \frac{1}{\tau} \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \quad (2.115)$$

$$\zeta = \cos \theta = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{\alpha} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \quad (2.116)$$

Verifica-se assim que o coeficiente de amortecimento ζ está exclusivamente dependente da ordem α , permitindo deste modo a introdução da noção *de modo oscilatório robusto*.

No domínio dos tempos a robustez é expressa por uma resposta que é igualmente independente dos parâmetros do processo. Neste caso, e de acordo com o exemplo da Figura 2.6, somente a frequência natural varia. A forma do transitório é constante, embora a sua escala nos tempos seja diferente. Isto é traduzido por respostas nos tempos com as mesmas sobre-elongações (D_1 e D_2), independentes dos parâmetros do processo, com frequências naturais diferentes que determinam a velocidade de resposta do sistema.

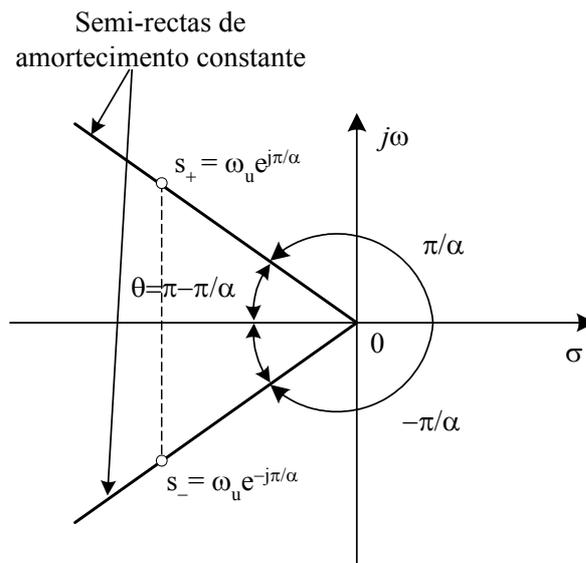


Figura 2. 5 – Ilustração da robustez do CRONE no plano- s .

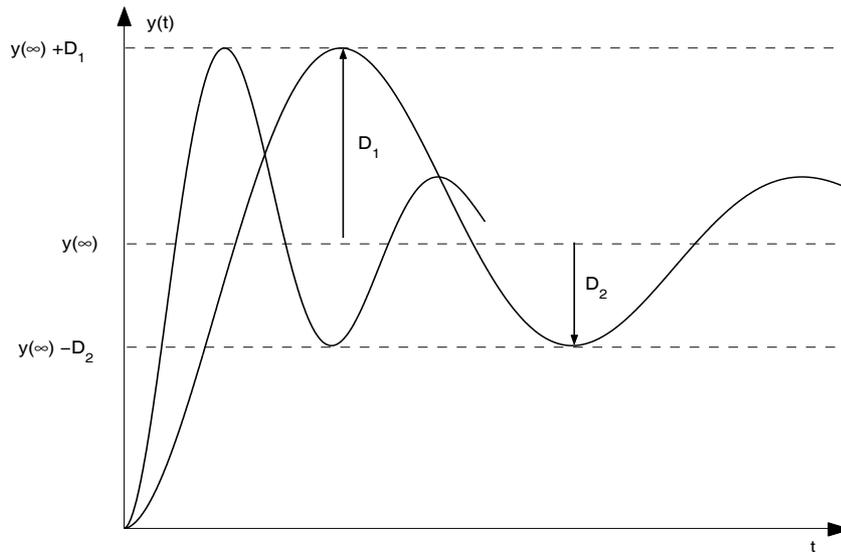


Figura 2. 6 – Ilustração da robustez do CRONE na resposta temporal.

Adoptando uma abordagem nas frequências, a “robustez fractal” é demonstrada considerando a transformada de Laplace da equação diferencial (2.112):

$$(\tau s)^\alpha P(s) + P(s) = 0 \quad (2.117)$$

Rearranjando (2.117) vem:

$$P(s) = -\left(\frac{1}{\tau s}\right)^\alpha P(s) \quad (2.118)$$

Esta equação pode ser representada através do sistema de realimentação unitário da Figura 2.7, que indica um sistema de controlo não-forçado ($E(s)=0$). Assim, a função de transferência em malha aberta é da forma:

$$\beta(s) = \left(\frac{1}{\tau s}\right)^\alpha = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^\alpha \quad (2.119)$$

Ou seja, é caracterizada por uma função de transferência de um integrador não inteiro, em que $\omega_u = 1/\tau$ é a frequência ao ganho unitário.

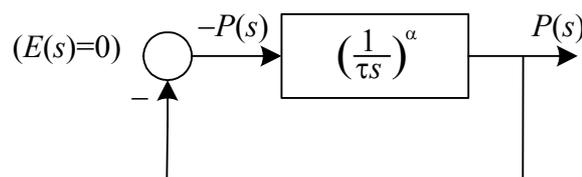


Figura 2. 7 – Sistema de realimentação unitário definindo uma função de transferência em malha aberta não inteira.

Dado que o $\arg \beta(j\omega) = -\alpha\pi/2$, com $1 < \alpha < 2$, o diagrama de Nichols da função $\beta(s)$ corresponde a uma recta vertical paralela ao eixo imaginário de abcissa entre $-\pi/2$ e $-\pi$, conforme ilustrado na Figura 2.8. Na prática, a diferenciação não inteira de ordem α é limitada a um intervalo de frequências intermédio. Assim, a recta vertical de abcissa $-\alpha\pi/2$, é reduzida a um segmento de recta vertical, compreendido entre $[\omega_A, \omega_B]$, em torno da frequência ao ganho unitário ω_u (Figura 2.8).

Quando o parâmetro τ do sistema varia, o segmento de recta vertical mostrado na Figura 2.8 desliza verticalmente, assegurando uma margem de fase ϕ_m constante e, conseqüentemente, um coeficiente de amortecimento constante no domínio dos tempos, traduzindo, desta forma, a robustez do amortecimento. Obviamente que esta robustez é melhorada à medida que o comprimento AB do segmento vertical é aumentado.

O objectivo no controlo automático de sistemas é o de obter um comportamento nas frequências similar ao da Figura 2.8, isto é:

- Um diagrama de Nichols em malha aberta que exiba um segmento de recta vertical em torno de ω_u para o estado nominal do processo (Figura 2.8);

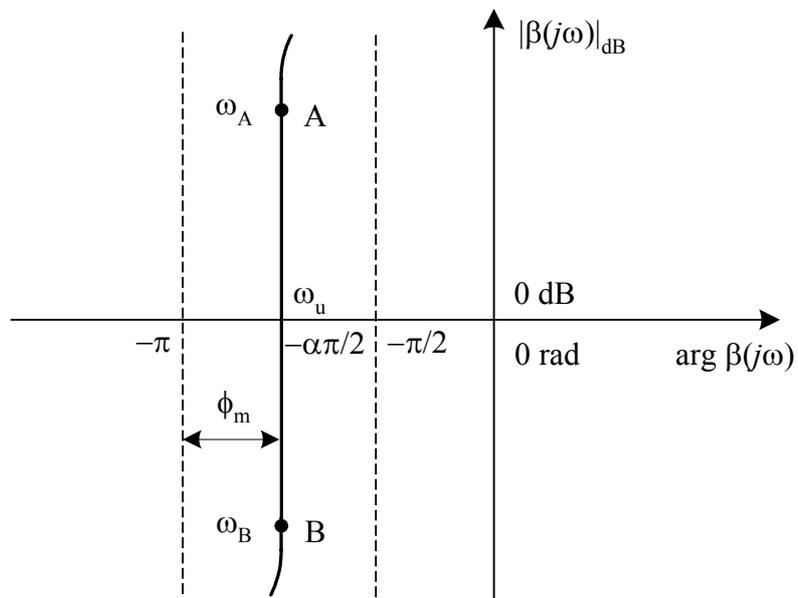


Figura 2.8 – Ilustração da robustez do CRONE nas frequências.

- Um deslizamento ao longo do segmento vertical aquando variações dos parâmetros do processo (considerando que a variação dos parâmetros leva a variações do ganho em torno de ω_u).

A obtenção de tais segmentos verticais define a abordagem não inteira da segunda geração do controlo CRONE.

Para tal considera-se o sistema de controlo da Figura 2.9, em que $C(s)$ é a função de transferência do controlador CRONE e $G(s)$ o processo a controlar. Sabe-se que o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada está relacionado com o seu comportamento em malha aberta em torno da frequência ao ganho unitário. Assim, o estudo de tal comportamento pode ser baseado nas funções de transferência de sensibilidade e de sensibilidade complementar, $T(s) = [Y(s)/E(s)]_{D(s)=0}$ e $S(s) = [Y(s)/D(s)]_{E(s)=0}$ (verifica-se que $T(s) + S(s) = 1$), respectivamente. Portanto, a função de transferência $\beta(s)$, que caracteriza o segmento de recta vertical, como mostra a Figura 2.8, é usada para definir o comportamento desejado de $T(s)$ ou de $S(s)$. Isto é, define-se um segmento vertical $\beta(s)$ de modo que:

$$\beta(s) = \beta(s), \quad \omega \in [\omega_A, \omega_B] \quad (2.120)$$

em que:

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_u}{s} \right)^\alpha, \quad \alpha \in [1, 2] \quad (2.121)$$

As funções de transferência $T(s)$ e $S(s)$ (desejadas) são expressas da seguinte forma (Figura 2.9):

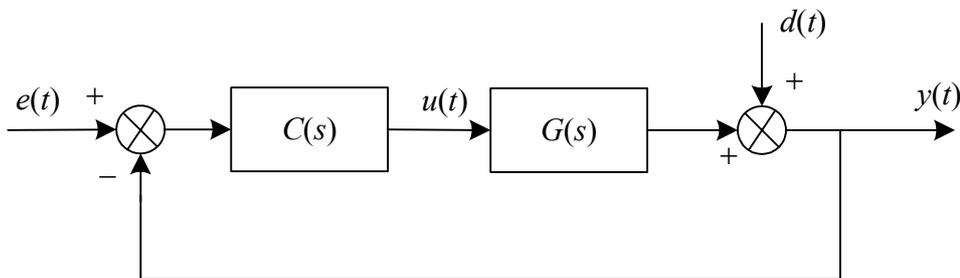


Figura 2.9 – Sistema de controlo.

$$T(s) = \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha}, \quad S(s) = \frac{1}{1 + \beta(s)} = \frac{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha} \quad (2.122)$$

Para $T(s)$ e $S(s)$ o ganho atinge um máximo para as frequências de ressonância ω_t e ω_r , respectivamente:

$$\omega_t = \left(-\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/\alpha}, \quad \omega_r = \left(-\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1/\alpha} \quad (2.123)$$

Este resultado revela a existência de uma ressonância quando $\cos(\alpha \pi/2) < 0$, ou seja, para $1 < \alpha < 3$, e portanto para o controlo CRONE dado que $1 < \alpha < 2$. Os factores de ressonância correspondentes, $Q_t(\alpha)$ e $Q_r(\alpha)$, são dados por:

$$Q_t(\alpha) = \frac{|T(j\omega_t)|}{|T(j0)|} = \frac{1}{\sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}, \quad Q_r(\alpha) = \frac{|S(j\omega_r)|}{|S(j\infty)|} = \frac{1}{\sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2.124)$$

Como se verifica, o factor de ressonância depende exclusivamente da ordem de controlo α , permitindo a introdução da noção de *ressonância robusta*.

Usando as equações (2.123) e (2.124) chega-se às seguintes relações:

$$(\omega_t \omega_r)^{1/2} = \omega_u, \quad Q_t(\alpha) = Q_r(\alpha) \quad (2.125)$$

Estas expressões indicam que as *frequências de ressonância estão simetricamente distribuídas em torno da frequência ao ganho unitário em malha aberta* ω_u enquanto que os *factores de ressonância são idênticos*.

A terceira estratégia do controlo CRONE é baseada na integração de ordem complexa. Assim, generaliza-se a segunda geração substituindo a ordem fraccionária real (que caracteriza o comportamento em malha aberta) por uma ou mais ordens fraccionárias complexas (Oustaloup, *et al.*, 2000). Esta é a versão mais evoluída, sendo também designada como a terceira geração do controlo CRONE ou a abordagem óptima. Dado que esta abordagem sai fora do âmbito deste texto, remete-se os seus pormenores para as referências (Oustaloup, 1991; Oustaloup, 1995b; Oustaloup, *et al.*, 2000).

Em conclusão, a observação de um fenómeno natural levou ao desenvolvimento de uma estratégia de controlo robusto baseado na diferenciação não inteira (real ou complexa). As estratégias de controlo referidas nesta secção dizem respeito somente a sistemas contínuos, estáveis, univariáveis, e de fase mínima. Contudo, extensões efectuadas a estas estratégias permitem, actualmente, o controlo de também sistemas instáveis, de fase não mínima, com modos resonantes, multivariáveis, periódicos e variantes no tempo (Oustaloup, 1991, Oustaloup, 1995b).

O controlo automático de sistemas não é o único campo de aplicação das estratégias do controlo CRONE (Oustaloup, 1991). Existem outras aplicações práticas, tais como a suspensão automóvel (Oustaloup, *et al.*, 1996), a transmissão flexível (Oustaloup, *et al.*, 1995a), ou o actuador hidráulico (Lanusse, *et al.*, 2000). Uma vasta lista de aplicações do controlo CRONE está descrita no livro de Oustaloup (1995b).

2.10.3 Controlador $PI^\lambda D^\mu$ Fraccionário

O controlador PID deve ser a primeira solução a ser adoptada quando se pretende projectar um sistema de controlo. A sua simplicidade aliada a um controlo efectivo de grande parte dos processos faz com que seja, actualmente, o tipo de controlador mais utilizado na indústria. É, pois, natural que se procure melhorar técnicas de sintonia ou definir estruturas de controlo PID alternativas com vista a alargar o seu campo de aplicação, procurando sempre manter a mesma simplicidade.

É nesta perspectiva que Podlubny (1999a) desenvolve o chamado controlador $PI^\lambda D^\mu$, uma generalização do controlador PID clássico que envolve um integrador fraccionário de ordem λ e um diferenciador fraccionário de ordem μ . Este tipo de controlador PID fraccionário (FrPID⁷) pretende dar resposta a um controlo com melhor desempenho, seja em sistemas de ordem inteira, seja em sistemas de ordem fraccionária.

A função de transferência $G_c(s)$ de tal controlador FrPID possui a forma:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I s^{-\lambda} + K_D s^\mu, \quad \lambda, \mu > 0 \quad (2.126)$$

em que $E(s)$ é um erro, e $U(s)$ a saída do controlador; as constantes K , K_I e K_D são respectivamente os ganhos proporcional, integral e diferencial.

⁷ Fractional PID

A resposta nos tempos do controlador $PI^\lambda D^\mu$, $u(t) = L^{-1}\{U(s)\}$, é caracterizada por uma equação integro-diferencial do tipo:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I D^{-\lambda} e(t) + K_D D^\mu e(t), \quad D^{(*)} \equiv {}_0 D_t^{(*)} \quad (2.127)$$

A equação (2.127) implementa uma acção de controlo que é a combinação de três acções básicas: a acção proporcional, a acção integral fraccionária de ordem λ e a acção derivativa fraccionária de ordem μ . Deste modo, conclui-se que o controlador PID tradicional é apenas um caso particular deste tipo de controlador mais geral, em que $\lambda = 1$ (acção integral inteira) e $\mu = 1$ (acção derivativa inteira). Aliás, tomando $\lambda = 1$ e $\mu = 0$ obtém-se um PI; $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ um PD; $\lambda = 0$ e $\mu = 0$ um ganho. Assim, todos estes tipos de controladores PID são casos particulares do controlador $PI^\lambda D^\mu$ fraccionário descrito pela função de transferência (2.126).

A Figura 2.10 mostra a definição no plano destes dois tipos de controladores PID, o inteiro e o fraccionário. Claramente passa-se de uma ocupação possível definida apenas por quatro pontos fixos no plano (caso PID clássico) para uma superfície de possibilidades gerada através dos graus de liberdade extra introduzidos pelas ordens fraccionárias ($\lambda, \mu > 0$) (caso $PI^\lambda D^\mu$ fraccionário). Deste modo, o controlador $PI^\lambda D^\mu$ fraccionário apresenta-se como sendo mais flexível e permitindo um melhor ajuste das propriedades dinâmicas de um sistema de controlo de ordem fraccionário. Uma das suas vantagens mais significativas face aos controladores PID clássicos é o seu melhor desempenho no controlo de sistemas de ordem fraccionária (Podlubny, 1999a). Uma outra vantagem é o facto de serem menos sensíveis a variações dos parâmetros do sistema controlado e a variações dos parâmetros do próprio controlador. Esta mesma propriedade é verificada para os controladores CRONE (Oustaloup, 1991) mencionados na subsecção anterior.

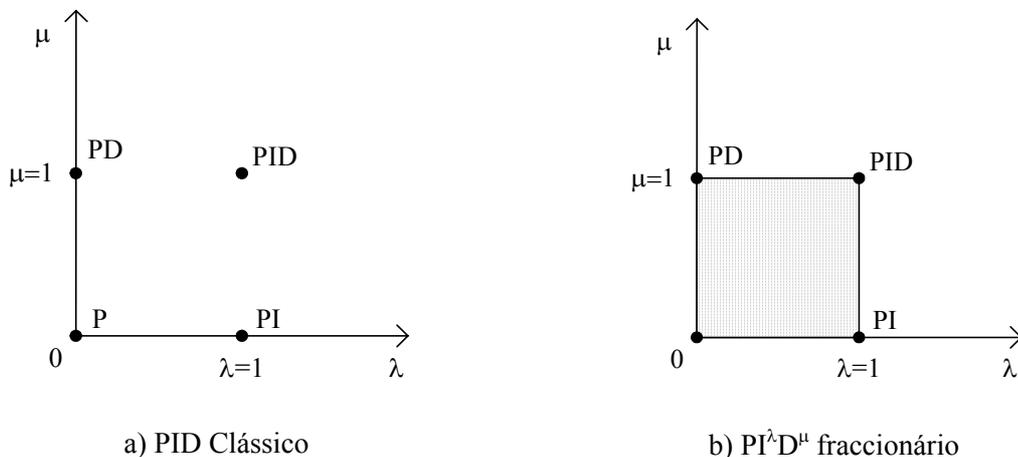


Figura 2.10 – Definição no plano dos controladores PID (clássico e fraccionário).

2.11 Conclusões

O cálculo fraccionário representa, actualmente, uma das ferramentas com mais potencialidades de aplicação. Este facto está demonstrado pelo crescente número de publicações a que se tem assistido nos últimos anos, nas mais diversas áreas, desde a ciência e a engenharia até às áreas sociais e humanas, passando pela economia, finanças, entre muitas outras. Pode-se mesmo dizer que quase todas as áreas do conhecimento humano são “tocadas” por esta “nova” área da matemática.

Como vimos, os operadores fraccionários são definidos através da operação de convolução, o que os tornam particularmente adequados para caracterizar fenómenos de memória e de hereditariedade (tais como a difusão, viscoelasticidade, transmissão de linhas, etc.). De facto, esta é uma das principais vantagens das derivadas fraccionárias em comparação com os modelos de ordem inteira clássicos, onde estas propriedades são simplesmente desprezadas.

Vimos também que esta teoria tem sido alvo de diversas aproximações desde o seu início, resultando em várias definições (nem sempre equivalentes) para as derivadas e integrais fraccionários. Obviamente que este facto não contribui para a divulgação desta teoria, devido à dificuldade inerente de escolha de uma dada definição, do seu campo de aplicação e da sua interpretação física associada. Para resolver, de certa forma, este problema foram dadas duas definições, nomeadamente a de Riemann-Liouville e a de Grünwald-Letnikov. Estas definições são equivalentes para uma grande classe de funções, o que permite utilizar a definição de Riemann-Liouville durante a formulação do problema e, depois, passar para a de Grünwald-Letnikov para obter a sua solução numérica. Outro dos problemas destes operadores, é a sua interpretação geométrica que, até ao momento, ainda não está estabelecida, apesar de várias tentativas efectuadas para esse efeito. Essa interpretação geométrica deverá ser clara e simples, como é a noção dos declives e áreas para o caso das derivadas e integrais inteiros, respectivamente, de forma a obter-se uma visualização gráfica do significado de derivada fraccionária o que, obviamente, ajudará a motivar e a generalizar o uso desta ferramenta nos mais diversos domínios.

O método da transformada de Laplace revela-se uma ferramenta eficiente e de fácil utilização na solução de equações diferenciais fraccionárias. A nova função de Mittag-Leffler desempenha um papel importante na solução deste tipo de equações. De salientar, neste caso,

a utilização da definição de Caputo nas referidas equações, a qual fornece condições iniciais fisicamente interpretáveis, o que é conveniente na solução de problemas aplicados.

Capítulo 3

Análise Dinâmica de Alguns Sistemas Não Lineares

NESTE capítulo é apresentada uma análise dinâmica de alguns sistemas não lineares. Na primeira parte abordam-se os sistemas com folga e impactos, através do método da função descritiva. Na segunda parte analisa-se o oscilador de Van der Pol clássico (*i.e.*, modelado por uma equação diferencial não linear de segunda ordem) e a proposta da sua generalização através do oscilador de Van der Pol fraccionário (*i.e.*, sistema não linear que incorpora uma derivada fraccionária na sua descrição). Os sistemas estudados são analisados na perspectiva da aplicação da teoria do cálculo fraccionário. A sua dinâmica fraccionária é ilustrada pelos traçados de Nyquist, diagramas de Bode, função descritiva, planos de fase, análise espectral e respostas temporais. A partir dos resultados obtidos concluí-se que os modelos dinâmicos de ordem inteira não são capazes de tomar em consideração todos os fenómenos envolvidos num dado processo, sendo que os sistemas de ordem fraccionária podem revelar-se úteis, tanto para uma modelação mais completa, como para um controlo mais efectivo do sistema. Por outro lado, com a introdução de derivadas fraccionárias verifica-se que os sistemas podem exibir comportamentos diferentes dos obtidos pelos modelos clássicos, dependendo, portanto, da ordem total do sistema e da estrutura do mesmo.

Tomando estas ideias em consideração, o capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. A secção 3.1 faz uma introdução aos sistemas não lineares estudados neste texto e a secção 3.2 apresenta os fundamentos da análise através do método da função descritiva. A secção 3.3 analisa os sistemas com folga e impactos através da função descritiva. Os

resultados desta análise são comparados com os obtidos através dos modelos clássicos de sistemas com folgas modeladas através de considerações puramente geométricas. Aplica-se também à predição de ciclos limite num sistema de controlo não linear com um controlador PID. A secção 3.4 estuda o sistema não linear designado como oscilador de Van der Pol, o qual encontra inúmeras aplicações na engenharia e na biologia. Efectua-se também uma análise pelo método da função descritiva e testa-se a sua validade na análise deste tipo de sistemas. A secção 3.5 propõe uma modificação ao oscilador de Van der Pol através da introdução de uma derivada fraccionária na equação diferencial não linear. A dinâmica fraccionária do sistema é ilustrada através de diversas ferramentas de análise. Por último, a secção 3.6 estabelece as principais conclusões e aponta perspectivas de evolução futura do trabalho realizado.

3.1 Introdução

Nos anos mais recentes, tem sido dedicada uma atenção especial aos sistemas não lineares e, em particular, aos sistemas caóticos, devido ao facto de estes representarem o comportamento da maioria dos fenómenos complexos naturais.

A vibração com impactos ocorre em diversos ramos da tecnologia, nomeadamente em máquinas de impacto, sistemas vibratórios, misturadores, entre outros, onde desempenham um papel muito útil. No entanto, em geral, a sua ocorrência é indesejável, dado que causa cargas dinâmicas adicionais, assim como a avaria de máquinas e de dispositivos. Apesar das inúmeras investigações feitas sobre este assunto, este fenómeno ainda não é totalmente compreendido, devido essencialmente à sua natureza discreta-contínua e a um conjunto de questões relacionadas com a dissipação de energia envolvendo os efeitos dinâmicos. Os sistemas mecânicos com impactos são extremamente não lineares e a sua resposta a forças externas pode exhibir fenómenos complexos, que vão desde regimes periódicos com múltiplos impactos, passando por diferentes tipos de movimentos sub-harmónicos, até um comportamento caótico.

Numa primeira fase este estudo analisa as propriedades de sistemas com folgas dinâmicas (*i.e.*, com o fenómeno de impacto incluído). Este modelo tem em consideração os efeitos gerados pelo processo de impacto oferecendo, deste modo, uma melhor descrição e controlo de todo o sistema. O estudo baseia-se na função descritiva aplicada a um sistema não linear composto de duas massas sujeitas aos fenómenos de folga e de impactos. Os resultados

obtidos são ilustrados usando os métodos “clássicos”, baseados na resposta em frequência (diagramas de Bode e traçados de Nyquist), e comparados com os resultados gerados pelos modelos estáticos. A aplicabilidade e precisão do método descrito é testado usando controladores PID.

Por outro lado, o estudo dos osciladores não lineares tem desempenhado um papel muito importante no desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos. O oscilador de Van der Pol representa um sistema não linear que apresenta um comportamento peculiar e que surge naturalmente em várias aplicações. Actualmente, tem sido utilizado no estudo e projecto de diversos modelos e sistemas, nomeadamente em fenómenos biológicos (batimentos do coração, ouvido, entre outros), modelos acústicos, radiação de telemóveis e como modelo de osciladores electrónicos.

Nesta ordem de ideias, numa segunda fase investiga-se uma versão fraccionária do oscilador de Van der Pol não forçado, introduzindo uma derivada de ordem não inteira nas equações dinâmicas. O oscilador de Van der Pol fraccionário resultante é analisado, tanto no domínio das frequências como no domínio dos tempos, para diferentes ordens da derivada fraccionária e, conseqüentemente, da ordem total do sistema. Mostra-se que o sistema pode exibir diferentes regimes de saída, dependendo da ordem total do sistema e da estrutura das equações de estado. A dinâmica fraccionária é ilustrada através das simulações numéricas realizadas e dos diversos índices de desempenho propostos.

3.2 Fundamentos da Análise Através do Método da Função Descritiva

Nesta secção descreve-se de forma sucinta o método da função descritiva (FD) e a sua aplicação na predição de ciclos limite em sistemas não lineares. A aplicação da FD neste estudo tem por finalidade:

- Analisar o desempenho do controlador na presença de sistemas com folgas dinâmicas. A estratégia aqui adoptada baseia-se na evolução da FD através do traçado de Nyquist para cada controlador e processo a controlar. Desta forma, pode-se estudar a estabilidade e prever aproximadamente a ocorrência e as características dos ciclos limite (Azenha e Machado, 1998; Barbosa, *et al.*, 2003a);

- Efectuar um estudo aproximado do sistema não linear conhecido como *oscilador de Van der Pol*, o qual encontra diversas aplicações importantes nas áreas da engenharia e da biologia. Analisa-se também a validade da FD no estudo deste tipo de sistemas (Barbosa, *et al.*, 2004b).

Deve ser referido que o método da FD não é a única técnica a ser usada para a predição de ciclos limite, sendo também importantes outros como o balanço harmónico e os métodos de margem de ganho dependentes da amplitude. Porém, para a condição de ocorrência de ciclo limite todos os métodos atrás citados são equivalentes ao método da FD (Cox, 1987). No trabalho (Patra e Singh, 1996) desenvolve-se um método gráfico para a predição de ciclos limite, para o caso específico de sistemas não lineares multivariáveis, o qual pode ser implementado de forma eficiente através de um programa de computador com uma representação gráfica. Motivado por estes resultados, introduzem-se de seguida os fundamentos do método de análise por FD.

A ideia base do método da FD consiste em aplicar uma sinusóide na entrada de um elemento não linear e considerar somente a componente fundamental do sinal de saída para a determinação da função que descreve a não linearidade. Assim, a razão dos fasores correspondentes (saída/entrada) dos dois sinais sinusoidais representam a FD do elemento não linear. O uso deste conceito permite a adaptação do teste de estabilidade de Nyquist para a detecção do ciclo limite de um sistema não linear, nomeadamente a predição aproximada da sua amplitude e da sua frequência.

Nesta linha de pensamento, considera-se o sistema de controlo de realimentação unitária representado na Figura 3.1, onde $N(X, \omega)$ e $G(j\omega)$ denotam, respectivamente, a FD do elemento não linear e a função de transferência do sistema linear.

Isolando o elemento não linear, $N(X, \omega)$, e aplicando uma sinusóide na sua entrada do tipo $x(t) = X \cos(\omega t)$, obtém-se, em regime permanente, na saída $y(t)$ da característica não linear, uma onda periódica que, em geral, não é sinusoidal. Considerando que a não linearidade é simétrica com respeito à variação em torno do zero, então a série de Fourier da saída $y(t)$ vem dada por:

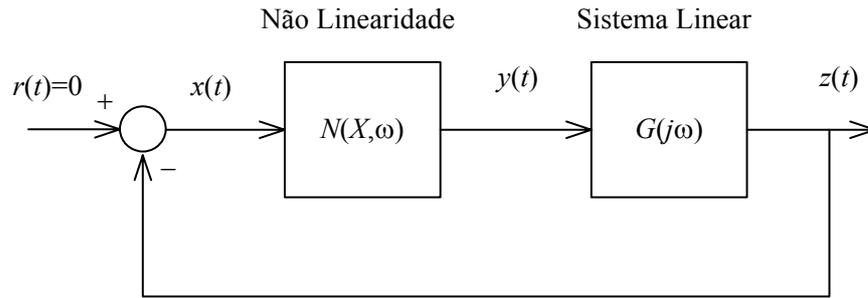


Figura 3.1 – Diagrama de blocos do sistema não linear realimentado usado para a análise por função descritiva.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos(k\omega t + \phi_k) \quad (3.1)$$

em que Y_k e ϕ_k designam respectivamente a amplitude e a fase da componente do harmónico de índice k da saída $y(t)$. Na análise por FD, considera-se que somente a componente do harmónico fundamental de $y(t)$, Y_1 , é significativo. Tal consideração é normalmente válida, pois os harmónicos de ordem superior, Y_k para $k = 2, 3, \dots$, possuem usualmente uma amplitude muito menor relativamente ao valor da amplitude da componente fundamental Y_1 . Mais ainda, como grande parte dos sistemas são “filtros passa-baixo” (*i.e.*, a função $G(j\omega)$), os harmónicos de ordem superior são ainda mais atenuados.

Desta forma, a FD, ou a FD sinusoidal, de um elemento não linear, $N(X, \omega)$, é definida como sendo a razão entre a componente do harmónico fundamental da saída, $Y_1 \cos(\omega t + \phi_1)$, e a entrada $x(t) = X \cos(\omega t)$, ou seja:

$$N(X, \omega) = \frac{Y_1}{X} e^{j\phi_1} \quad (3.2)$$

onde X representa a amplitude da sinusóide de entrada $x(t)$ e Y_1 e ϕ_1 designam, respectivamente, a amplitude e a fase da componente do harmónico fundamental da saída $y(t)$. Várias funções descritivas de elementos não lineares (típicos) podem ser encontradas nas referências (Ogata, 1982; Slotine e Li, 1991; Phillips e Harbor, 1991).

Em geral, a FD pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$N(X, \omega) = \frac{2}{XT} \int_{t_1}^{t_1+T} y(\omega t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.3)$$

onde ω denota a frequência angular das ondas de saída e de entrada e em que o período $T = 2\pi/\omega$.

A FD pode ser usada para uma análise aproximada da estabilidade do sistema de controlo não linear representado na Figura 3.1. Assim, obtém-se um ciclo limite se a sinusóide na entrada da não linearidade se regenera ao percorrer a malha fechada (Figura 3.1), isto é, quando se verifica a equação:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(X, \omega)} \quad (3.4)$$

A expressão (3.4) pode ser vista como a equação característica do sistema realimentado não linear da Figura 3.1. Deste modo, se a equação (3.4) é satisfeita para algum valor de X e de ω , então *prevê-se* um ciclo limite para o sistema não linear. Mais ainda, dado que a expressão (3.4) aplica-se somente quando o sistema se encontra na presença de um ciclo limite no estado estacionário, a análise por FD prevê unicamente a presença ou a ausência desse ciclo limite e, conseqüentemente, não pode ser aplicado para a análise de outro tipo de respostas temporais.

De um modo geral, $N(X, \omega)$, é uma função tanto da amplitude X como da frequência ω da sinusóide de entrada. Contudo, para o caso de sistemas não lineares, em que não esteja envolvido o armazenamento de energia, a FD é dependente unicamente da amplitude, isto é, $N = N(X)$. Quando se lida com elementos que armazenam ou dissipam energia, o método da FD depende de ambas, tanto da amplitude como da frequência, ou seja, $N = N(X, \omega)$. Neste último caso, para se determinar a FD recorre-se normalmente a um cálculo numérico em vez de uma representação simbólica porque, em geral, torna-se praticamente impossível determinar uma solução analítica para as equações diferenciais que modelam o elemento não linear. Apesar disso, é possível calcular as expressões analíticas aproximadas para tais funções descritivas, nomeadamente através da ajuda de aplicações de processamento simbólico como, por exemplo, o MAPLE¹.

3.3 Análise de Sistemas com Folga e Impactos

Nesta secção investiga-se a dinâmica e o controlo de sistemas com folga e impactos através do método da função descritiva. O fenómeno da folga ocorre em muitos sistemas físicos. Por exemplo, nos estudos (Tao e Kokotovic, 1993, 1995) desenvolve-se um algoritmo para a

¹ Marca registada da Waterloo Maple, Inc.

compensação de uma folga cinemática baseado num controlador adaptativo. Nos trabalhos (Stepanenko e Sankar, 1986; Dubowsky, *et al.*, 1987; Choi e Noah, 1989) estuda-se o fenómeno de folga com algumas simplificações nos modelos dinâmicos, enquanto que o problema da sua compensação e controlo pode ser encontrado nas referências (Luh, *et al.*, 1983; Machado, 1996). Contudo, a abordagem clássica para o estudo das folgas consiste normalmente na adopção de um modelo geométrico (Slotine e Li, 1991; Phillips e Harbor, 1991) que despreza os efeitos dinâmicos envolvendo o processo de impacto. Devido a este facto, usualmente, os resultados reais diferem significativamente dos determinados através desse tipo de modelo. Nesta perspectiva, esta secção analisa este problema considerando um sistema protótipo consistindo em duas massas sujeitas a uma folga dinâmica (*i.e.*, não somente o espaçamento da folga, mas também o fenómeno de impacto).

Tendo estas ideias em mente, utiliza-se de seguida o método da FD para a análise e controlo de sistemas com folga e impactos. Em primeiro lugar, e para efeitos comparativos, considera-se de forma abreviada o sistema de folga estática (*i.e.*, com o modelo geométrico). De seguida, calcula-se a FD do sistema com folga dinâmica (*i.e.*, com o fenómeno de impacto incluído). Para ilustração das principais características deste tipo de sistemas usam-se diferentes tipos de gráficos, nomeadamente traçados de Nyquist, diagramas de Bode, gráficos de transformada de Fourier e respostas nos tempos. Por último, utilizam-se os resultados obtidos do cálculo da FD para a predição de ciclos limite num sistema não linear (com a folga dinâmica) utilizando um controlador PID.

3.3.1 Sistema de Folga Estática

Nesta subsecção considera-se o fenómeno da folga sem o efeito dos impactos, a qual é usualmente designada por *folga estática* (Nordin e Gutman, 2002). O modelo geométrico e a sua característica de entrada-saída estão ilustradas na Figura 3.2.

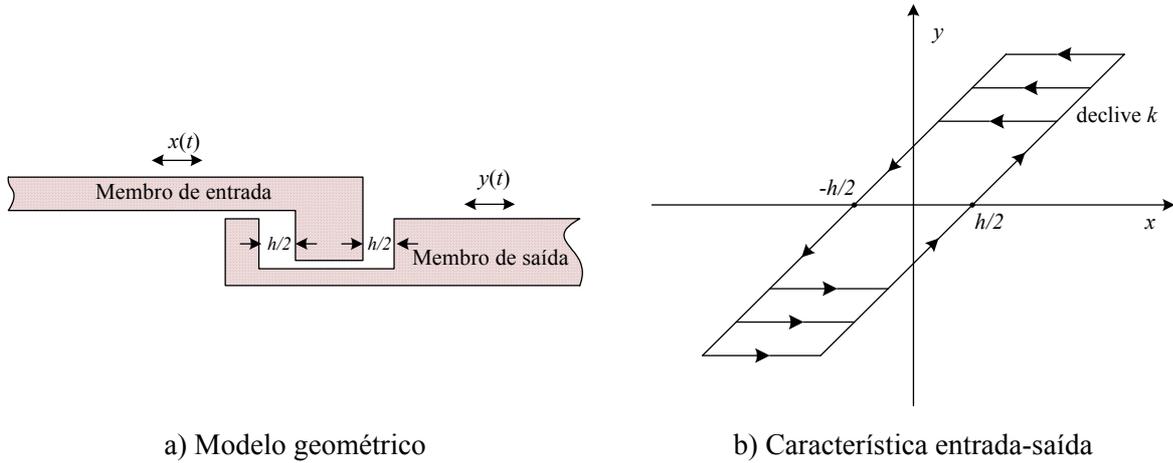


Figura 3.2 – Representação da não linearidade folga estática: a) Modelo geométrico e b) Característica entrada-saída.

A função descritiva do modelo geométrico da Figura 3.2b) é dado através da seguinte expressão (Phillips e Harbor, 1991):

$$N(X, \omega) = \begin{cases} 0, & X \leq h/2 \\ k \left[1 - N_s \left(\frac{X/h}{1 - X/h} \right) \right] - j \frac{2kh(X - h/2)}{\pi X^2}, & X > h/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$N_s(z) = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \cos \left(\sin^{-1} \frac{1}{z} \right) \right] \quad (3.6)$$

onde h designa o espaçamento da folga e k o declive das curvas de histerese da sua característica entrada-saída.

O sistema proposto corresponde à FD de um sistema linear de uma única massa com valor igual a $M_1 + M_2$ seguida da folga estática da Figura 3.2b), tendo como entrada e saída as variáveis da posição, respectivamente $x(t)$ e $y(t)$, conforme mostra a Figura 3.3.

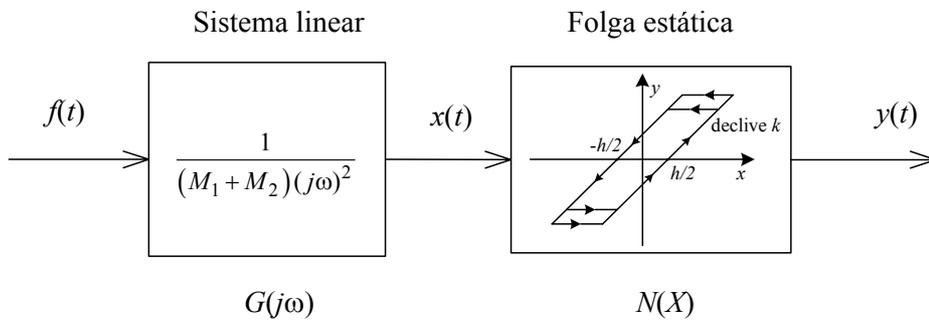


Figura 3.3 – Sistema da folga estática com massa.

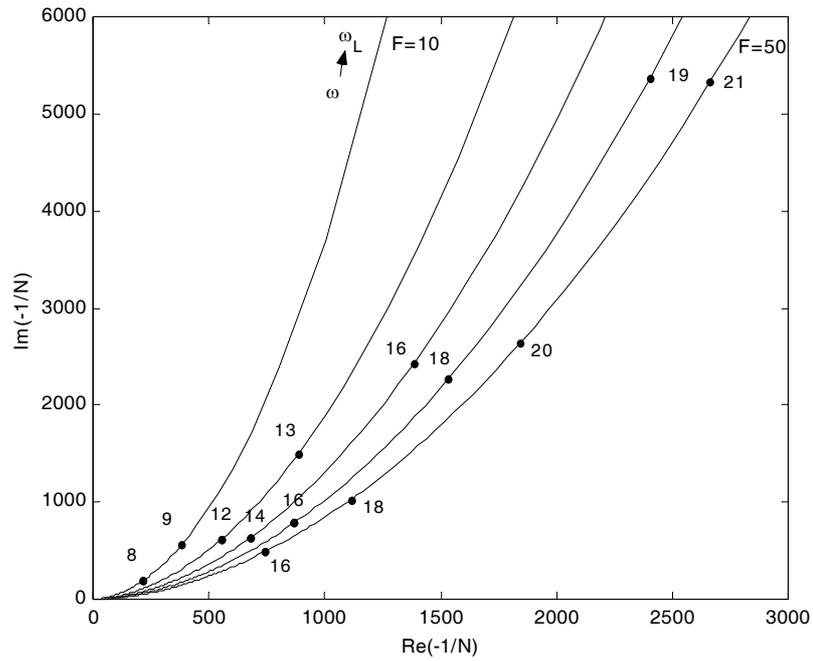


Figura 3.4 – Traçado de Nyquist de $-1/N(F, \omega)$ para o sistema da Figura 3.3, $F = 10, 20, \dots, 50$ N, $0 < \omega < \omega_L$, $M_1 = M_2 = 1$ kg e $h = 10^{-1}$ m.

Para uma entrada sinusoidal $f(t) = F \cos(\omega t)$ a condição $X = h/2$ origina uma frequência limite ω_L aplicável a este sistema, dada por:

$$\omega_L = \left[\frac{2}{h} \frac{F}{(M_1 + M_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

A frequência limite ω_L (3.7) corresponde ao valor a partir do qual não existe contacto entre os membros do primário e do secundário. A Figura 3.4 ilustra o gráfico de Nyquist de $-1/N(F, \omega) = -1/[G(j\omega)N(X)]$ para o sistema da Figura 3.3, considerando diversos valores da força de entrada F .

Esta abordagem ao estudo das folgas baseia-se na adopção de um modelo geométrico que despreza os efeitos dinâmicos envolvidos durante o processo de impacto. Por esta razão, os resultados reais diferem normalmente dos previstos por este tipo de modelo.

3.3.2 Sistema de Folga Dinâmica

Nesta subsecção considera-se a análise de impactos baseada na lei de conservação do momento e do coeficiente de restituição dado pela regra de Newton (Barbosa e Machado, 2002a, 200b; Barbosa, *et al.*, 2003a). Esta aproximação pode ser usada para o estudo de variações de velocidade do centro de massa de cada um dos corpos envolvidos na colisão, para as situações de antes e após o impacto. Neste estudo considera-se o caso de dois corpos colidindo em superfícies normais à linha comum que une os seus centros de massa e que possuem somente componentes de velocidade ao longo dessa linha. Deste modo, estas restrições impõem que não ocorram efeitos de rotação e de deslizamento. Este tipo de impacto é normalmente designado como *impacto central*.

O sistema mecânico proposto consiste em duas massas (M_1 e M_2) sujeitas aos fenómenos de folga e de impacto, tal como se ilustra na Figura 3.5.

A colisão entre as massas M_1 e M_2 ocorre quando $x_1 = x_2$ ou $x_2 = h + x_1$. Neste caso, podem-se calcular as velocidades de M_1 e M_2 após o impacto (\dot{x}'_1 e \dot{x}'_2) relacionando-as com os valores anteriores (\dot{x}_1 e \dot{x}_2) através da regra de Newton:

$$\dot{x}'_1 - \dot{x}'_2 = -\varepsilon (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (3.8)$$

onde ε designa o coeficiente de restituição, o qual representa o fenómeno dinâmico que ocorre nas massas durante o processo de impacto. O coeficiente de restituição ε varia no intervalo $0 < \varepsilon < 1$. No caso de uma colisão totalmente plástica (*i.e.*, inelástica) $\varepsilon = 0$, enquanto que no caso de uma colisão elástica ideal $\varepsilon = 1$.

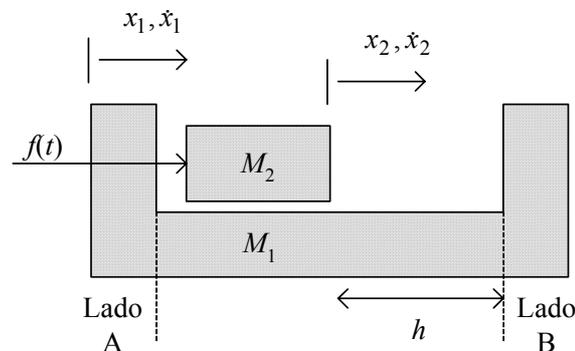


Figura 3.5 – Sistema com duas massas sujeito a folga dinâmica.

Por outro lado, o princípio de conservação do momento requer que o momento, imediatamente antes e após o impacto, seja igual, fornecendo:

$$M_1\dot{x}'_1 + M_2\dot{x}'_2 = M_1\dot{x}_1 + M_2\dot{x}_2 \quad (3.9)$$

A partir das equações (3.8) e (3.9) chega-se às seguintes expressões para o cálculo de ambas as velocidades (\dot{x}'_1 e \dot{x}'_2) após o impacto:

$$\dot{x}'_1 = \frac{\dot{x}_1(M_1 - \varepsilon M_2) + \dot{x}_2(1 + \varepsilon)M_2}{M_1 + M_2} \quad (3.10)$$

$$\dot{x}'_2 = \frac{\dot{x}_1(1 + \varepsilon)M_1 + \dot{x}_2(M_2 - \varepsilon M_1)}{M_1 + M_2} \quad (3.11)$$

Para o sistema da Figura 3.5 calcula-se numericamente o diagrama de Nyquist da função $-1/N(F, \omega)$ para uma entrada de força sinusoidal do tipo $f(t) = F \cos(\omega t)$ aplicada à massa M_2 e considerando como saída a posição $x_1(t)$ da massa M_1 . Para este sistema observa-se a existência de uma frequência limite ω_L de validação do sistema proposto. Esta frequência determina-se aplicando a lei de Newton à massa M_2 , isto é, $f(t) = M_2 \ddot{x}_2(t)$. Considerando um sinal de entrada $f(t) = F \cos(\omega t)$ e resolvendo para $x_2(t)$ chega-se a uma expressão para ω_L , quando a amplitude do deslocamento se encontra no interior da folga $h/2$, dada pela equação:

$$\omega_L = 2 \cdot \left(\frac{F}{h \cdot M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

Nas simulações subsequentes adotam-se os valores dos parâmetros de $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e utiliza-se um passo de simulação de $\Delta t = 10^{-4}$ com o método de integração de Runge-Kutta 4. A Figura 3.6 mostra a evolução dos diagramas de Nyquist para vários valores do coeficiente de restituição $0,2 \leq \varepsilon \leq 0,8$ com uma força de entrada fixa de $F = 50$ N. Alternativamente, a Figura 3.7 ilustra os gráficos de Nyquist para $20 \leq F \leq 100$ N e com três valores diferentes de $\varepsilon = \{0,2; 0,5; 0,8\}$. Estas curvas são calculadas para uma faixa de frequências entre $0 < \omega < \omega_L$, com um passo de frequência de $\Delta\omega = 0,1$ rad/s. Cada um dos pontos mostrados corresponde a uma média de 50 ciclos da frequência de excitação, calculada após o transitório inicial.

A partir dos gráficos observa-se algumas características interessantes. A mais óbvia é a ocorrência de um fenômeno de salto, o qual é característico dos sistemas não lineares. Este

salto é menos visível para os casos limite ($\varepsilon \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow 1$), onde esta singularidade quase desaparece. A Figura 3.7 mostra também que, para um valor fixo do coeficiente de restituição ε , as curvas são proporcionais à amplitude F .

A frequência para a qual o fenómeno de salto ocorre (ω_J) pode ser determinada numericamente chegando à seguinte relação aproximada:

$$\omega_J \sim \left(\frac{F}{h \cdot M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

Além desta descontinuidade maior, que é mais visível próximo da frequência ω_J , detecta-se também a existência de outros saltos menores ao longo das curvas de Nyquist das Figuras 3.6 e 3.7, indicando uma transição no regime do sistema. De facto, como se mostra mais à frente, obtêm-se respostas heterogéneas, que vão desde regimes com multi-impactos periódicos até um comportamento caótico, quando se varia os parâmetros (ε, ω). Reporte-se também o facto interessante de estes diversos regimes de impacto poderem ser parametrizados e serem claramente identificáveis através das curvas de Nyquist. Este facto pode revelar-se útil na análise e controlo deste tipo de sistemas dada a grande aplicabilidade da análise de estabilidade de Nyquist.

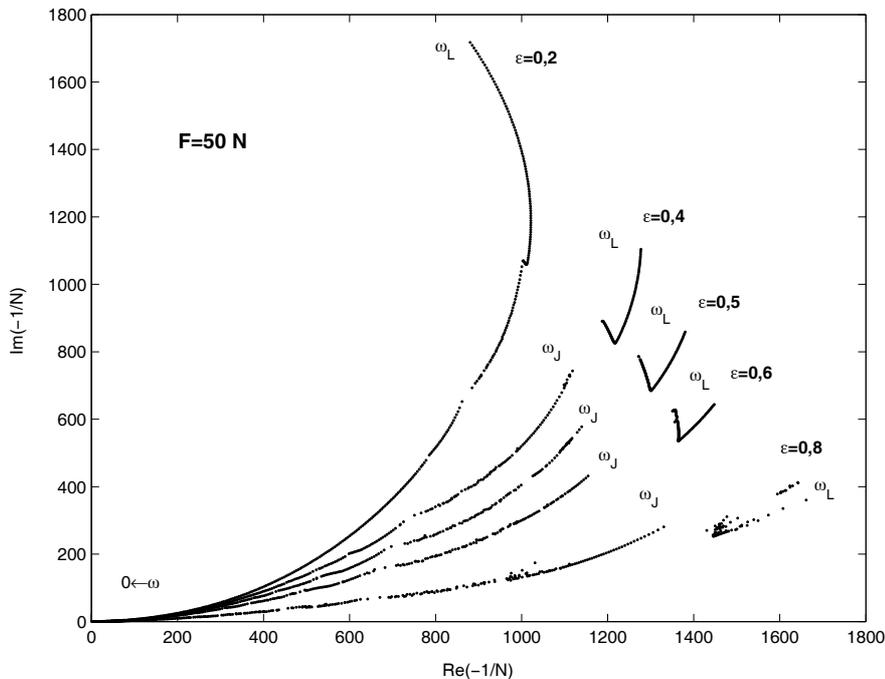
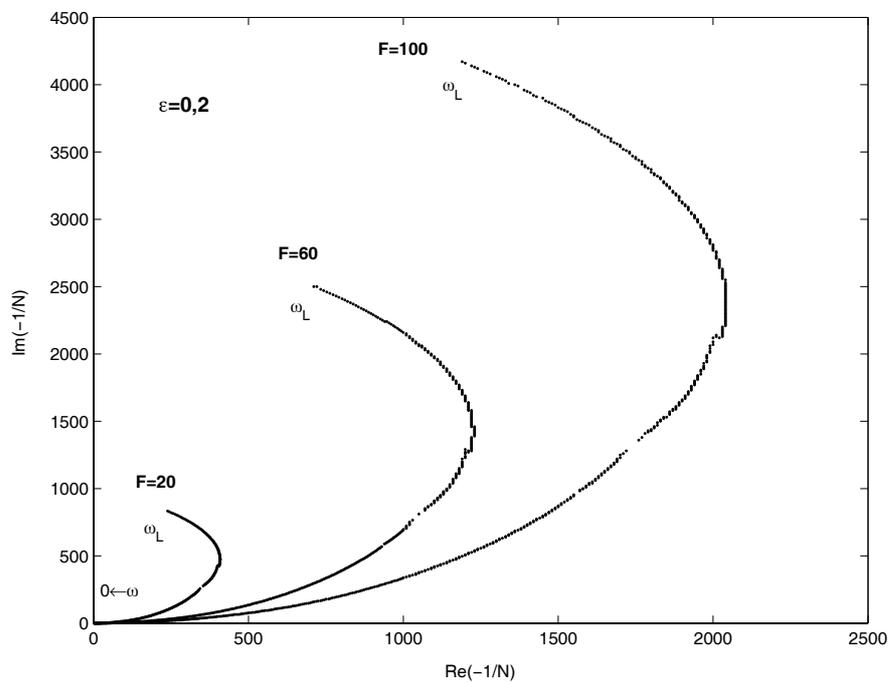
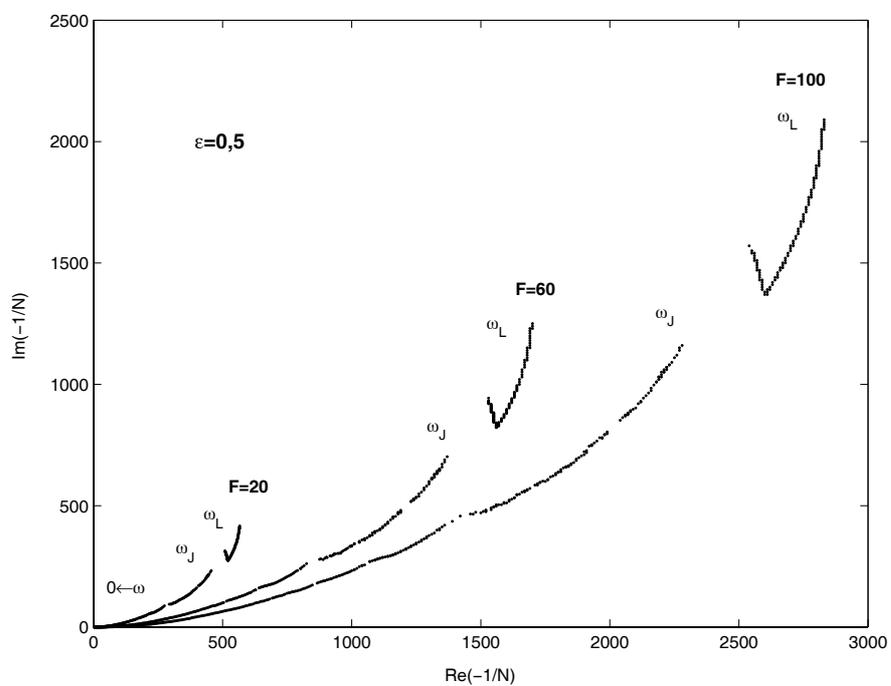


Figura 3.6 – Diagrama de Nyquist de $-1/N(F, \omega)$ para a folga dinâmica com $F = 50 \text{ N}$, $M_1 = M_2 = 1 \text{ kg}$, $h = 10^{-1} \text{ m}$ e $\varepsilon = \{0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8\}$.



a) $\varepsilon = 0,2$



b) $\varepsilon = 0,5$

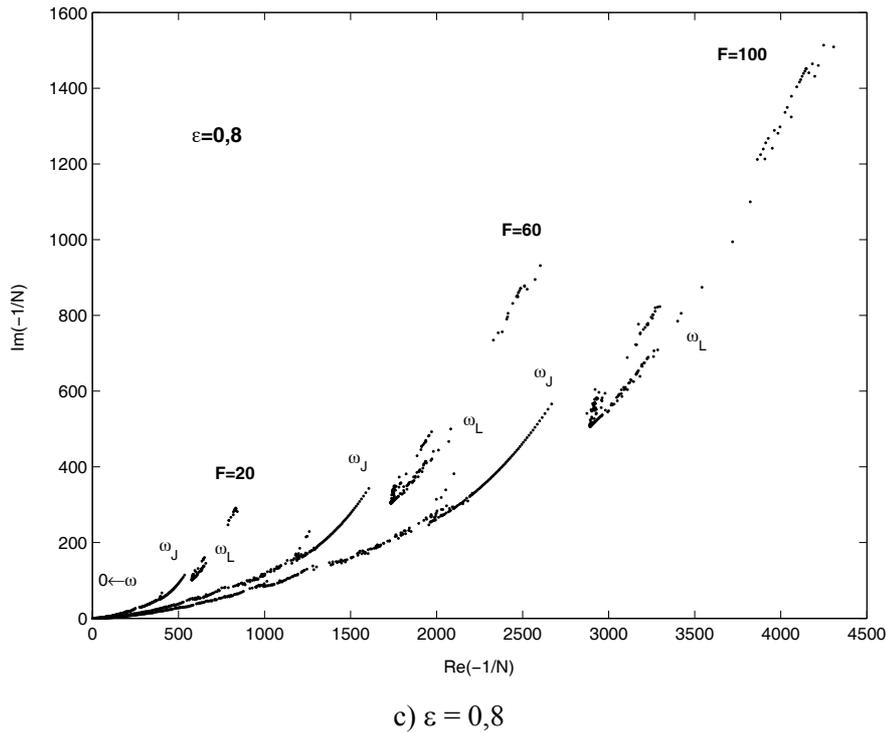


Figura 3.7 – Diagramas de Nyquist de $-1/N(F, \omega)$ para a folga dinâmica com $F = \{20, 60, 100\}$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e para: a) $\varepsilon = 0,2$, b) $\varepsilon = 0,5$ e c) $\varepsilon = 0,8$.

Alternativamente, a Figura 3.8 ilustra a variação de $-1/N(F, \omega)$ através de gráficos log-log da parte real e imaginária de $-1/N(F, \omega)$, respectivamente $\text{Re}\{-1/N\}$ e $\text{Im}\{-1/N\}$, em função da frequência de excitação ω , para uma força de entrada constante de $F = 50$ N e para os coeficientes de restituição $\varepsilon = \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$. Observando as curvas, conclui-se que:

- Os gráficos da parte $\text{Re}\{-1/N\}$ mostram que ambos os modelos (folgas estática e dinâmica) são muito similares nas baixas frequências (onde revelam um declive de +40 dB/dec), mas diferem significativamente para as altas frequências;
- Por outro lado, os gráficos da parte $\text{Im}\{-1/N\}$ ilustram que os modelos em questão são diferentes em toda a faixa de frequências. Mais ainda, para as frequências intermédias, as folgas dinâmicas apresentam um declive fraccionário inferior a +80 dB/dec face ao modelo estático das folgas.

Os diferentes declives das curvas são causados pela variação dinâmica dos modos contínuo/discreto que ocorrem durante as colisões das massas. No entanto, deve-se fazer uma análise cuidada, pois não está demonstrado que um declive fraccionário da FD implica um modelo de ordem fraccionário. Na realidade, este estudo adopta modelos de ordem inteira para a descrição do sistema. Consequentemente, pode-se obter uma perspectiva (complementar) para a caracterização do sistema analisando o número de impactos que

ocorrem no sistema da folga dinâmica. Assim, analisando o número de impactos por período de excitação $T = 2\pi/\omega$, verifica-se a existência de duas regiões:

- Para $\omega \leq \omega_j$, onde o sistema é caracterizado por um número irregular de impactos e, portanto, por fenómenos complexos, que vão desde os comportamentos periódicos até aos caóticos;
- Para $\omega > \omega_j$, onde o movimento é caracterizado através de um comportamento regular, correspondendo a uma colisão alternada em cada um dos lados (A e B) do sistema de massas.

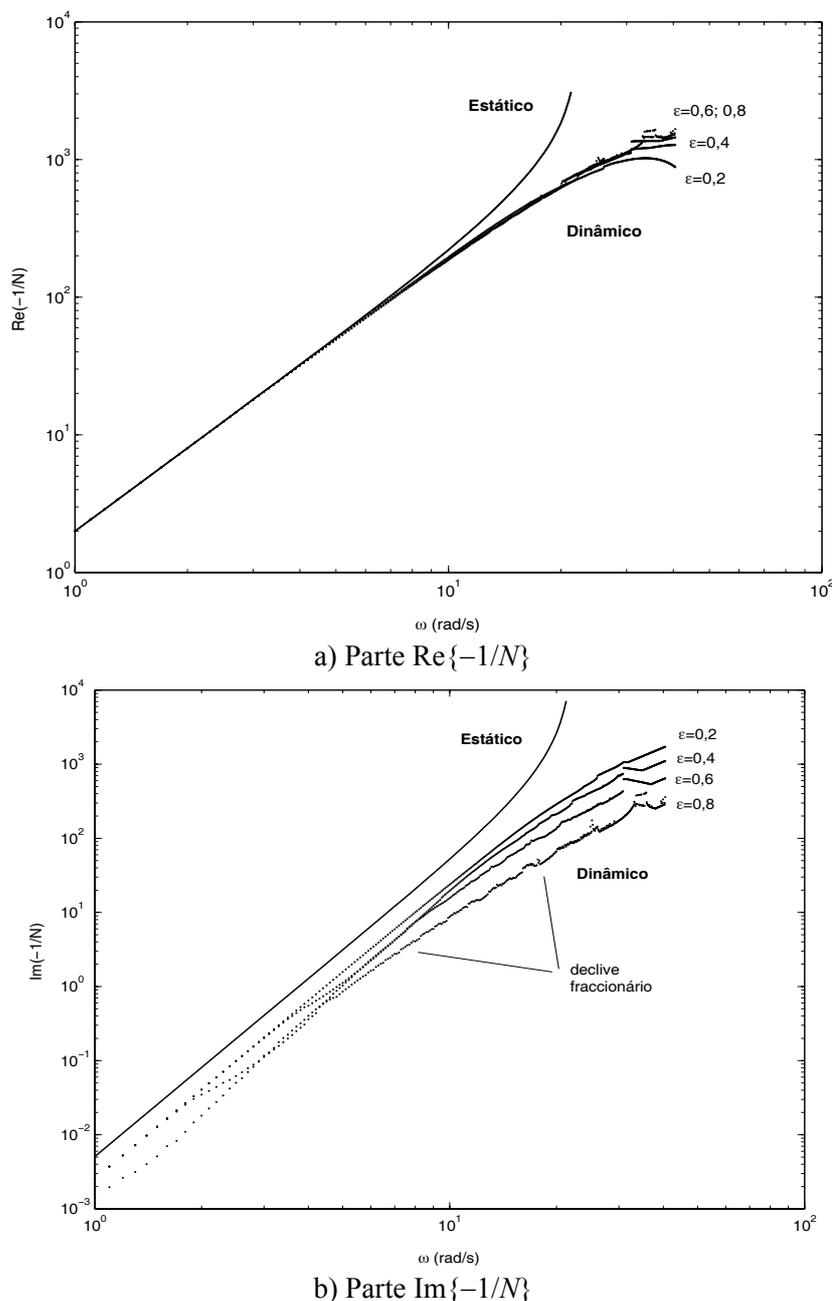
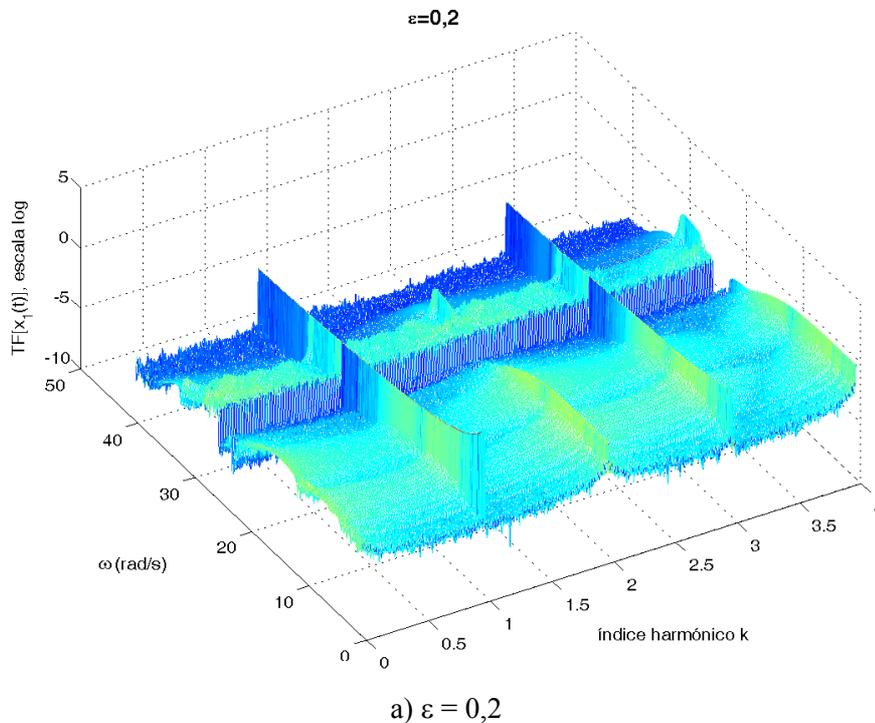


Figura 3.8 – Gráficos log-log das partes: a) $\text{Re}\{-1/N\}$ e b) $\text{Im}\{-1/N\}$, em função da frequência de excitação ω para $F = 50$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e $\varepsilon = \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$.

A Figura 3.9 apresenta a transformada de Fourier do deslocamento de saída da massa M_1 , $TF\{x_1(t)\}$, mais concretamente mostra a amplitude do conteúdo harmónico de $x_1(t)$ para $F = 50\text{ N}$, $1,0 < \omega < 40,5\text{ rad/s}$ e $\varepsilon = \{0,2; 0,5; 0,8\}$. Os gráficos revelam que os harmónicos fundamentais possuem uma amplitude muito superior que as componentes harmónicas de ordem mais elevada. Este facto valida a aplicação do método da função descritiva na predição de ciclos limite para este sistema. Contudo, nota-se que, para valores elevados de ε , existe um conteúdo harmónico de ordem superior significativo e, conseqüentemente, obtém-se uma baixa precisão na predição dos ciclos limite. Mais ainda, verifica-se que os gráficos apresentam diferentes tipos de regiões:

- As “zonas macias”, onde a maior parte da energia do sinal se concentra no harmónico fundamental e seus múltiplos;
- As “zonas rugosas”, em que se verifica uma distribuição da energia do sinal ao longo de todo o espectro de frequências, indicando um comportamento do tipo caótico. Aliás, nota-se que quanto maior for o coeficiente de restituição ε mais alargada se torna a região correspondente às zonas caóticas.



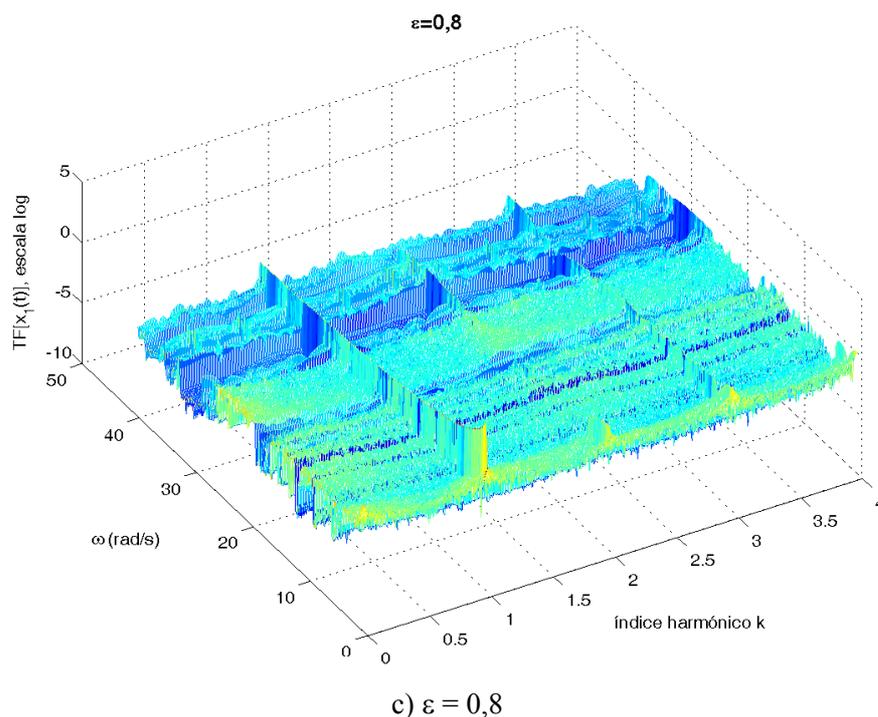
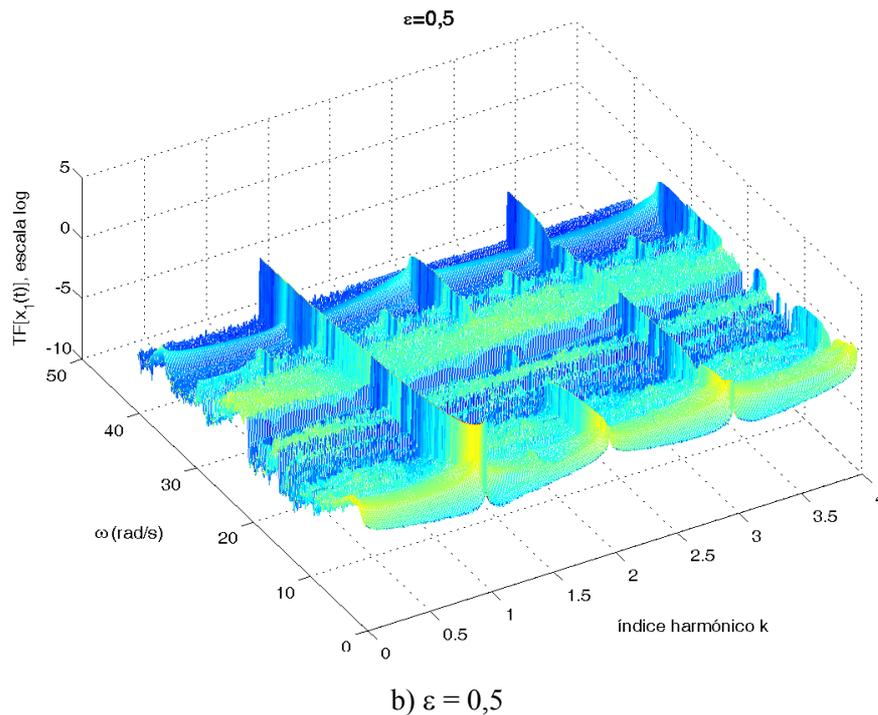


Figura 3.9 – Gráficos da transformada de Fourier do deslocamento de saída $x_1(t)$, $TF\{x_1(t)\}$, sobre 100 ciclos, em função da frequência de excitação $1,0 < \omega < 40,5$ rad/s e com um índice harmônico compreendido entre $0 < k < 4$ para $F = 50$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m e para: a) $\varepsilon = 0,2$; b) $\varepsilon = 0,5$ e c) $\varepsilon = 0,8$.

- Entre os dois casos anteriores (*i.e.*, entre as “zonas macias” e as “zonas rugosas”) assiste-se a uma duplicação periódica típica dos fenómenos de bifurcação verificados em sistemas caóticos.

3.3.3 Predição de Ciclos Limite

Nesta subsecção aplica-se a metodologia da FD a um dos tipos mais comuns de controlo, nomeadamente o algoritmo PID. Para esse propósito, considera-se o sistema de controlo realimentado da Figura 3.10, onde $C(j\omega)$ designa a função de transferência do controlador e $N(F, \omega)$ a FD do sistema de duas massas sujeito a folga e impactos.

A resposta em frequência do controlador PID, $C(j\omega)$, é dada por:

$$C(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{E(j\omega)} = K_p + j\left(\omega K_d - \frac{K_i}{\omega}\right) \quad (3.14)$$

onde $F(j\omega)$ e $E(j\omega)$ denotam respectivamente as transformadas dos sinais de controlo $f(t)$ e do erro $e(t)$. Os parâmetros K_p , K_d , e K_i são correspondentemente os ganhos proporcional, diferencial e integral do algoritmo PID.

A partir dos gráficos de Nyquist das Figuras 3.6 e 3.7 verifica-se que a intersecção entre as curvas $-1/N(F, \omega)$ e $C(j\omega)$ ocorre no primeiro quadrante, tornando, deste modo, o sistema propenso a geração de ciclos limite sob o controlo de um algoritmo PID. Para isso, utiliza-se um controlador PD (coloca-se $K_i = 0$ na equação (3.14)) no sistema realimentado com folga dinâmica, conforme representado na Figura 3.10.

Existem inúmeras possibilidades de sintonizar os parâmetros (K_p, K_d) do controlador PD de forma a obter uma oscilação na saída do sistema. Por exemplo, para $M_1 = M_2 = 1$ kg, $\varepsilon = 0,5$, obtém-se um ciclo limite com $K_p = 500$, $K_d = 10$ para uma amplitude de $F = 27,5$ N e uma frequência aproximada de $\omega = 18,5$ rad/s.

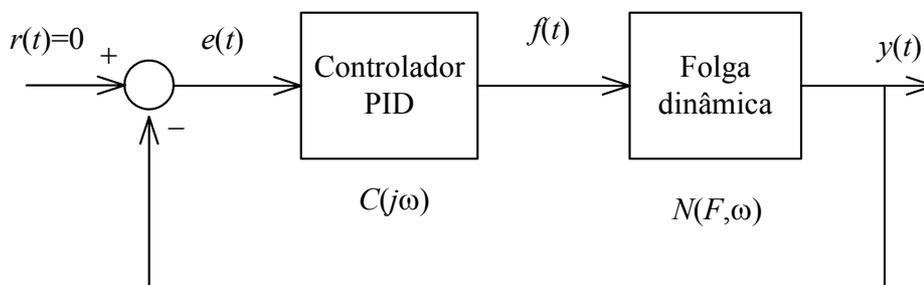


Figura 3.10 – Sistema de controlo realimentado com algoritmo PID e sistema de duas massas sujeito a folga e impactos (a entrada de referência é zero, $r(t) = 0$).

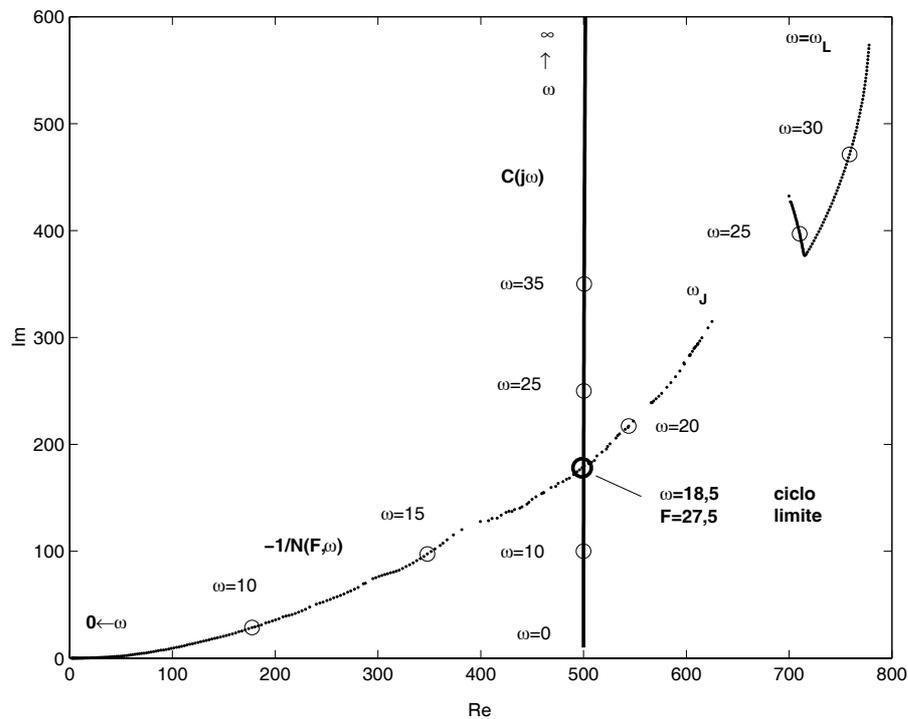


Figura 3.11 – Traçado de Nyquist de $-1/N(F, \omega)$ com $F = 27,5$ N, $M_1 = M_2 = 1$ kg, $h = 10^{-1}$ m, $\varepsilon = 0,5$ e $C(j\omega)$ para o sistema com folga dinâmica.

A Figura 3.11 ilustra o traçado de Nyquist de $-1/N(F, \omega)$ e de $C(j\omega)$ para a situação atrás referida. Os círculos marcam as frequências em ambas as curvas. A intersecção (círculo a negrito) ocorre quando se verifica a mesma frequência nos dois gráficos. A sua existência revela um ciclo limite com uma previsão da amplitude e da frequência com uma boa precisão. Este facto pode ser confirmado observando a Figura 3.12, onde se mostra a resposta nos tempos da força de excitação $f(t)$ e do deslocamento de saída $y(t) = x_1(t)$ da folga dinâmica para a situação de ciclo limite da Figura 3.11.

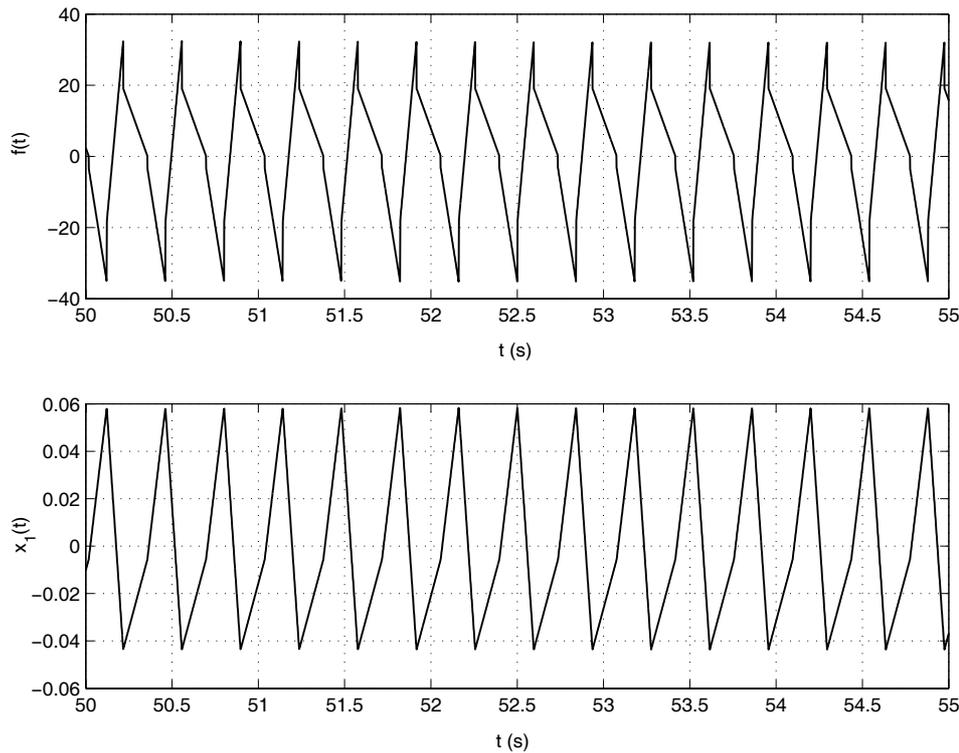


Figura 3.12 – Resposta nos tempos da força de excitação $f(t)$ e do deslocamento de saída $x_1(t)$ do sistema com folga dinâmica para a situação de ciclo limite da Figura 3.11.

Em conclusão, o método de análise da FD pode fornecer bons resultados mesmo para sistemas com características não lineares fortes, como é para o caso de sistemas com impactos. Portanto, pode-se utilizar a análise por FD com vantagens para um melhor entendimento das características dinâmicas e para o desenvolvimento de novas estratégias de controlo para este tipo de sistemas.

3.4 Oscilador de Van der Pol

O oscilador de Van der Pol (VPO²) foi utilizado por Van der Pol nos anos 20 para estudar as oscilações em circuitos com válvulas electrónicas (*e.g.*, faziam parte dos primeiros rádios). Na sua forma tradicional, o VPO é caracterizado por uma equação diferencial não linear de segunda ordem:

$$\ddot{y} + \beta(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 \quad (3.15)$$

² Van der Pol Oscillator

onde β denota o parâmetro de controlo, e \dot{y} e \ddot{y} são respectivamente a primeira e a segunda derivada em relação ao tempo t . A equação (3.15) pode ser implementada através de um circuito RLC com uma resistência não linear.

A correspondente formulação no espaço de estados de (3.15) é dada por ($y = y_1$, $\dot{y} = y_2$):

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 - \beta(y_1^2 - 1)y_2\end{aligned}\tag{3.16}$$

Como se vê, trata-se de um exemplo de um sistema, com um amortecimento não linear, que possui tipicamente ciclos limite (*i.e.*, é um atrator periódico). Os ciclos limite representam um fenómeno importante nos sistemas não lineares e são, frequentemente, encontrados nas mais diversas áreas da engenharia e da natureza. O parâmetro β reflecte o comportamento não linear do sistema, sendo que:

- Para $\beta = 0$, o sistema (3.16) é reduzido a um simples oscilador harmónico;
- Para valores positivos do parâmetro $\beta > 0$, o VPO (3.16) exhibe um ciclo limite estável;
- À medida que β aumenta o sistema (3.16) torna-se cada vez mais não linear.

A Figura 3.13 ilustra o plano de fase (y_1, y_2) do sistema VPO para vários valores do parâmetro de controlo $0 \leq \beta \leq 10$. Verifica-se que para valores pequenos do parâmetro de controlo ($\beta \rightarrow 0$), o plano de fase assemelha-se (embora qualitativamente diferente) ao do oscilador harmónico (Figura 3.13b)), enquanto que para valores crescentes de β as oscilações são claramente não sinusoidais (Figura 3.13a)). Pode-se também observar que as oscilações mantêm uma amplitude constante de valor igual a 2, independentemente do valor de β . No entanto, o período da oscilação aumenta à medida que β também aumenta.

A Figura 3.14 ilustra as respostas temporais do sinal de saída $y(t)$ (para $500 \leq t \leq 560$ s) e os correspondentes espectros de frequência do sistema VPO para os valores do parâmetro $\beta = \{0, 2; 1, 5; 10\}$. Os gráficos mostram as amplitudes do espectro de frequências (devidamente normalizadas) para $0 \leq \omega \leq 20$ rad/s ($\omega = 2\pi f$). As conclusões são similares às observadas através do plano de fase. Note-se a existência de múltiplos picos no espectro de frequências e que o seu número aumenta com β , indicando que o sistema se torna progressivamente mais fortemente não linear. Os diagramas temporais também mostram

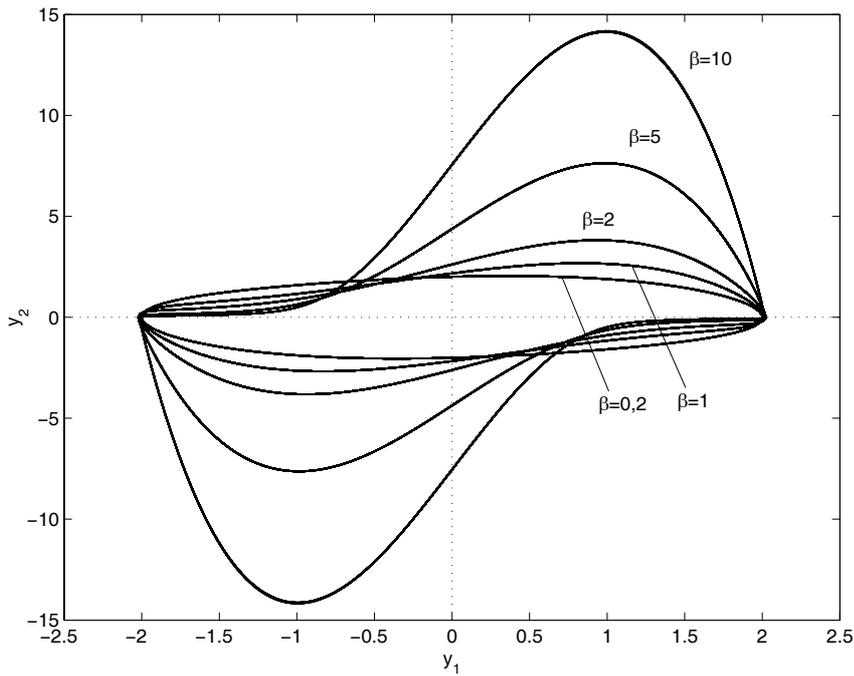
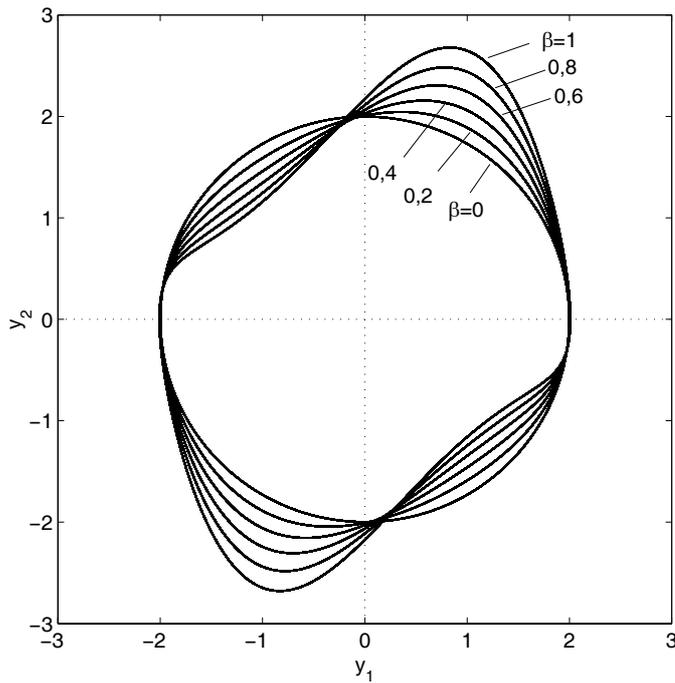
a) $\beta = \{0, 2; 1; 2; 5; 10\}$ b) $\beta = \{0; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8; 1\}$

Figura 3.13 – Plano de fase (y_1, y_2) do oscilador de Van der Pol para: a) $\beta = \{0, 2; 1; 2; 5; 10\}$ e b) $\beta = \{0; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8; 1\}$. De notar que as escalas dos eixos diferem para os diferentes valores de β .

claramente a influência do parâmetro β no sistema VPO. Na secção seguinte 3.5 fornece-se uma análise mais detalhada das principais características deste sistema, assim como algumas

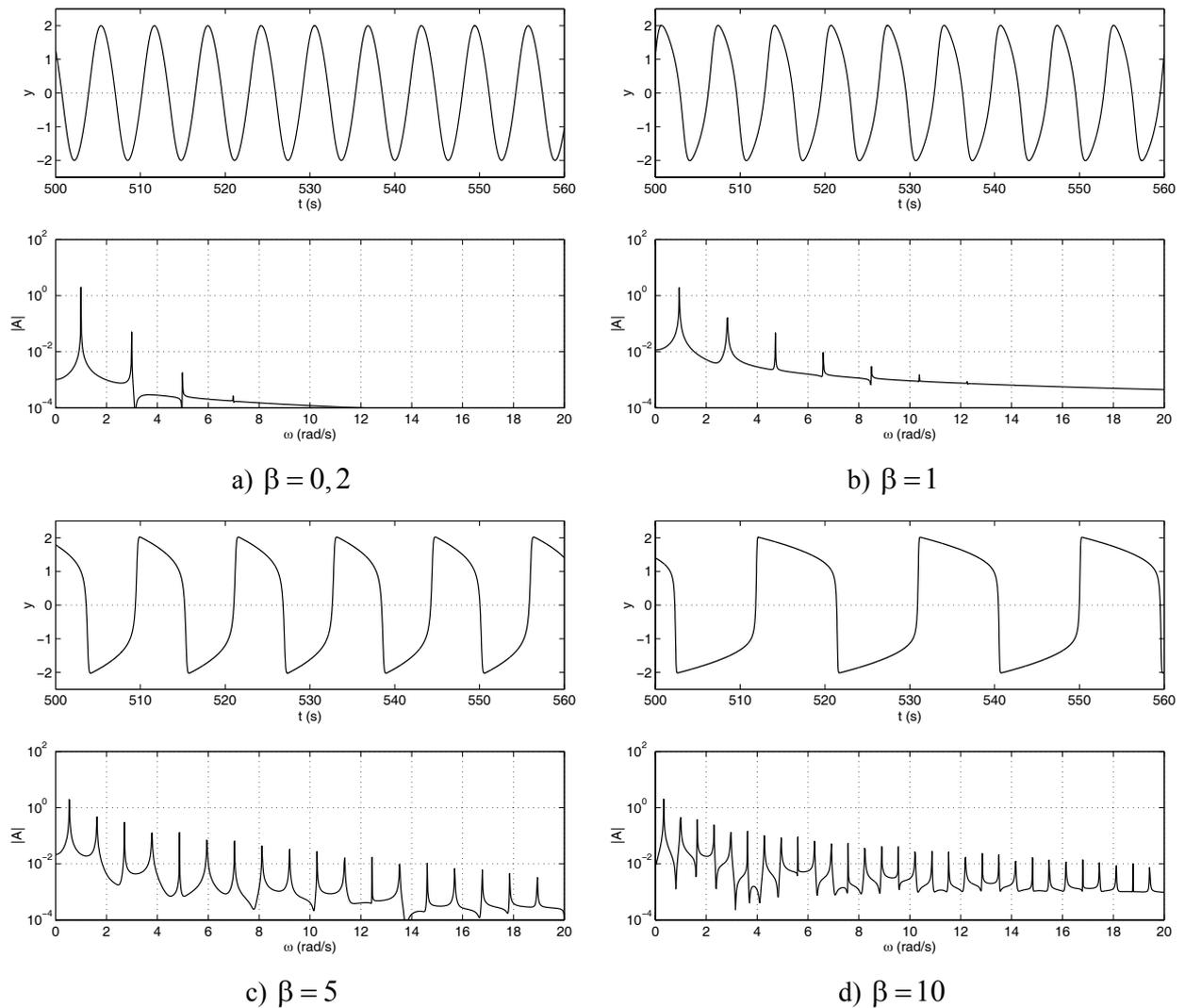


Figura 3.14– Oscilação de saída $y(t)$ e correspondente amplitude do espectro de frequências do sistema VPO para: a) $\beta = 0,2$, b) $\beta = 1$, c) $\beta = 5$ e d) $\beta = 10$.

das técnicas usadas para a obtenção dos gráficos (dos tempos e das frequências) aqui ilustrados. Por agora, convém referir que o breve estudo efectuado nesta secção serve como introdução ao oscilador de Van der Pol fraccionário proposto na secção 3.5.

3.4.1 Análise por Função Descritiva

Nesta subsecção o oscilador de Van der Pol é analisado através do método da função descritiva. Assim, determina-se se o sistema exhibe (ou não) um ciclo limite estável e, neste caso, calcula-se a sua amplitude e frequência de oscilação.

Considere-se de novo a equação de Van der Pol:

$$\ddot{y} + \beta(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 \quad (3.17)$$

Para se poder representar a expressão anterior através de um diagrama de blocos adequado – isolando o elemento não linear – a equação (3.17) pode ser rearranjada como:

$$\begin{aligned} \ddot{y} - \beta\dot{y} + y &= -\beta y^2 \dot{y} \\ \ddot{y} - \beta\dot{y} + y &= -\beta \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} y^3 \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação (3.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} (s^2 - \beta s + 1)y &= \beta s \left(-\frac{1}{3} y^3 \right) \\ \frac{y}{u} &= \frac{\beta s}{s^2 - \beta s + 1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

A função (3.19) pode ser representada através de um sistema em malha fechada, onde:

$$G(s) = \frac{\beta s}{s^2 - \beta s + 1} \quad (3.20)$$

e a não linearidade é dada por:

$$f(u) = \frac{1}{3} u^3 \quad (3.21)$$

com a entrada de referência igual a zero (de modo que $u = -y$), conforme está ilustrado na Figura 3.15.

Sendo a função descritiva da não linearidade cúbica, u^3 , dada por $3A^2/4$ (Slotine e Li, 1991), tem-se que para a função $f(u)$:

$$N(A) = \frac{A^2}{4} \quad (3.22)$$

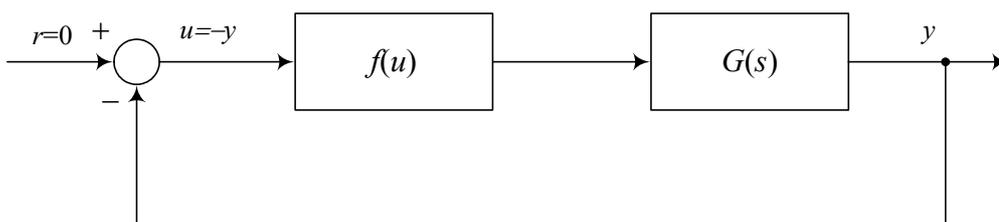


Figura 3.15 – Representação em malha fechada da equação de Van der Pol.

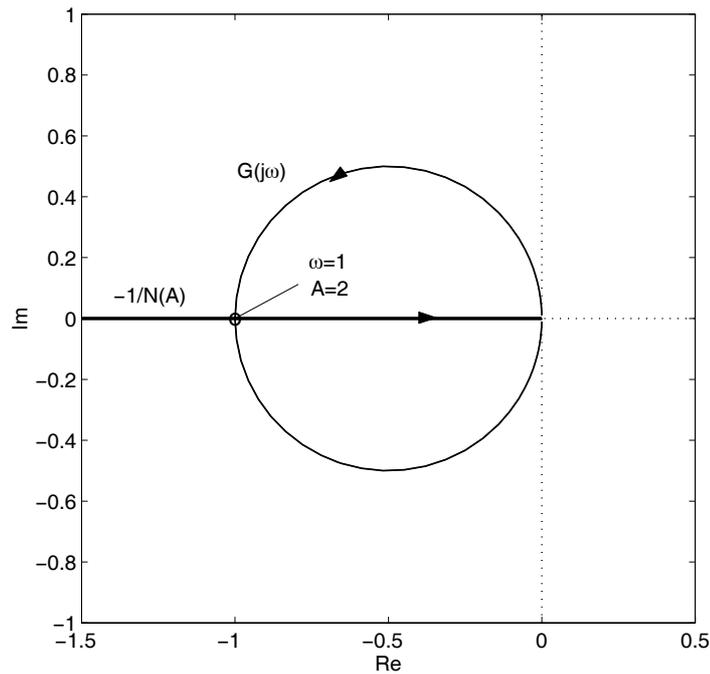


Figura 3.16 – Traçado de Nyquist de $G(j\omega)$ e de $-1/N(A)$ para o oscilador de Van der Pol.

Deste modo, a partir do sistema da Figura 3.15 retira-se a equação característica $1 + N(A)G(j\omega) = 0$. Portanto, para a predição do ciclo limite, há que resolver a seguinte equação:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \quad (3.23)$$

ou seja:

$$\frac{\beta j\omega}{-\omega^2 - \beta j\omega + 1} = -\frac{4}{A^2} \quad (3.24)$$

o que após simples manipulações fornece:

$$4(\omega^2 - 1) + j(4 - A^2)\beta\omega = 0 \quad (3.25)$$

Resolvendo a equação (3.25) obtém-se uma frequência ω e uma amplitude A aproximadas para o ciclo limite de $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ($T = 2\pi$), $A = 2$.

A Figura 3.16 mostra a representação gráfica da equação (3.23), nomeadamente das curvas $-1/N(A)$ e de $G(j\omega)$. A intersecção das duas curvas indica a existência de um ciclo limite estável com uma amplitude constante de $A = 2$. De fazer notar que, nem a amplitude A , nem a frequência ω , obtidas através da equação (3.25), dependem do parâmetro de controlo β do sistema VPO (3.17). Isto sugere que se obtém um ciclo limite estável desta

amplitude e frequência para qualquer valor de $\beta > 0$, o que não é totalmente verdadeiro, como a seguir se demonstra.

Embora a equação de Van der Pol não possa ser resolvida analiticamente, é possível, no entanto, obter expressões assintóticas exactas para os parâmetros do ciclo limite nos casos extremos quando $\beta \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow \infty$. Assim, para valores pequenos do parâmetro $\beta \rightarrow 0$, a equação (3.17) transforma-se num oscilador harmónico simples com uma velocidade angular de $\omega = 1$ rad/s ($T = 2\pi$), coincidindo com a previsão do método da função descritiva. Todavia, para valores elevados do parâmetro $\beta \rightarrow \infty$, o período deixa de tomar o valor fixo de $T = 2\pi$, e torna-se dependente do parâmetro β , isto é, tem-se $T = f(\beta)$. Neste caso, o método da função descritiva deixa de ser válido. A Figura 3.17 ilustra a variação do período de oscilação T em função de $0 \leq \beta \leq 10$, em que o comportamento do VPO atrás referido pode ser verificado. De facto, a razão do método da FD falhar pode ser explicado através da resposta em frequência do elemento linear $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \left[-1 + \frac{j}{\beta} \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \right]^{-1} \quad (3.26)$$

Analisando a expressão (3.26) verifica-se que à medida que β aumenta mais alargada se torna a faixa de frequências ω para as quais $G(j\omega) \approx -1$. Isto significa que, no limite $\beta \rightarrow \infty$,

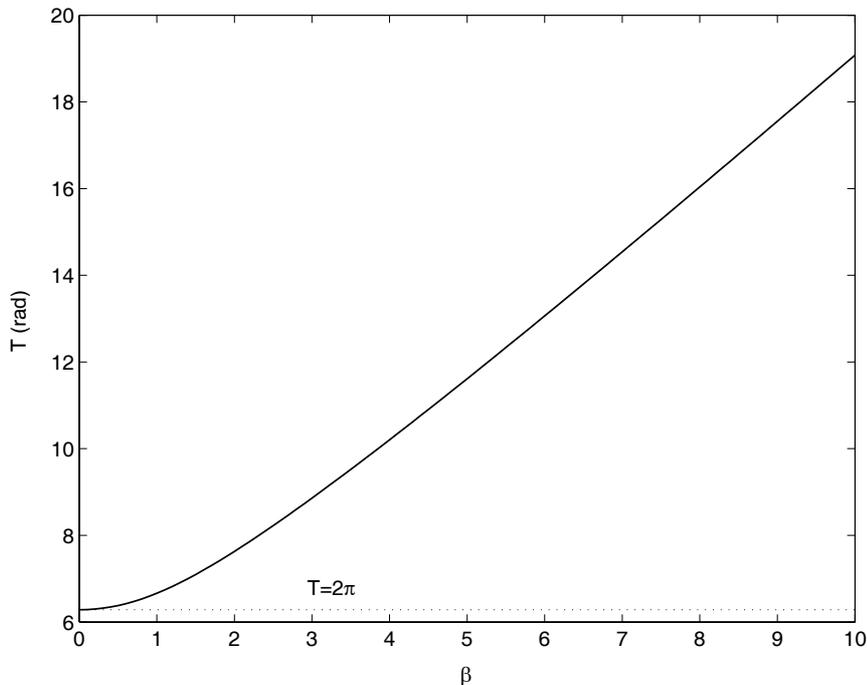


Figura 3.17 – Variação do período T em função de β do oscilador de Van der Pol. Para $\beta = 0$, o período $T = 2\pi$ (*i.e.*, oscilador harmónico). À medida que $\beta \rightarrow \infty$ observa-se que o período $T \rightarrow \infty$.

obtem-se um filtro “passa-tudo” e, portanto, o conteúdo harmónico do ciclo limite é tal que a resposta predominante não é simplesmente sinusoidal e, conseqüentemente, a aproximação pela função descritiva deixa de ser válida.

3.5 Oscilador de Van der Pol Fraccionário

Nesta secção propõe-se uma nova versão do VPO clássico através da introdução de uma derivada fraccionária de ordem α nas equações do espaço de estados (3.16) (Barbosa, *et al.*, 2004b), o qual é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1^\alpha}{dt^\alpha} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 - \beta(y_1^2 - 1)y_2\end{aligned}\tag{3.27}$$

Neste estudo considera-se que $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$. A mesma abordagem foi adoptada para os sistemas de Duffing (Arena, *et al.*, 1997, 2000) e de Chua (Hartley, *et al.*, 1995). De notar que o oscilador de Van der Pol fraccionário (FrVPO³) resultante reduz-se ao clássico VPO quando $\alpha = 1$. Da mesma forma, a ordem total do sistema passa do valor inteiro 2 (caso do VPO) para o valor fraccionário $\alpha + 1 < 2$ (caso do FrVPO).

A seguir analisa-se o sistema FrVPO para diferentes valores da ordem α da derivada fraccionária das equações de estado (3.27). Demonstra-se que a ordem α possui uma influência significativa sobre a dinâmica do sistema.

3.5.1 Esquema de Simulação

O sistema do FrVPO, definido pelas equações (3.27), pode ser representado em diagrama de blocos, isolando o integrador fraccionário, conforme se ilustra na Figura 3.18. Mais uma vez, nota-se que, para $\alpha = 1$, obtém-se o VPO clássico, tanto para o caso da formulação no espaço de estados (3.27) como para a representação em diagrama de blocos da Figura 3.18.

Como se pode observar pela Figura 3.18, o sistema do FrVPO pode ser implementado através de um integrador inteiro $1/s$, um integrador fraccionário $1/s^\alpha$ de ordem $0 < \alpha < 1$, e de um bloco $\beta f(y_1, y_2) = \beta(y_1^2 - 1)y_2$ que modela a não linearidade do sistema.

³ Fractional Van der Pol Oscillator

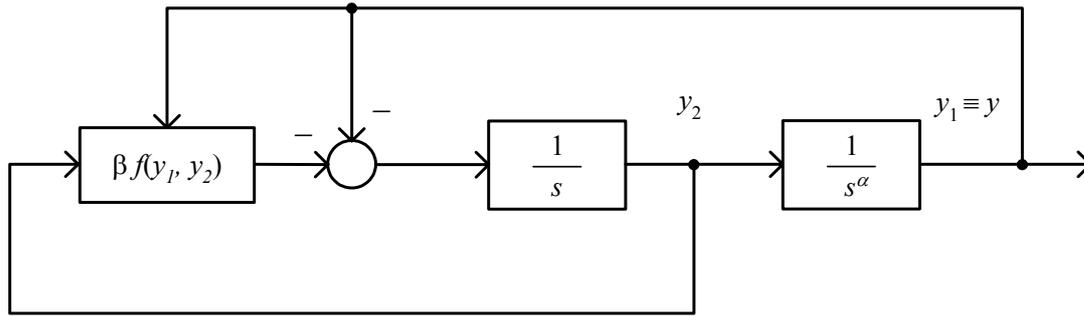


Figura 3.18– Diagrama de blocos do FrVPO não forçado. Para $\alpha = 1$ obtém-se o clássico VPO.

Neste diagrama, o elemento novo introduzido consiste no integrador fraccionário $1/s^\alpha$, e possui uma função de transferência irracional na variável s . Como já foi referido no capítulo 2, as definições habituais de integral e de derivada fraccionárias não permitem uma utilização directa deste tipo de operadores na simulação dos tempos de sistemas complexos com elementos fraccionários. Na realidade, estes sistemas são caracterizados por possuírem uma memória infinita que impossibilita a sua simulação para valores elevados do tempo (Podlubny, 1999b). Normalmente, este problema pode ser ultrapassado com a realização de aproximações inteiras que simulam (até uma precisão predefinida) os operadores fraccionários. Nos estudos efectuados por (Machado, 1997; Vinagre, *et al.*, 2000; Machado, 2001; Hwang, *et al.*, 2002) podem ser encontradas várias técnicas para a obtenção de aproximações inteiras, tanto contínuas como discretas, de operadores fraccionários.

3.5.2 Aproximações Inteiras ao Integrador Fraccionário

Considerando o exposto na subsecção anterior, para se analisar de forma efectiva o sistema fraccionário da Figura 3.18, é necessário desenvolver aproximações para o integrador fraccionário $1/s^\alpha$. Para esse efeito, optou-se por obter funções racionais (na variável s), adoptando o método de aproximação nas frequências descrito por Charef, *et al.* (1992), vulgarmente designado como “método da função de singularidade”. A seguir, descreve-se de forma sumária a obtenção de aproximações contínuas através desse método.

O método da função de singularidade baseia-se na função de transferência de um pólo simples de multiplicidade α , ou seja, por uma função $H(s)$ do tipo:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \quad (3.28)$$

a qual caracteriza um sistema fractal simples (Charef, *et al.*, 1992). Vários sistemas são modelados através de uma função do tipo (3.28) como, por exemplo, as linhas de transmissão, o ritmo cardíaco, o ruído eléctrico, entre muitas outras. O valor $1/p_T$ designa a constante de tempo de relaxação e considera-se que $0 < \alpha < 1$. O diagrama de Bode da amplitude possui um declive constante de $-\alpha 20$ dB/dec para $\omega \gg p_T$. Assim, a ideia base consiste em aproximar esse declive através de uma sucessão alternada de zeros e de pólos com declives inteiros de respectivamente 0 dB/dec e de -20 dB/dec, sobre o intervalo de frequências pretendido, obtendo, deste modo, a aproximação inteira:

$$\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.29)$$

em que os parâmetros p_i , z_i e N são seleccionados de acordo com a ordem α e a largura de faixa de frequências da aproximação desejadas.

Assim, uma vez especificada a ordem α , o pólo fraccionário $1/p_T$ e a máxima discrepância Δ (em dB) entre as assíntotas ideais e as aproximadas das curvas da amplitude dos diagramas de Bode, obtêm-se os parâmetros (p_i, z_i, N) da aproximação da seguinte forma:

- i) O primeiro pólo p_0 é colocado em:

$$p_0 = p_T 10^{(\Delta/20\alpha)} \quad (3.30)$$

- ii) Definem-se as variáveis:

$$a = 10^{\lceil \Delta/10(1-\alpha) \rceil}, \quad b = 10^{(\Delta/10\alpha)}, \quad ab = 10^{\lceil \Delta/10\alpha(1-\alpha) \rceil} \quad (3.31)$$

- iii) Os restantes pólos p_i e zeros z_i são calculados a partir do primeiro pólo p_0 e das expressões (3.31) usando as seguintes relações:

$$p_i = (ab)^i p_0, \quad z_i = (ab)^i a p_0 \quad (3.32)$$

O número de pólos N é determinado a partir da máxima largura de banda de frequências (ω_{\max}) da aproximação. Deste modo, considerando que $p_{N-1} < \omega_{\max} < p_N$, obtém-se:

$$N = \text{Inteiro} \left(\frac{\log \left(\frac{\omega_{\max}}{p_0} \right)}{\log(ab)} \right) + 1 \quad (3.33)$$

Na análise aqui apresentada utilizam-se aproximações do tipo (3.29) ao integrador fraccionário $1/s^\alpha$, com $\alpha \in]0; 1]$. A Tabela 3.1 fornece uma lista de aproximações inteiras a $1/s^\alpha$ para $\alpha = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$. Estas aproximações são obtidas usando o método descrito nesta subsecção com os parâmetros $p_T = 0,01$ e $\omega_{\max} = 100$ rad/s, para uma discrepância máxima de $\Delta = 2$ dB.

Tabela 3.1: Lista de aproximações inteiras para o integrador fraccionário $1/s^\alpha$, com uma discrepância máxima de $\Delta = 2$ dB.

Ordem α	Aproximação, $H(s)$
0,1	$\frac{1655,4724(s+0,1668)(s+27,83)}{(s+0,1)(s+16,68)(s+2783)}$
0,2	$\frac{81,3137(s+0,05623)(s+1)(s+17,78)}{(s+0,03162)(s+0,5623)(s+10)(s+177,8)}$
0,3	$\frac{39,3975(s+0,0416)(s+0,3728)(s+3,34)(s+29,94)}{(s+0,02154)(s+0,1931)(s+1,73)(s+15,51)(s+138,9)}$
0,4	$\frac{35,2504(s+0,03831)(s+0,261)(s+1,778)(s+12,12)(s+82,54)}{(s+0,01778)(s+0,1212)(s+0,8254)(s+5,623)(s+38,31)(s+261)}$
0,5	$\frac{15,8492(s+0,03981)(s+0,2512)(s+1,585)(s+10)(s+63,1)}{(s+0,01585)(s+0,1)(s+0,631)(s+3,981)(s+25,12)(s+158,5)}$
0,6	$\frac{10,728(s+0,04642)(s+0,3162)(s+2,154)(s+14,68)(s+100)}{(s+0,01468)(s+0,1)(s+0,6813)(s+4,642)(s+31,62)(s+215,4)}$
0,7	$\frac{9,2641(s+0,06449)(s+0,578)(s+5,179)(s+46,42)(s+416)}{(s+0,01389)(s+0,1245)(s+1,116)(s+10)(s+89,62)(s+803,1)}$

0,8	$\frac{5,4243(s+0,1334)(s+2,371)(s+42,17)(s+749,9)}{(s+0,01334)(s+0,2371)(s+4,217)(s+74,99)(s+1334)}$
0,9	$\frac{2,4258(s+1,292)(s+215,4)}{(s+0,01292)(s+2,154)(s+359,4)}$

3.5.3 Apresentação dos Resultados Obtidos

Nesta subsecção estudam-se os efeitos da dinâmica fraccionária no modelo FrVPO proposto, tanto no domínio das frequências como no domínio dos tempos. Verifica-se que as duas perspectivas são essenciais para uma caracterização completa do sistema.

Para a simulação do sistema FrVPO da Figura 3.18 utilizou-se a aplicação de *software* do MATLAB/SIMULINK⁴. Usou-se um intervalo de tempo de simulação de $t_s = 1000$ s, com um passo de $h = 0,01$ s, adoptando um esquema de integração do tipo Runge-Kutta. As condições iniciais do sistema são colocadas em $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = 1,0$.

A Figura 3.19 mostra o gráfico do plano de fase (y_1, y_2) do FrVPO para várias ordens fraccionárias de $\alpha = \{0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0\}$ e considerando um valor fixo do parâmetro de controlo de $\beta = 1$. Alternativamente, a Figura 3.20 mostra o plano de fase para $\beta = \{0,5; 1; 2; 4; 8; 16\}$ e um valor fixo da ordem de $\alpha = 0,8$. Em ambos os casos, verificam-se variações significativas na geração dos ciclos limite. Este facto revela que a derivada fraccionária de ordem α tem um impacto significativo sobre a dinâmica do sistema, nomeadamente na sua amplitude e no período da oscilação de saída. Por outro lado, e como esperado, quanto maior for o valor de β mais não linear se torna o sistema.

As Figuras 3.21 e 3.22 mostram, respectivamente, as evoluções do período T e da amplitude A da oscilação de saída para $0,3 \leq \alpha \leq 1$ e $\beta_{\min}(\alpha) \leq \beta \leq 1$, onde $\beta_{\min}(\alpha)$ representa o mínimo valor do parâmetro de controlo para o qual o sistema ainda oscila. Este limite depende da ordem fraccionária α , estando a sua evolução ilustrada na Figura 3.23 para $0,3 \leq \alpha \leq 1$. Mais uma vez, observa-se a existência de grandes variações no ciclo limite, em particular no período da oscilação de saída. De facto, o período T aumenta de forma acentuada

⁴ Marca registada da The MathWorks, Inc.

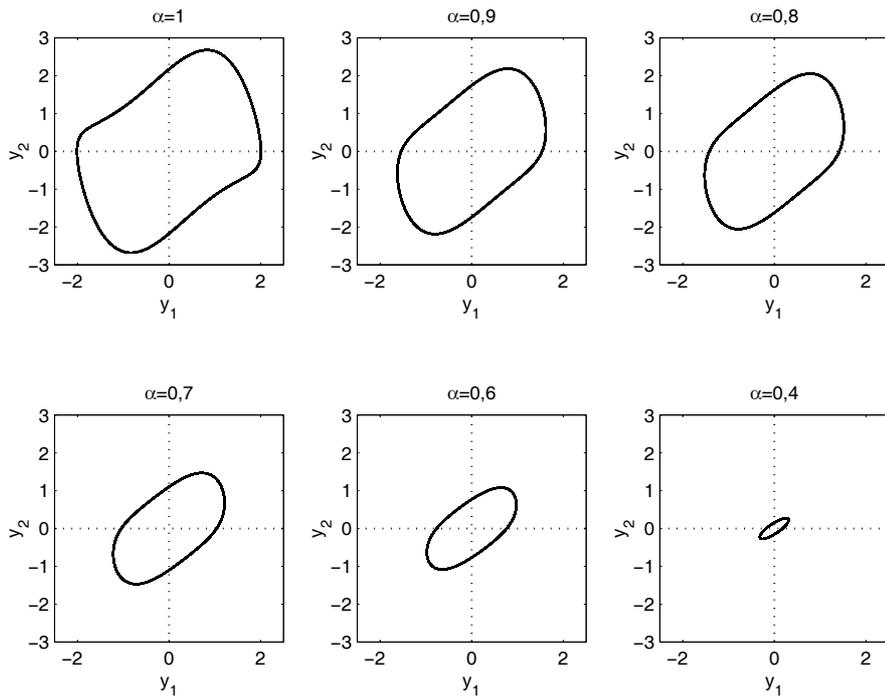


Figura 3.19 – Plano de fase (y_1, y_2) para o sistema FrVPO com ordem fraccionária de $\alpha = \{0, 4; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0\}$ e um parâmetro de controlo de $\beta = 1$.

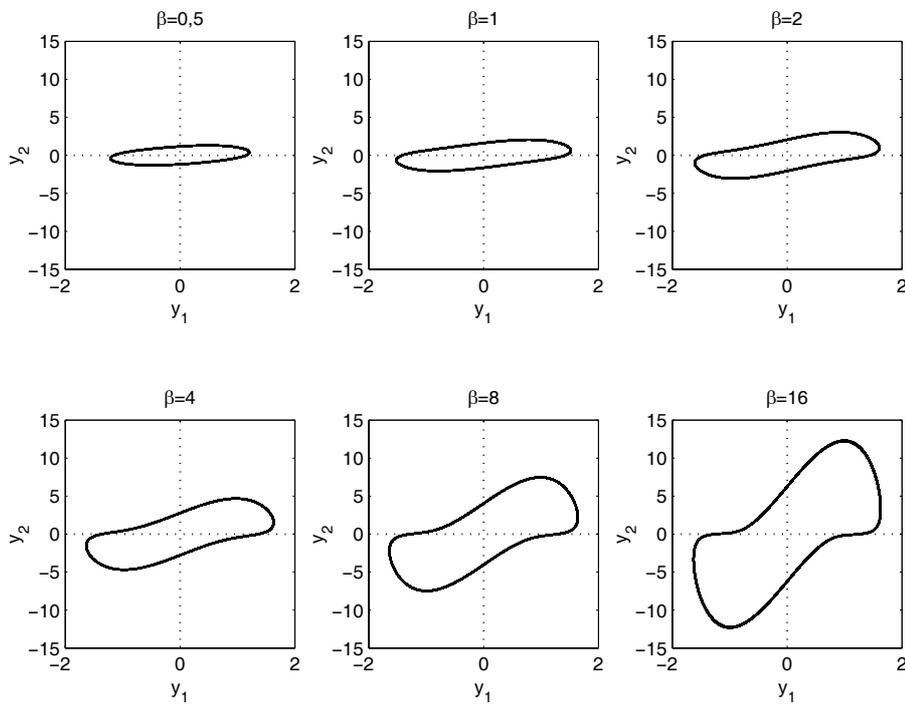


Figura 3.20 – Plano de fase (y_1, y_2) para o sistema FrVPO com ordem fraccionária de $\alpha = 0, 8$ e um parâmetro de controlo de $\beta = \{0, 5; 1; 2; 4; 8; 16\}$.

para valores de α pequenos e para valores de α próximos de $\alpha \approx 1$. A amplitude A também varia com α , sendo mais sensível para valores de α pequenos.

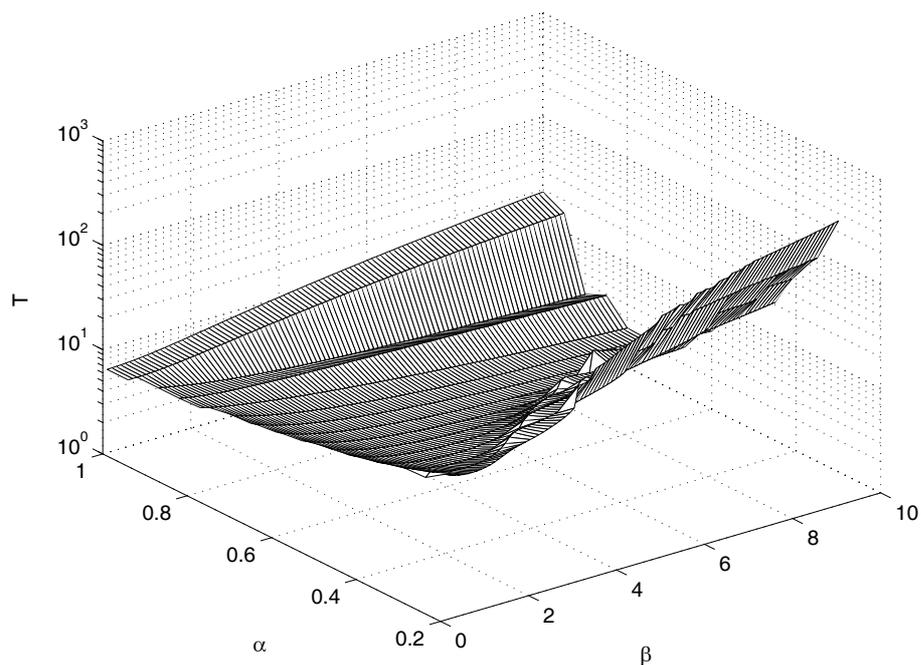


Figura 3.21 – Evolução do período T do ciclo limite para $\beta_{\min}(\alpha) \leq \beta \leq 1$ e $0,3 \leq \alpha \leq 1$.

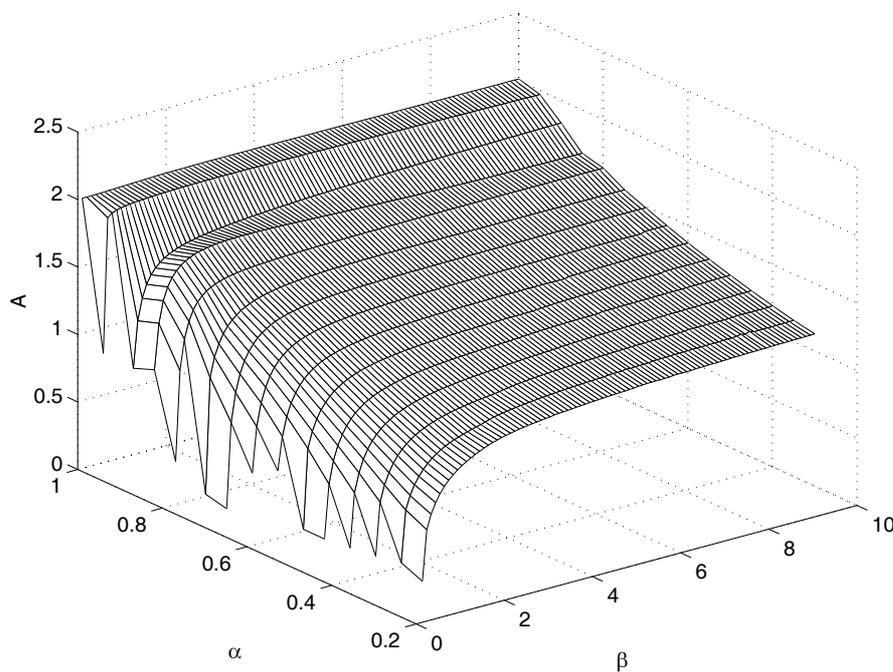


Figura 3.22 – Evolução da amplitude A do ciclo limite para $\beta_{\min}(\alpha) \leq \beta \leq 1$ e $0,3 \leq \alpha \leq 1$.

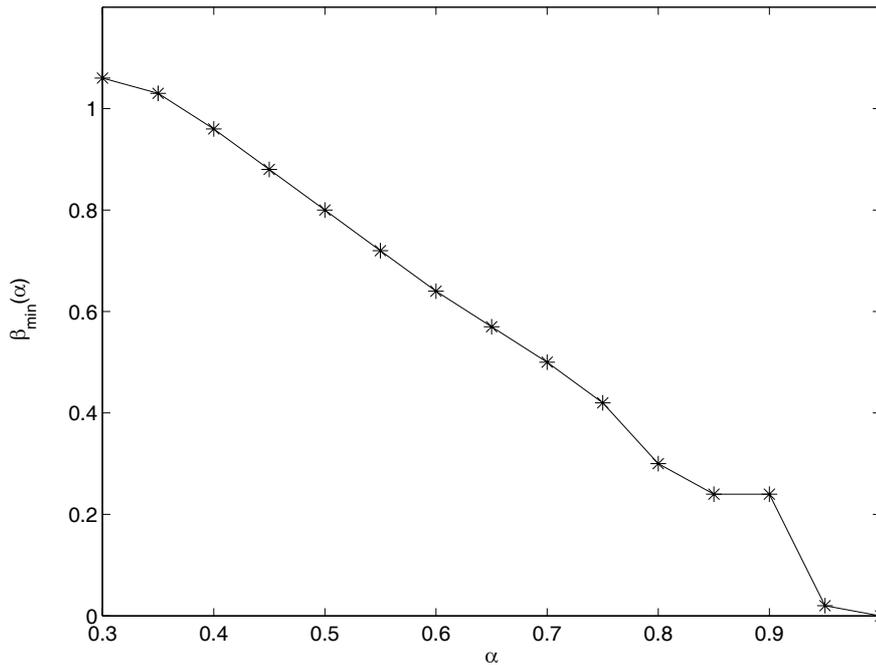


Figura 3.23 – Valor máximo do parâmetro de controlo em função de α , $\beta_{\min}(\alpha)$, para $0,3 \leq \alpha \leq 1$.

A Figura 3.24 ilustra as respostas temporais do sinal de saída $y(t)$ (para $500 \leq t \leq 530$ s) e os correspondentes espectros de frequência do sistema FrVPO, com as ordens fraccionárias de $\alpha = \{0,4; 0,6; 0,8; 1,0\}$ e para o parâmetro de controlo de $\beta = 1$.

Para o cálculo dos espectros de frequência utilizou-se a transformada de Fourier discreta (DFT⁵) implementada através do algoritmo de cálculo eficiente da FFT. Assim, considerando um conjunto de N pontos discretos do sinal de saída $y(t)$, isto é, $y(nh)$ para $n = 0, 1, \dots, N-1$, o espectro de frequências é dado para N pontos calculados a partir da fórmula da DFT, ou seja, é dada pela expressão:

$$c_k = c\left(\frac{k}{Nh}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(nh) e^{-i2\pi nk/N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.34)$$

Deste modo, obtém-se uma faixa de frequências de $f = 0, 1, \dots, (N-1)\Delta f$, com uma resolução de $\Delta f = 1/(Nh)$ Hz. Nas experiências a seguir apresentadas, calcula-se a FFT para $N = 2^{15}$ pontos, após a dissipação do efeito do transitório inicial do sinal de saída $y(t)$ até um tempo de simulação inicial de $T_0 \in [0; 100]$ s. Os gráficos mostram as amplitudes do espectro de frequências (devidamente normalizadas) para $0 \leq \omega \leq 20$ rad/s ($\omega = 2\pi f$).

⁵ Discrete Fourier Transform

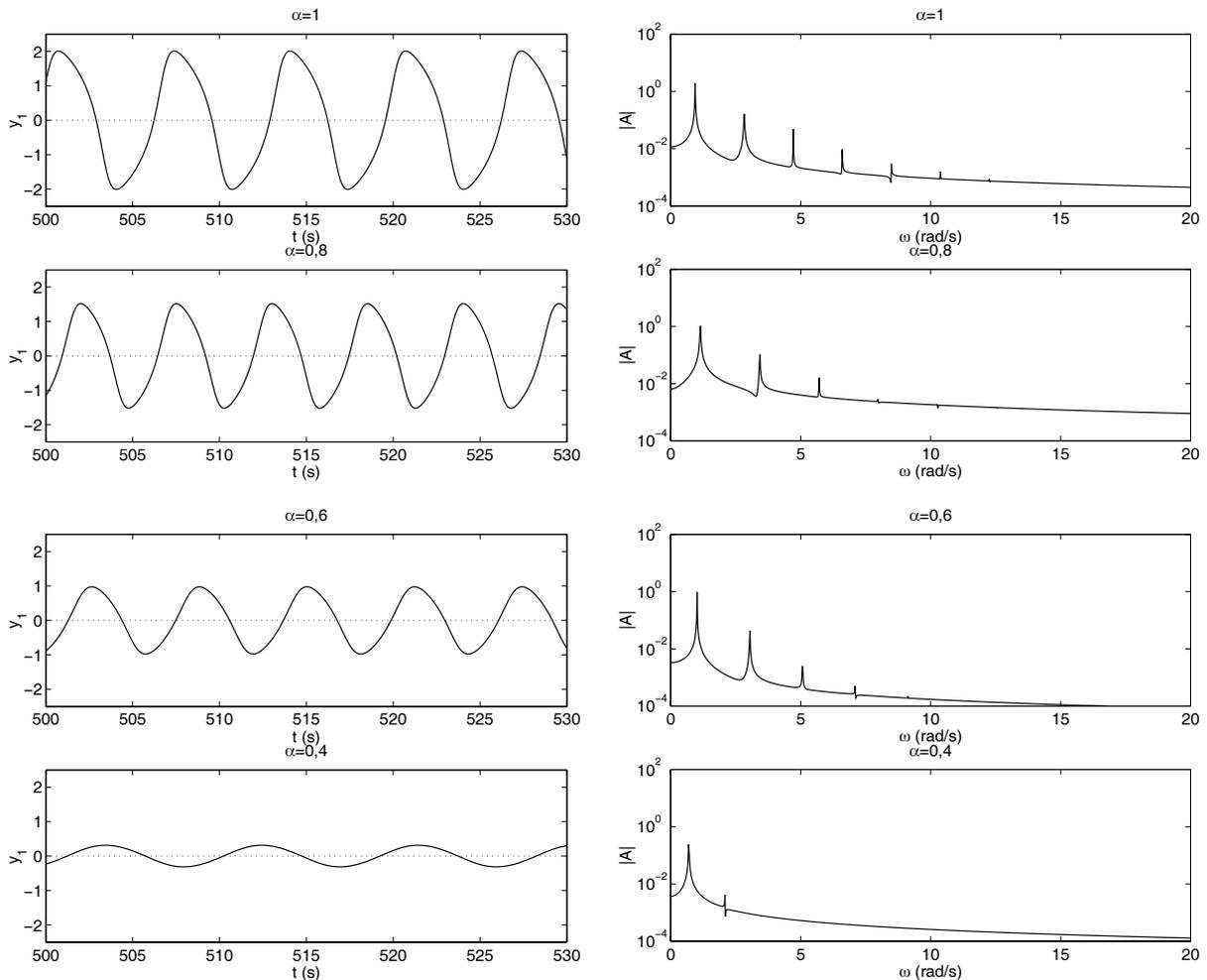


Figura 3.24 – Respostas nos tempos da saída $y(t)$ (esquerda) e espectro de frequências (direita) do sistema FrVPO, com $\alpha = \{0,4; 0,6; 0,8; 1,0\}$ e $\beta = 1$.

Observando as respostas temporais da Figura 3.24, verifica-se que tanto o período T como a amplitude A do ciclo limite variam de forma significativa com a ordem fraccionária α . De facto, nota-se que a amplitude diminui à medida que se reduz o valor de α até que, eventualmente, o sistema deixa de oscilar. O limite desta oscilação ocorre para a ordem $\alpha = 0,37$ com $\beta = 1$. Verificam-se também alterações no período da oscilação de saída.

Por outro lado, os gráficos das amplitudes dos espectros de frequências (de Fourier) indicam a existência de vários picos. A multiplicidade destes picos é uma característica típica dos sistemas não lineares, e são devidos à presença da não linearidade $\beta f(y_1, y_2)$ no sistema FrVPO. Constata-se também que os harmónicos de alta frequência são inteiros ímpares múltiplos da componente fundamental (*i.e.*, do primeiro pico que aparece nos espectros de Fourier). Por outras palavras, se Y_1 designa a amplitude do harmónico fundamental, então os harmónicos ímpares de ordem superior são dados por Y_k para $k = 3, 5, \dots$. Mais ainda,

verifica-se que tanto a multiplicidade como a amplitude desses picos variam com a ordem α , o que está em concordância com as respostas nos tempos ilustradas.

À primeira vista pode-se concluir que, variando a ordem α , é possível moldar o sinal de saída $y(t)$ de forma a assemelhar-se a uma onda quase sinusoidal (“pura”), mas isto não é totalmente correcto. A energia do sinal não está somente concentrada nos picos, mas distribuída ao longo de todo o domínio de frequências (Figura 3.24). Esta é uma propriedade característica dos sistemas caóticos, mostrando que o FrVPO apresenta *ciclos limite caóticos* (tal como no caso do VPO clássico (Mahmoud e Farghaly, 2004)). De facto, constata-se que o espectro das amplitudes possui um comportamento a longo termo do tipo $C(\alpha)\omega^{-1}$, indicando diferentes razões de decaimento em função de α .

Para evidenciar este facto, estabeleceu-se um critério η , que relaciona a potência concentrada nos harmónicos P_h (i.e., dos picos do espectro das amplitudes) com a potência total P_t do sinal de saída $y(t)$. Esta razão é dada por:

$$\eta = \frac{\text{Pot. dos harm.}}{\text{Pot. total}} \times 100\% = \frac{P_h}{P_t} \times 100\% \quad (3.35)$$

A relação entre as potências dos sinais nos domínios dos tempos e no domínio das frequências é estabelecida pelo *teorema de Parseval*, que afirma que ambos os domínios as potências devem ser iguais. Assim, para o sinal de saída (periódico) $y(t)$, com período T , a potência total P_t é dada pelas relações:

$$P_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [y(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \quad (3.36)$$

em que c_k representam os coeficientes da DFT, calculados através da expressão (3.34). Seleccionando um número finito de picos da amplitude p (i.e., $p \ll N$), a potência dos harmónicos P_h é então dada por:

$$P_h = \sum_{k=1}^p |c_k|^2 \quad (3.37)$$

onde os coeficientes c_k correspondem agora às frequências para as quais os picos de amplitude ocorrem. Neste caso, verifica-se a relação $P_h < P_t$ e, conseqüentemente, a razão η situa-se entre $0 < \eta < 100\%$.

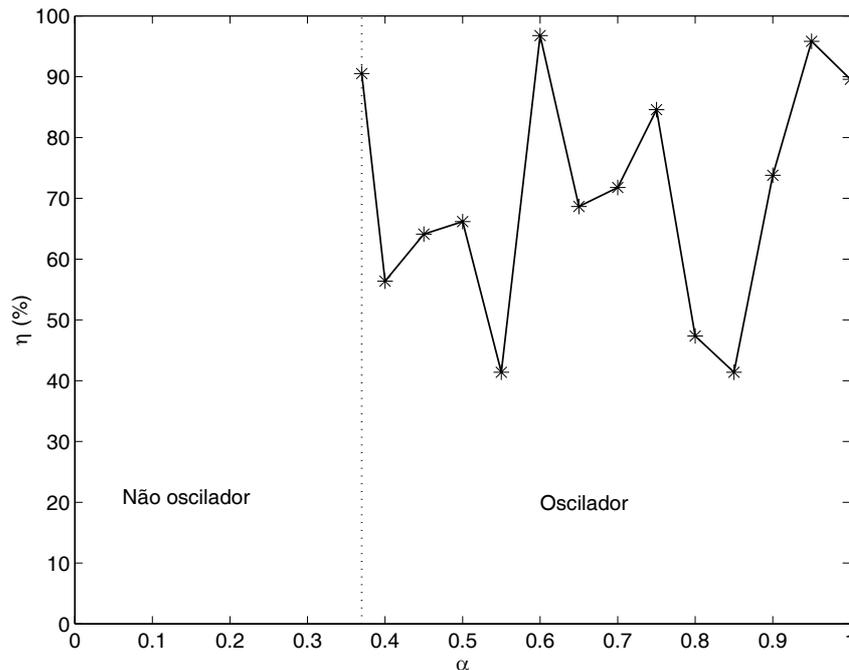


Figura 3.25 – Critério de potência em percentagem, $\eta(\%)$, para $0 < \alpha \leq 1$ e $\beta = 1$.

A Figura 3.25 mostra a evolução do critério $\eta(\%)$ para $0 < \alpha \leq 1$ e $\beta = 1$. A partir do gráfico, distinguem-se duas zonas: i) para $0 < \alpha < 0,37$, onde não existe oscilação e ii) para $0,37 \leq \alpha \leq 1$, em que se verifica a ocorrência de uma oscilação. Mais uma vez, constata-se que a energia do sinal está distribuída ao longo de todo o domínio de frequências, dependendo da ordem α . Contudo, para alguns valores de α (e.g., $\alpha = \{0,37; 0,6; 0,95; 1,0\}$), o índice $\eta \approx 100\%$, indicando que toda a energia do sistema se concentra nos harmónicos. Neste casos, verifica-se que o primeiro (fundamental) harmónico concentra a grande parte da energia do sinal.

Em conclusão, a introdução de uma derivada de ordem fraccionária na formulação de espaço de estados do VPO clássico revela algumas características interessantes que são mais “visíveis” no domínio das frequências. Aliás, para uma caracterização global do sistema, torna-se essencial a análise através das duas perspectivas (tempos e frequências). Mais ainda, com o sistema FrVPO obtêm-se diferentes regimes da saída (em contraste com VPO inteiro) que podem ser úteis para uma melhor compreensão e controlo deste tipo de sistemas.

3.6 Conclusões

Neste capítulo analisam-se dois tipos de sistemas não lineares numa perspectiva da aplicação da teoria do cálculo fraccionário. Na primeira parte aborda-se os sistemas de folga com impactos baseado na aplicação do método da função descritiva. Na segunda parte analisa-se o oscilador de Van der Pol aplicando uma derivada fraccionária na formulação de espaço de estados que descreve a sua dinâmica.

Na primeira parte analisam-se diversos aspectos relacionados com os fenómenos dinâmicos envolvidos em sistemas que apresentam folga e impactos através do método da função descritiva. Para isso, estuda-se um protótipo simples consistindo em duas massas que são sujeitas a folga e impactos (ou seja, folgas dinâmicas). As experiências realizadas mostram que os resultados obtidos podem diferir significativamente dos gerados através da adopção do clássico sistema da folga estática (*i.e.*, sem o fenómeno dos impactos incluído). Este facto sugere que se deve considerar os efeitos dos impactos na análise deste tipo de sistemas, tanto para a obtenção de um modelo mais preciso como para a realização de um controlo mais eficiente do sistema como um todo. Mais ainda, os resultados revelam que estes sistemas podem apresentar fenómenos complexos, tais como a duplicação periódica e mesmo o caos. É também interessante fazer notar que estas características podem ser parametrizadas através do gráficos da FD do sistema não linear.

O método da FD é aplicado para o caso de um sistema de controlo simples com um controlador PID. Mostra-se que a precisão da previsão dos ciclos limite, nomeadamente da amplitude e frequência da oscilação de saída, é muito aceitável. Este facto demonstra a aplicabilidade do método, mesmo na presença de características intrínsecas não lineares fortes que, doutro modo, seriam difíceis de analisar aplicando outras abordagens ao problema. Nesta perspectiva, a introdução de um controlador PID fraccionário (ver capítulo 2), o qual possui mais dois graus de liberdade que o PID clássico, pode levar a um melhor desempenho, mais concretamente, evitando a intersecção das curvas no plano de Nyquist e, deste modo, eliminando a oscilação que, normalmente, tenta-se evitar a sua ocorrência.

Os resultados obtidos incentivam a continuação do estudo de sistemas não lineares numa perspectiva similar à realizada neste texto e, conseqüentemente, também à análise da predição de ciclos limite. Os trabalhos podem levar ao desenvolvimento de algoritmos de controlo e esquemas de compensação capazes de melhorar o desempenho do sistema.

Na segunda parte propõe-se uma versão generalizada do VPO clássico através da introdução de uma derivada fraccionária de ordem α nas equações de estado que descrevem a sua dinâmica. O sistema FrVPO resultante apresenta características bastante diferentes das geradas pelo VPO clássico, que dependem da ordem α da derivada fraccionária. De facto, com o sistema FrVPO pode-se distinguir diversos comportamentos que vão desde os regimes de oscilador até um comportamento de não oscilador.

O grau de liberdade adicional introduzido pela ordem α possui uma influência significativa na dinâmica do sistema, a qual merece uma investigação mais aprofundada para clarificar as suas implicações. Podem-se estabelecer vários desenvolvimentos futuros para o estudo do sistema FrVPO aqui realizado, tais como analisar a influência da ordem α para um intervalo mais alargado do parâmetro de controlo β , tanto para o domínio das frequências como para o domínio dos tempos. Outra extensão do trabalho diz respeito à sua análise para valores da ordem fraccionária $\alpha > 1$. Mais ainda, a análise aqui apresentada pode ser estendida ao estudo do oscilador de Van der Pol forçado (fraccionário), o qual pode revelar resultados mais interessantes.

Capítulo 4

Aproximações Digitais de Operadores Fraccionários Através de Funções Racionais

NESTE capítulo é proposta uma nova abordagem para a obtenção de aproximações digitais na forma de funções racionais de integradores e diferenciadores de ordem fraccionária. Os métodos adoptados são baseados nas técnicas de modelação de sinais determinísticos. Demonstra-se que os algoritmos propostos fornecem bons resultados tanto no domínio dos tempos como no domínio das frequências. Mais ainda, as aproximações racionais obtidas são estáveis e de fase mínima e, portanto, adequadas para uma implementação digital. São apresentados vários exemplos ilustrativos que demonstram a eficácia das técnicas adoptadas e revelam que as aproximações racionais geradas possuem um desempenho idêntico ou superior face a outros métodos actualmente existentes.

Tomando estas ideias em consideração, o capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. A secção 4.1 faz uma introdução ao problema e a secção 4.2 apresenta os métodos de discretização (ou de conversão de $s \rightarrow z$) utilizados neste estudo. A secção 4.3 introduz o desenvolvimento de aproximações digitais racionais aos operadores fraccionários e, de seguida, a secção 4.4 deriva a resposta impulsional deste tipo de operadores. A secção 4.5 descreve de forma sucinta o problema da modelação de sinal e desenvolve vários métodos de obtenção de aproximações racionais através destas técnicas. A secção 4.6 propõe um novo

método que constitui uma alternativa eficiente às técnicas de modelação de sinais determinísticos, baseado no algoritmo de identificação de sistemas pelos mínimos quadrados. Verifica-se que este algoritmo gera as mesmas aproximações que o método de modelação de sinal de Prony, com a vantagem de se obter, num só passo, a função racional desejada. As técnicas desenvolvidas são aplicadas na secção 4.7 a um exemplo ilustrativo que revela o bom desempenho e a eficácia da abordagem pelos mínimos quadrados na obtenção de aproximações digitais racionais. Para se ilustrar de forma ainda mais clara as propriedades da nova abordagem, a secção 4.8 aplica as aproximações digitais no cálculo numérico de derivadas e integrais fraccionários de diversas funções temporais. Mais uma vez, se confirma o bom desempenho desta face a outro tipo de aproximações frequentemente usadas para o mesmo efeito. Por último, a secção 4.9 estabelece as principais conclusões.

4.1 Introdução

Os sistemas de ordem fraccionária são caracterizados por equações integro-diferenciais de ordem não inteira (ou fraccionária), isto é, são definidas através do operador fundamental ${}_a D_t^\alpha$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é a ordem da operação. No capítulo 2 são estabelecidas várias definições no domínio dos tempos para este operador fraccionário, de entre as quais se salientam as usuais definições de Riemann-Liouville (R) e de Grünwald-Letnikov (G), devido ao facto de, para uma grande classe de funções, as duas definições (R e G) serem equivalentes (ver capítulo 2). Contudo, para a análise e projecto de sistemas de controlo adopta-se normalmente o domínio s de Laplace. Deste modo, é de especial interesse usar a definição do operador ${}_a D_t^\alpha$ neste plano. Assim, a transformada de Laplace de D^α ($a=0$), para condições iniciais nulas, é dada através da expressão:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (4.1)$$

em que $F(s) = L\{f(t)\}$.

Pode-se referir vários sistemas em que o operador (4.1) é um elemento fundamental. Por exemplo, o controlador CRONE tem por base a derivada de ordem fraccionária s^α , onde α toma um valor real (Oustaloup, 1991). Na verdade, a extensão mais recente do CRONE admite valores complexos para a ordem fraccionária (Oustaloup, 2000). Um outro exemplo é o caso do controlador $PI^\lambda D^\mu$ (Podlubny, 1997), uma generalização do controlador PID

clássico, envolvendo um integrador fraccionário de ordem λ e um integrador fraccionário de ordem μ . A correspondente função de transferência do $PI^\lambda D^\mu$ é dada por $K(1 + 1/T_i s^{-\lambda} + T_d s^\mu)$, onde λ e μ são valores positivos reais; K é o ganho proporcional, T_i é a constante de tempo integral e T_d a constante de tempo diferencial. Para mais detalhes consultar o capítulo 2, onde é feita uma breve descrição destes dois tipos de sistemas.

Portanto, a principal questão envolvida na implementação digital do controlo de ordem fraccionária consiste no cálculo numérico ou na discretização do operador fraccionário s^α . Em geral, existem dois métodos de discretização: o método *directo* e o método *indirecto* (Vinagre, *et al.*, 2000, 2003; Chen e Moore, 2002). Na *discretização indirecta* é necessário, primeiro, fazer uma aproximação no domínio das frequências (variável s) e, depois, discretizar a função aproximada em s (Oustaloup, 2000). Os métodos existentes de *discretização directos* incluem a expansão em série de potências (PSE¹) ou a expansão em fracções contínuas (CFE²) dos equivalentes discretos dos operadores fraccionários. As aproximações por PSE são dadas através de funções polinomiais enquanto que as aproximações por CFE geram funções racionais (*i.e.*, como a razão de dois polinómios).

É um facto conhecido que, em geral, as funções racionais são superiores às funções polinomiais devido à sua aptidão para modelar aproximações com pólos e zeros. Por outras palavras, as funções racionais convergem mais rapidamente e possuem um domínio de convergência no plano complexo superior ao das funções polinomiais obtidas por PSE. Nesta perspectiva, este estudo foca somente as aproximações digitais dadas por funções racionais.

Neste capítulo é proposta uma nova abordagem para a obtenção de funções de transferências racionais que aproximam os integradores e diferenciadores de ordem fraccionária do tipo s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$). A estratégia proposta adopta as técnicas de modelação de sinal (Hayes, 1996) aplicadas ao desenvolvimento por PSE dos equivalentes discretos dos operadores fraccionários. As aproximações racionais obtidas, através das técnicas propostas, fornecem um ajuste mais alargado (em especial às baixas frequências) da resposta em frequência do operador original s^α . Mais ainda, as aproximações geradas são estáveis e de fase mínima, como se impõe para uma implementação digital. Esta abordagem pode ser sintetizada em três passos:

¹ *Power series expansion*

² *Continued fraction expansion*

- i) A função de transferência contínua ideal do integrador/diferenciador fraccionário s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) é discretizada através de um método de conversão $s \rightarrow z$ apropriado, normalmente designado por função geradora. Deste modo, obtém-se o equivalente discreto fraccionário de s^α , o qual é denotado aqui por $H^\alpha(z)$;
- ii) De seguida, determina-se a resposta impulsional do operador digital fraccionário $H^\alpha(z)$ através da sua expansão em série de potências (PSE) (ou série de Taylor);
- iii) Por último, aplicam-se os métodos adoptados para a modelação de sinal entre as respostas impulsivas do operador digital fraccionário (ideal) $H^\alpha(z)$ e da aproximação racional digital desejada.

Este procedimento de obtenção de funções racionais digitais que aproximam os integradores e diferenciadores fraccionários encontra-se detalhado nas secções a seguir descritas. São apresentados vários exemplos ilustrativos que comprovam a eficácia e aplicabilidade das técnicas de modelação de sinal aqui propostas.

4.2 Discretização de Integradores e Diferenciadores de Ordem Fraccionária

O método mais usual para a obtenção de equivalentes discretos do operador fraccionário s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) consiste na adopção de uma função geradora $s = \omega(z^{-1})$ (Vinagre, *et al.*; 2000; Chen, *et al.*, 2002). A função geradora e a sua expansão determinam, ambos, a forma da aproximação e os coeficientes (Lubich, 1986). Deste modo, o equivalente discreto fraccionário do operador s^α é obtido simplesmente elevando a correspondente função geradora a uma ordem fraccionária α , ou seja, realizando a operação:

$$s^\alpha = \left[\omega(z^{-1}) \right]^\alpha \quad (4.2)$$

Por outras palavras, dada uma função de transferência contínua (filtro), $G(s)$, a função de transferência discreta, $G(z)$, é obtida através da substituição:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s^\alpha = H^\alpha(z)} \tag{4.3}$$

em que $H^\alpha(z)$ representa o equivalente discreto fraccionário de ordem α do operador fraccionário s^α , expresso em função da variável complexa z ou do operador em atraso z^{-1} , dado por:

$$H^\alpha(z) = \left[\omega(z^{-1}) \right]^\alpha \tag{4.4}$$

O procedimento de substituição (4.3) é normalmente conhecido como método em malha aberta de conversão de analógico para digital (ou, simplesmente, método de conversão de $s \rightarrow z$). Para este efeito, os métodos de $s \rightarrow z$ (funções geradoras) mais utilizados são os operadores de Euler (ou diferenças atrasadas de primeira ordem), Tustin (ou bilinear) (Franklin, *et al.*, 1990; Machado, 2001) e o mais recentemente introduzido operador de Al-Alaoui (Al-Alaoui, 1993, 1997; Chen e Moore, 2002). A Tabela 4.1 lista os três métodos de conversão referidos, os quais são alvo de estudo neste capítulo.

O operador de Al-Alaoui é uma interpolação pesada dos operadores de Euler e de Tustin (Al-Alaoui, 1997). O conceito base parte da observação que a amplitude da resposta em frequências de um integrador ideal $1/s$ está situada entre os integradores de Euler e o de Tustin. Isto sugere aproximar o integrador ideal como a soma pesada dos dois integradores da seguinte forma (Al-Alaoui, 1997):

Tabela 4. 1 – Métodos de discretização de $s \rightarrow z$.

Método	Aproximação, $H^\alpha(z^{-1})$
Euler Grünwald-Letnikov	$s^\alpha \approx \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^\alpha$
Tustin	$s^\alpha \approx \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^\alpha$
Al-Alaoui	$s^\alpha \approx \left(\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \right)^\alpha$

$$H_N(z) = aH_E(z) + (1-a)H_T(z), \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (4.5)$$

em que a reflecte o peso dado a cada um dos integradores. $H_E(z)$ e $H_T(z)$ são respectivamente as funções de transferência dos integradores de Euler e de Tustin, dadas por:

$$H_E(z) = \frac{Tz}{z-1} \quad (4.6)$$

$$H_T(z) = \frac{T(z+1)}{2(z-1)} \quad (4.7)$$

Após simples manipulações da expressão (4.5), o integrador digital é dado pela seguinte função:

$$H_N(z) = \frac{T[(1-a) + (1+a)z]}{2(z-1)} \quad (4.8)$$

O diferenciador digital é obtido por inversão directa de (4.8), $1/H_N(z)$, resultando:

$$G_N(z) = \frac{2(z-1)}{T[(1-a) + (1+a)z]} \quad (4.9)$$

Adoptando a função (4.9) como uma função geradora, define-se um novo método de conversão $s \rightarrow z$ como:

$$s \approx \omega(z^{-1}) = \frac{2(z-1)}{T[(1-a) + (1+a)z]} \quad (4.10)$$

onde a variável a funciona como um parâmetro de sintonia da função. O chamado operador de Al-Alaoui é obtido a partir da função (4.10) considerando um valor de $a = 3/4$ (melhor compromisso entre os operadores de Euler e de Tustin (Al-Alaoui, 1997)), sendo, deste modo, dado pela seguinte expressão:

$$H_A(z) = \frac{8(z-1)}{7T(z+1/7)} \quad (4.11)$$

O novo operador fraccionário $s^\alpha \approx H_A^\alpha(z)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) é então obtido elevando ao valor α a correspondente função geradora (4.11), conforme ilustra a Tabela 4.1. Este operador é utilizado em (Chen e Moore, 2002) para a obtenção de diferenciadores de ordem fraccionária na forma de filtros IIR através do método de CFE. Nesse estudo está demonstrado que este

tipo de diferenciador fornece uma melhor aproximação ao operador original s^α que o esquema de Tustin (também obtido por CFE).

Adoptando o procedimento anterior, é possível desenvolver outros métodos de conversão $s \rightarrow z$. Por exemplo, partindo agora do conceito que a amplitude da resposta em frequências de um integrador ideal $1/s$ está situada entre os integradores de Tustin e o de Simpson (Al-Alaoui, 1995, 2001), obtém-se o seguinte integrador digital híbrido:

$$H(z) = aH_s(z) + (1-a)H_T(z), \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (4.12)$$

em que a reflecte o peso dado a cada um dos integradores. O integrador de Tustin $H_T(z)$ é dado pela expressão (4.7). A função de transferência do integrador de Simpson $H_S(z)$ possui a forma:

$$H_s(z) = \frac{T(z^2 + 4z + 1)}{3(z^2 - 1)} \quad (4.13)$$

O integrador digital resultante $H(z)$ é então dado por:

$$H(z) = \frac{T(3-a)(z+r_1)(z+r_2)}{6(z^2-1)} \quad (4.14)$$

onde r_1 e r_2 são dados pelas seguintes equações (de notar que $r_1 = 1/r_2$):

$$r_1 = \frac{3+a+2\sqrt{3a}}{3-a}, \quad r_2 = \frac{3+a-2\sqrt{3a}}{3-a} \quad (4.15)$$

O método habitual para obtenção de um diferenciador digital consiste na inversão directa do integrador digital $H(z)$ (4.14). Contudo, a função gerada resulta num filtro instável (Al-Alaoui, 2001). Assim, aplica-se o procedimento de estabilização descrito por Al-Alaoui (Al-Alaoui, 1992, 2001) à função $1/H(z)$, obtendo-se o seguinte diferenciador digital estável e de fase mínima:

$$G(z) = \frac{6(z^2-1)}{Tr_1(3-a)(z+r_2)^2} \quad (4.16)$$

A função $G(z)$ (4.16) pode ser vista como uma função geradora e, conseqüentemente, ser usada como um novo método de conversão $s \rightarrow z$:

$$s \approx \omega(z^{-1}) = \frac{6(z^2 - 1)}{Tr_1(3 - a)(z + r_2)^2} \quad (4.17)$$

O novo operador fraccionário s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) é então obtido elevando ao valor α a correspondente função geradora (4.17), ou seja:

$$s^\alpha \approx \left[\omega(z^{-1}) \right]^\alpha = \left[\frac{6(z^2 - 1)}{Tr_1(3 - a)(z + r_2)^2} \right]^\alpha \quad (4.18)$$

O operador definido pela função (4.18) é utilizado em (Chen, *et al.*, 2003a; Chen e Vinagre, 2003) para a obtenção de diferenciadores de ordem fraccionária na forma de filtros IIR através do método de CFE. Nesse estudo está demonstrado que este tipo de diferenciadores fornecem uma melhor aproximação da resposta em frequência da amplitude na zona das altas frequências. Mais ainda, o parâmetro de sintonia a pode revelar-se útil em algumas aplicações.

No estudo realizado por este capítulo utilizam-se somente as funções geradoras dos operadores de discretização de Euler, Tustin e Al-Alaoui listadas na Tabela 4.1. Todavia, outros esquemas de obtenção de equivalentes discretos poderiam ser usados (Smith, 1987; Franklin, *et al.*, 1990; Machado, 2001; Valério e Sá da Costa, 2002, 2003), sendo que para tal o procedimento a adoptar seria exactamente o mesmo que o delineado para os três operadores referidos neste texto. O critério de escolha baseou-se somente no facto de estes operadores serem os mais conhecidos e utilizados, e cujas as características estão bem definidas e estudadas.

4.3 Aproximações Digitais de Operadores Fraccionários Através de Funções Racionais

De um modo geral, as funções irracionais $H^\alpha(z^{-1})$ (como as ilustradas na Tabela 4.1) podem ser aproximadas através de funções polinomiais ou, então, através de funções racionais (*i.e.*, como a razão de dois polinómios). Assim, ao efectuar-se um desenvolvimento em série de Taylor, vulgarmente designado como *expansão em série de potências* (PSE), sobre as funções geradoras (irracionais) da Tabela 4.1, obtêm-se aproximações na forma de polinómios,

isto é, obtêm-se filtros digitais de resposta impulsional finita (filtros FIR³). Como exemplo, considere-se a utilização do operador de Euler $H(z^{-1}) = (1 - z^{-1})/T$, em que efectuando uma PSE sobre $H^\alpha(z^{-1}) = \left[(1 - z^{-1})/T \right]^\alpha$ fornece a seguinte equação (Machado, 1997, 2001; Vinagre, *et al.*, 2000, 2003):

$$H^\alpha(z^{-1}) = \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(\alpha)} z^{-k} \quad (4.19)$$

em que os coeficientes binomiais $c_k^{(\alpha)}$ ($k = 0, 1, \dots$) são dados por:

$$c_0^{(\alpha)} = 1; \quad c_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{k} \right) c_{k-1}^{(\alpha)} \quad (4.20)$$

A expressão (4.19) representa a fórmula discretizada da definição de Grünwald-Letnikov (desenvolvida no capítulo 2). Para a sua implementação prática esta deve ser combinada com o princípio da memória curta (descrito no capítulo 2), resultando num polinómio truncado em $n = \lceil L/T \rceil$ termos, onde L é o comprimento de memória, ou seja:

$$H^\alpha(z^{-1}) = \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=0}^n c_k^{(\alpha)} z^{-k} = \text{Trunc}_n \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right)^\alpha \quad (4.21)$$

De notar que o utilização de filtros FIR para aproximar, de forma razoável, o operador s^α leva ao uso de polinómios de ordem elevada e, conseqüentemente, a algoritmos menos eficientes.

Uma outra forma de obter aproximações consiste no desenvolvimento de funções racionais, isto é, consiste em filtros de resposta impulsional infinita (filtros IIR⁴). Para este efeito, aplica-se normalmente o método de *expansão em fracções contínuas* (CFE) (Vinagre, *et al.*, 2000, 2003; Chen e Moore, 2002). É um facto reconhecido que as aproximações racionais convergem mais rapidamente e possuem um domínio de convergência no plano complexo superior ao dos polinómios. Portanto, no estudo aqui realizado, desenvolve-se somente aproximações racionais digitais ao operador fraccionário do tipo s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), as quais são apropriadas para uma análise por transformada dos Z e para uma implementação digital.

³ Finite impulse response

⁴ Infinite impulse response

As aproximações racionais $H(z^{-1})$ de ordem m e n das funções de transferência irracionais do tipo $H^\alpha(z^{-1})$ (Tabela 4.1) podem ser formalmente expressas como:

$$H^\alpha(z^{-1}) \approx \frac{B_m(z^{-1})}{A_n(z^{-1})} = H(z^{-1}) \quad (4.22)$$

em que B e A representam os polinómios de grau m e n , respectivamente do numerador e do denominador. No que se segue, e para simplificação da análise, omite-se a presença dos índices m e n nos referidos polinómios da função racional.

Neste estudo apresenta-se uma nova abordagem para se obter aproximações racionais do tipo (4.22) de integradores e diferenciadores fraccionários. A nova estratégia adopta as técnicas usadas na modelação de sinais determinísticos e representa uma forma alternativa viável a outras técnicas actualmente existentes, nomeadamente ao extensivamente usado método de CFE, conforme se demonstra nas secções seguintes.

4.4 Resposta Impulsional de Operadores Digitais Fraccionários

Nesta secção determina-se a resposta impulsional $h^\alpha(k)$ para as três funções geradoras consideradas neste estudo, ou seja, para os operadores de Euler, Tustin e Al-Aloui listados na Tabela 4.1. Para a sua obtenção considera-se que $h^\alpha(k) = 0$ para $k < 0$, isto é, que o sistema é causal.

As respostas impulsionais $h^\alpha(k)$ são obtidas expandindo em série de potências (*i.e.*, efectuando a série de Taylor em torno de $x = z^{-1} = 0$) para cada uma das funções geradoras $H_E^\alpha(z^{-1})$, $H_T^\alpha(z^{-1})$ e $H_A^\alpha(z^{-1})$, em que os índices E , T e A denotam respectivamente os operadores de Euler, Tustin e Al-Alaoui.

Assim, efectuando uma PSE sobre o operador de Euler $H_E^\alpha(z^{-1})$, obtém-se:

$$\begin{aligned} H_E^\alpha(z^{-1}) &= \left[\frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right]^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{T} \right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_E^\alpha(k) z^{-k} \end{aligned} \quad (4.23)$$

A sua resposta impulsional, $h_E^\alpha(k)$, é obtida a partir de (4.23), sendo dada através da expressão:

$$h_E^\alpha(k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha (-1)^k \binom{\alpha}{k}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Se na expressão (4.23), $\alpha \in \mathbb{Z}$, então obtêm-se os integradores ($\alpha \in \mathbb{N}^-$ ⁵) e diferenciadores ($\alpha \in \mathbb{N}_0^+$ ⁶) de ordem inteira. Neste caso, a sequência impulsional (4.24) é de duração finita e, portanto, dada na forma de um filtro FIR.

Procedendo da mesma forma para os operadores de Tustin e de Al-Alaoui, respectivamente $H_T^\alpha(z^{-1})$ e $H_A^\alpha(z^{-1})$, vem:

$$\begin{aligned} H_T^\alpha(z^{-1}) &= \left[\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^\alpha \\ &= \left(\frac{2}{T} \right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} \binom{-\alpha}{k-j} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_T^\alpha(k) z^{-k} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} H_A^\alpha(z^{-1}) &= \left[\frac{8}{7T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \right) \right]^\alpha \\ &= \left(\frac{8}{7T} \right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j \left(\frac{1}{7} \right)^{k-j} \binom{\alpha}{j} \binom{-\alpha}{k-j} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_A^\alpha(k) z^{-k} \end{aligned} \quad (4.26)$$

De igual modo, as suas respostas impulsivais, $h_T^\alpha(k)$ e $h_A^\alpha(k)$, são determinadas respectivamente por:

$$h_T^\alpha(k) = \begin{cases} \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} \binom{-\alpha}{k-j}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

$$h_A^\alpha(k) = \begin{cases} \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha \sum_{j=0}^k (-1)^j \left(\frac{1}{7}\right)^{k-j} \binom{\alpha}{j} \binom{-\alpha}{k-j}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

De notar que a aplicação do método de PSE leva a respostas impulsivais dos operadores fraccionários com uma duração infinita, isto é, dadas na forma de um filtro IIR. Na prática,

⁵ Valores inteiros negativos: -1, -2, ...

⁶ Valores inteiros positivos: 0, 1, 2, ...

estas sequências devem ser truncadas gerando aproximações na forma de um filtro de resposta impulsional finita (filtro FIR).

Como se observa através das expressões (4.24), (4.27) e (4.28), as sequências impulsionais dos três operadores possuem propriedades distintas que devem ser analisadas antes de serem utilizadas para uma implementação digital. Por exemplo, o gráfico (com escala log-lin) da Figura 4.1 mostra as amplitudes das amostras das sequências impulsionais, $|h^\alpha(k)|$, dos três operadores (Euler, Tustin e Al-Alaoui) em estudo, para $\alpha = \pm 1/2$. Analisando os resultados, verifica-se que, em ambos os casos, as amplitudes das amostras vão decrescendo à medida k aumenta, ilustrando o facto de as referidas sequências serem infinitas (para α não inteiro). De facto, constata-se que as suas amplitudes diminuem à razão de uma função do tipo potência quando $k \rightarrow \infty$ (conforme já referido no capítulo 2). Mais ainda, para valores de α positivos, as amplitudes das amostras dos operadores de Euler e Al-Alaoui decrescem mais rapidamente que as do operador de Tustin, indicando que os primeiros métodos possuem melhores propriedades de convergência e, portanto, sendo mais apropriados para a aplicação das técnicas de modelação apresentadas neste estudo. Para valores de α negativos, nota-se que a taxa de decrescimento (quando $k \rightarrow \infty$) é mais lenta que no caso anterior, sendo sensivelmente a mesma para os três operadores.

Isto revela que a implementação de integradores fraccionários, através das técnicas aqui apresentadas, pode ser mais problemática. Na secção 4.7 dá-se um exemplo de implementação

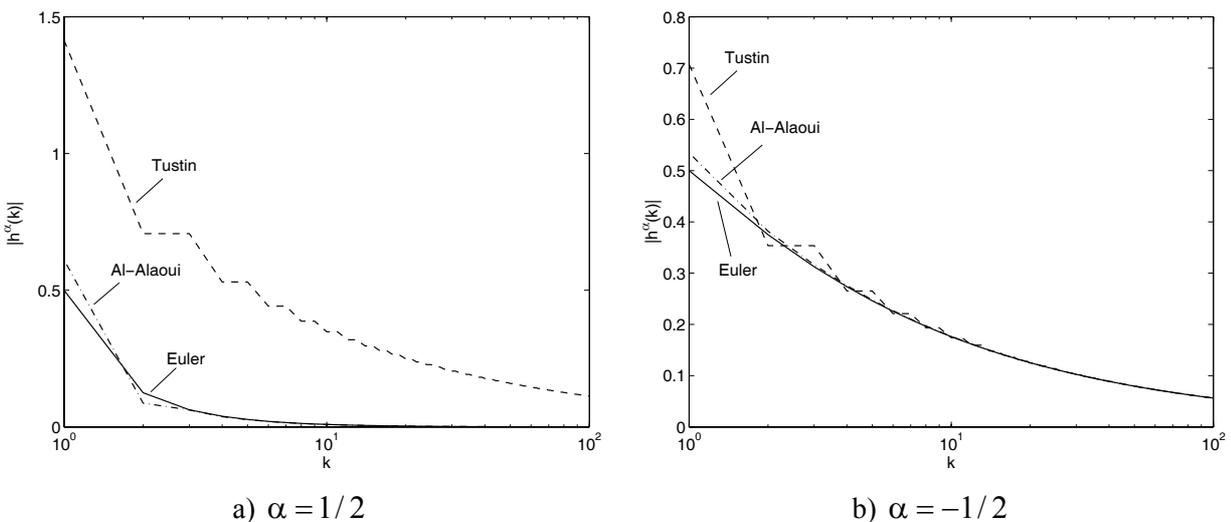


Figura 4.1 – Amplitude das sequências impulsionais, $|h^\alpha(k)|$, dos operadores de Euler, Tustin e Al-Alaoui com $T = 1$ s e para: a) $\alpha = 1/2$, b) $\alpha = -1/2$.

de um integrador fraccionário, em que os resultados apresentados demonstram um bom desempenho e a eficácia dos métodos aqui desenvolvidos.

4.5 Modelação de Sinal

Considere que a resposta impulsional $h^\alpha(k)$ do operador fraccionário está definida para $k \geq 0$. A função racional $H(z^{-1})$ (filtro IIR) que aproxima a função irracional $H^\alpha(z^{-1})$ possui a forma desejada de:

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.29)$$

em que $m \leq n$. A função (4.29) representa um filtro linear causal e invariante no tempo. A resposta impulsional $h(k)$ está relacionada com $H(z^{-1})$ através da transformada dos Z , ou seja, é dada por:

$$H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \quad (4.30)$$

A aproximação racional (4.29) possui $m+n+1$ parâmetros, nomeadamente os coeficientes a_k ($k=1, \dots, n$) e b_k ($k=0, \dots, m$), os quais podem ser seleccionados de forma a minimizar um determinado critério de erro. Usualmente, adopta-se como índice de desempenho a minimização da soma dos erros quadráticos entre as duas respostas impulsivas, ou seja, a desejada $h^\alpha(k)$ e a aproximada $h(k)$. Assim, os valores óptimos dos parâmetros (a_k, b_k) são encontrados minimizando o erro $e_{LS} = h^\alpha(k) - h(k)$, conforme mostra a Figura 4.2:

$$E_{LS} = \sum_{k=0}^{N-1} [e_{LS}(k)]^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [h^\alpha(k) - h(k)]^2 \quad (4.31)$$

onde N representa o número de amostras da resposta impulsional usadas no somatório (N é um valor pré-definido).

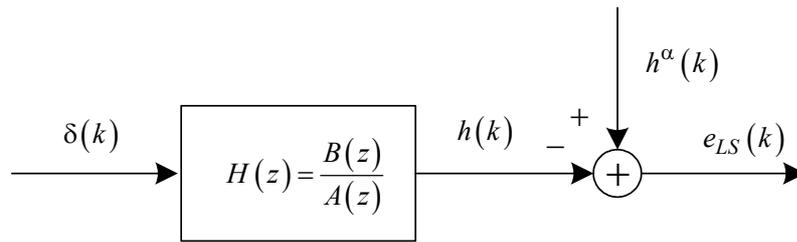


Figura 4.2 – Método (directo) dos mínimos quadrados.

Contudo, a abordagem pelo método dos mínimos quadrados (4.31) resulta num problema de optimização não linear para os parâmetros (a_k, b_k) da aproximação e, consequentemente, a minimização de E_{LS} envolve a resolução de um sistema de equações não lineares. Este facto, torna esta abordagem de difícil tratamento matemático (embora existam métodos iterativos para a sua resolução, tais como os métodos de Newton e o do gradiente descendente, entre outros). Devido a este facto, este método raramente é usado na prática.

Se a função racional (4.29) for colocada na forma $H(z)A(z) = B(z)$, e considerando que $h^\alpha(k)$ é dada aproximadamente pela resposta impulsional de $H(z^{-1})$, então esta função possui a seguinte equação às diferenças:

$$h^\alpha(k) + \sum_{i=1}^n a_i h^\alpha(k-i) = \begin{cases} b_k, & k = 0, 1, \dots, m \\ 0, & k > m \end{cases} \quad (4.32)$$

Como se verifica, esta expressão conduz a um *sistema de equações lineares*, as quais podem ser utilizadas de diferentes maneiras para determinar os coeficientes a_k e b_k . O objectivo é usar métodos (indirectos) simples que possam manusear mais facilmente e de uma forma mais elegante a determinação dos parâmetros da aproximação racional. Nesta perspectiva, este estudo considera três soluções lineares subóptimas para este problema, nomeadamente os métodos de Padé, Prony e de Shanks (Hayes, 1996; Barbosa, *et al.*, 2004a, 2005). O desenvolvimento das técnicas (de Padé, Prony e de Shanks) aqui apresentadas têm por base o livro de Hayes (1996, capítulo 4).

4.5.1 Método de Padé

O método de Padé fornece uma aproximação $H(z^{-1})$ que faz um encaixe perfeito da sua resposta impulsional $h(k)$ na resposta impulsional desejada $h^\alpha(k)$ para $0 \leq k \leq m+n$ (isto é, para os primeiros $m+n+1$ valores de k). Desta forma, a equação (4.32) torna-se:

$$h^\alpha(k) + \sum_{i=1}^n a_i h^\alpha(k-i) = \begin{cases} b_k, & k = 0, 1, \dots, m \\ 0, & k = m+1, \dots, m+n \end{cases} \quad (4.33)$$

em que $h^\alpha(k) = 0$ para $k < 0$. Na forma matricial, o sistema de equações (4.33) toma a forma:

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(0) & 0 & \dots & 0 \\ h^\alpha(1) & h^\alpha(0) & \dots & 0 \\ h^\alpha(2) & h^\alpha(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(m) & h^\alpha(m-1) & \dots & h^\alpha(m-n) \\ \hline h^\alpha(m+1) & h^\alpha(m) & \dots & h^\alpha(m-n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(m+n) & h^\alpha(m+n-1) & \dots & h^\alpha(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

No método de aproximação de Padé, a obtenção dos coeficientes a_k e b_k a partir do sistema (4.34) é feita em dois passos, primeiro resolve-se para os coeficientes do denominador a_k , e de seguida resolve-se para os coeficientes do numerador b_k .

No primeiro passo, resolvendo para os coeficientes a_k , usa-se as últimas n equações do sistema (4.34) (indicado através da partição), e após simples manipulações, chega-se ao sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(m) & h^\alpha(m-1) & \dots & h^\alpha(m-n+1) \\ h^\alpha(m+1) & h^\alpha(m) & \dots & h^\alpha(m-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(m+n-1) & h^\alpha(m+n-2) & \dots & h^\alpha(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h^\alpha(m+1) \\ h^\alpha(m+2) \\ \vdots \\ h^\alpha(m+n) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Em notação matricial, o sistema (4.35) pode ser expresso numa forma mais compacta, como:

$$\mathbf{H}_2 \mathbf{a} = -\mathbf{h}_{21} \quad (4.36)$$

onde o vector dos coeficientes do denominador \mathbf{a} , o vector coluna \mathbf{h}_{21} e a matriz \mathbf{H}_2 são, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h}_{21} = \begin{bmatrix} h^\alpha(m+1) \\ h^\alpha(m+2) \\ \vdots \\ h^\alpha(m+n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (4.37)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} h^\alpha(m) & h^\alpha(m-1) & \cdots & h^\alpha(m-n+1) \\ h^\alpha(m+1) & h^\alpha(m) & \cdots & h^\alpha(m-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(m+n-1) & h^\alpha(m+n-2) & \cdots & h^\alpha(m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.38)$$

De referir que \mathbf{H}_2 é uma matriz Toeplitz não simétrica (Poularikas, 1999). Se \mathbf{H}_2 é não singular (*i.e.*, é uma matriz invertível), então $(\mathbf{H}_2)^{-1}$ existe e os coeficientes a_k são determinados univocamente por:

$$\mathbf{a} = -(\mathbf{H}_2)^{-1} \mathbf{h}_{21} \quad (4.39)$$

Após a determinação de a_k , o próximo passo consiste em determinar os coeficientes do numerador b_k usando as primeiras $m+1$ equações do sistema (4.34) (indicado através da partição), ou seja:

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h^\alpha(1) & h^\alpha(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h^\alpha(2) & h^\alpha(1) & h^\alpha(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(m) & h^\alpha(m-1) & h^\alpha(m-2) & \cdots & h^\alpha(m-n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Em representação matricial, o sistema (4.40) vem:

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}_1 \bar{\mathbf{a}} \quad (4.41)$$

em que:

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h^\alpha(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h^\alpha(1) & h^\alpha(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h^\alpha(2) & h^\alpha(1) & h^\alpha(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(m) & h^\alpha(m-1) & h^\alpha(m-2) & \cdots & h^\alpha(m-n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)} \quad (4.43)$$

Portanto, os coeficientes \mathbf{b} são calculados por simples multiplicação de $\bar{\mathbf{a}}$ pela matriz \mathbf{H}_1 . Estes coeficientes podem também ser calculados directamente a partir da equação (4.33), da seguinte forma:

$$b_k = h^\alpha(k) + \sum_{i=1}^n a_i h^\alpha(k-i), \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (4.44)$$

Desta forma, obtém-se um ajuste perfeito entre $h(k)$ e a resposta impulsional desejada $h^\alpha(k)$ para os primeiros $m+n+1$ valores da sequência impulsional. O sucesso deste método depende fortemente do número de parâmetros $m+n+1$ seleccionados para a função racional $H(z^{-1})$. Dado que a sua resposta impulsional $h(k)$ coincide com a resposta impulsional $h^\alpha(k)$ desejada somente até o número de parâmetros da aproximação, quanto mais complexa esta for, melhor é o ajuste a $h^\alpha(k)$ para $0 \leq k \leq m+n$. Contudo, em aplicações práticas, isto introduz uma forte limitação do método de Padé dado que a aproximação resultante deve possuir um número elevado de pólos e de zeros.

Pode ser facilmente demonstrado que são idênticas (Lorentzen e Waadeland, 1992) as aproximações racionais obtidas através do método CFE e as resultantes por aplicação do método de Padé a uma expansão em série de potências (série de Taylor) ($m=n$). Contudo, a abordagem por CFE é computacionalmente menos pesada que a técnica de Padé.

4.5.2 Método de Prony

O método de Prony difere do método de aproximação de Padé na forma de determinar os coeficientes do denominador a_k ($k = 1, 2, \dots, n$), conforme ilustrado na Figura 4.3. Assim, o erro de modelação é dado por:

$$E_P(z) = A(z)H^\alpha(z) - B(z) \quad (4.45)$$

ao qual corresponde a seguinte equação nos tempos (onde o símbolo * denota a operação de convolução):

$$e_P(k) = \hat{b}_k - b_k = a_k * h^\alpha(k) - b_k \quad (4.46)$$

Dado que $b_k = 0$ para $k > m$, o erro $e_P(k)$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$e_P(k) = \begin{cases} h^\alpha(k) + \sum_{i=0}^n a_i h^\alpha(k-i) - b_i, & k = 0, 1, \dots, m \\ h^\alpha(k) + \sum_{i=0}^n a_i h^\alpha(k-i), & k > m \end{cases} \quad (4.47)$$

o qual é uma função linear dos coeficientes a_k e b_k .

Assim, em vez de colocar o erro $e_P(k) = 0$, para $k = 0, 1, \dots, m+n$, como no caso da aproximação de Padé, o método de Prony determina os coeficientes a_k de forma a minimizar o erro quadrático:

$$E_P = \sum_{i=m+1}^{N-1} [e_P(i)]^2 = \sum_{i=m+1}^{N-1} \left[h^\alpha(i) + \sum_{k=1}^n a_i h^\alpha(i-k) \right]^2 \quad (4.48)$$

em que N representa o número de amostras utilizadas da sequência impulsional $h^\alpha(k)$ desejada. De notar que a equação (4.48) só depende dos coeficientes a_k .

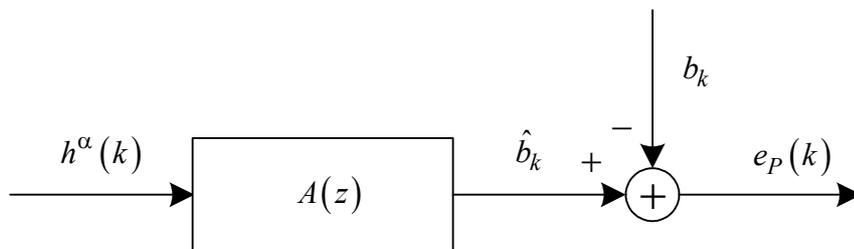


Figura 4.3 – Interpretação do método de Prony para modelação de sinal.

Aplicando $\partial E_P / \partial a_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) e igualando a zero, obtém-se o seguinte sistema de equações normais lineares:

$$\sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{k=m+1}^{N-1} h^\alpha(k-i) h^\alpha(k-l) \right] = - \sum_{k=m+1}^{N-1} h^\alpha(k) h^\alpha(k-l), \quad l=1, 2, \dots, n \quad (4.49)$$

As equações normais de Prony (4.49) podem ser expressas de uma forma alternativa. Na realidade, o método de Prony pode ser formulado em termos da obtenção da solução de um sistema de equações sobredeterminado através do método dos mínimos quadrados. Esta é a forma considerada neste estudo para a determinação dos coeficientes a_k através deste método. Esta formulação equivalente tem por base a equação (4.47), em que se coloca o erro $e_P(k) = 0$, para $k = m+1, m+2, \dots, N-1$, ou seja:

$$h^\alpha(k) + \sum_{i=0}^n a_i h^\alpha(k-i) = 0, \quad k = m+1, m+2, \dots, N-1 \quad (4.50)$$

Em notação matricial as equações (4.50) tomam a forma:

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(m) & h^\alpha(m-1) & \cdots & h^\alpha(m-n+1) \\ h^\alpha(m+1) & h^\alpha(m) & \cdots & h^\alpha(m-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(N-2) & h^\alpha(N-3) & \cdots & h^\alpha(N-n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h^\alpha(m+1) \\ h^\alpha(m+2) \\ \vdots \\ h^\alpha(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

ou, de forma equivalente, como:

$$\mathbf{H}_2 \mathbf{a} = -\mathbf{h}_{21} \quad (4.52)$$

onde o vector dos coeficientes do denominador \mathbf{a} , o vector coluna \mathbf{h}_{21} e a matriz \mathbf{H}_2 são, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h}_{21} = \begin{bmatrix} h^\alpha(m+1) \\ h^\alpha(m+2) \\ \vdots \\ h^\alpha(N-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-m-1} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} h^\alpha(m) & h^\alpha(m-1) & \cdots & h^\alpha(m-n+1) \\ h^\alpha(m+1) & h^\alpha(m) & \cdots & h^\alpha(m-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^\alpha(N-2) & h^\alpha(N-3) & \cdots & h^\alpha(N-n-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-m-1) \times n} \quad (4.54)$$

É óbvio que o sistema (4.52) não pode ser resolvido para os coeficientes \mathbf{a} de modo a obter uma solução exacta. Assim, é obtida a solução pelos mínimos quadrados resolvendo o sistema de equações normais:

$$\left(\mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2\right) \mathbf{a} = -\mathbf{H}_2^T \mathbf{h}_{21} \quad (4.55)$$

Se $\left(\mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não singular, então os coeficientes a_k são determinados univocamente por:

$$\mathbf{a} = -\left(\mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2\right)^{-1} \mathbf{H}_2^T \mathbf{h}_{21} = \mathbf{H}_2^+ \mathbf{h}_{21} \quad (4.56)$$

onde $\mathbf{H}_2^+ = \left(\mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2\right)^{-1} \mathbf{H}_2^T$ é a matriz *pseudoinversa* de \mathbf{H}_2 .

De notar que a obtenção dos coeficientes a_k pelo mínimos quadrados (4.56) é apenas uma extensão da solução do problema (4.34) através do método de Padé, considerando que o número de amostras N da sequência impulsional utilizada é superior ao número de parâmetros da aproximação racional desejada, isto é, para $N > m + n + 1$.

Após determinação de a_k , o próximo passo consiste em determinar os coeficientes b_k do numerador. No método de Prony, os coeficientes b_k são calculados exactamente da mesma forma que no método de aproximação de Padé, ou seja, forçando o erro de modelação $e_P(k) = a_k * h^\alpha(k) - b_k = 0$ para $k = 0, \dots, m$ (ver equação (4.47)). Por outras palavras, estes coeficientes podem ser calculados directamente a partir da equação (4.47), da seguinte forma:

$$b_k = h^\alpha(k) + \sum_{i=1}^n a_i h^\alpha(k-i), \quad k = 0, \dots, m \quad (4.57)$$

De forma equivalente, os coeficientes b_k podem ser determinados usando cálculo matricial, sendo que para isso utilizam-se as equações (4.40)-(4.43), conforme desenvolvido na secção 4.5.1 para o método de Padé.

4.5.3 Método de Shanks

No método anterior (de Prony), os coeficientes do numerador b_k são determinados colocando o erro $e_P(k) = a_k * h^\alpha(k) - b_k = 0$ para $k = 0, \dots, m$. O método de Shanks aqui descrito fornece uma alternativa ao de Prony na forma de determinar os coeficientes do numerador b_k ($k = 0, 1, \dots, m$). Assim, em vez de forçar a um ajuste perfeito para os primeiros $m+1$ valores da sequência impulsional $h^\alpha(k)$, o método de Shanks minimiza o erro

$e_S(k) = h^\alpha(k) - \hat{h}(k)$ (ver Figura 4.4) através dos mínimos quadrados, para as N amostras consideradas no intervalo $[0, N-1]$. Deste modo, espera-se obter uma aproximação com um desempenho melhor sobre toda a sequência impulsional $h^\alpha(k)$ desejada.

A ideia base do método de Shanks está ilustrada no diagrama de blocos representado na Figura 4.4. Como se pode observar, a aproximação $H(z)$ é subdividida em duas funções colocadas em série, $B(z)$ e $A(z)$:

$$H(z) = B(z) \left\{ \frac{1}{A(z)} \right\} \tag{4.58}$$

O processo de determinação dos coeficientes a_k e b_k é estabelecido em dois passos: primeiro resolve-se para os coeficientes do denominador a_k e, de seguida, resolve-se para os coeficientes do numerador b_k , tal como mostra a Figura 4.4.

Assim, no primeiro passo, calcula-se o denominador $A(z)$ usando o método de Prony, isto é, obtendo a sua solução pelos mínimos quadrados sobre o intervalo $[m+1, N-1]$, ou seja, resolvendo o sistema de equações (ver secção anterior 4.5.2):

$$h^\alpha(k) + \sum_{i=0}^n a_i h^\alpha(k-i) = 0, \quad k = m+1, m+2, \dots, N-1 \tag{4.59}$$

A solução do sistema (4.59) é obtida usando cálculo matricial através das equações (4.51)-(4.56), conforme desenvolvido na secção 4.5.2 para o método de Prony.

Após a determinação de $A(z)$, a resposta impulsional $g(k)$ referente à função $1/A(z)$ é calculada, por exemplo, de modo recursivo através da expressão:

$$g(k) = \delta(k) - \sum_{i=1}^n a_i g(k-i) \tag{4.60}$$

com $g(k) = 0$ para $k < 0$.

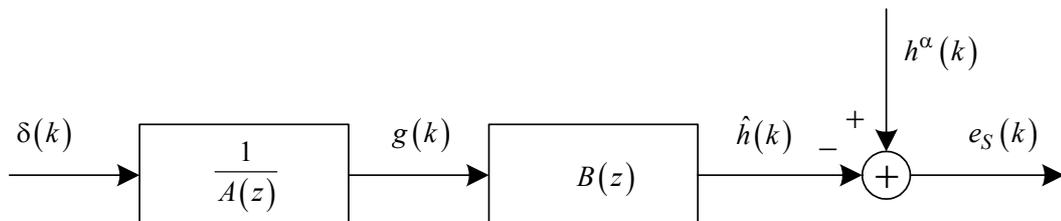


Figura 4.4 – Interpretação do método de Shanks para a modelação de sinal.

Para a determinação dos coeficientes do numerador b_k da função $B(z)$, em vez de forçar o erro $e_p(k) = a_k * h^\alpha(k) - b_k = 0$ para $k = 0, \dots, m$ (como no caso do método de Prony), o método de Shanks minimiza o erro $e_S(k) = h^\alpha(k) - \hat{h}(k)$ (ver Figura 4.4):

$$e_S(k) = h^\alpha(k) - \sum_{i=0}^m b_i g(k-i), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.61)$$

através do método dos mínimos quadrados:

$$E_S = \sum_{k=0}^{N-1} [e_S(k)]^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left[h^\alpha(k) - \sum_{i=0}^m b_i g(k-i) \right]^2 \quad (4.62)$$

em que N é o número de amostras consideradas da sequência impulsional $h^\alpha(k)$ desejada. De notar que a equação (4.62) depende somente dos coeficientes b_k .

Aplicando $\partial E_S / \partial b_k$ ($k = 0, \dots, m$) e igualando a zero, obtém-se o seguinte sistema de equações normais lineares:

$$\sum_{i=0}^m b_i \left[\sum_{k=0}^{N-1} g(k-i) g(k-l) \right] = \sum_{k=0}^{N-1} h^\alpha(k) g(k-l), \quad l = 0, 1, \dots, m \quad (4.63)$$

As equações normais de Shanks (4.63) podem ser expressas de uma forma alternativa. Na realidade, o método de Shanks pode ser formulado em termos da obtenção da solução de um sistema de equações sobredeterminado através do método dos mínimos quadrados. Esta é a forma considerada neste estudo para a determinação dos coeficientes b_k . Esta formulação equivalente tem por base a equação (4.61), em que se coloca o erro $e_S(k) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$, ou seja:

$$h^\alpha(k) - \sum_{i=0}^m b_i g(k-i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.64)$$

Em notação matricial as equações (4.64) tomam a forma:

$$\begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 & 0 & 0 \\ g(2) & g(1) & g(0) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(N-1) & g(N-2) & g(N-3) & \cdots & g(N-m-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^\alpha(0) \\ h^\alpha(1) \\ h^\alpha(2) \\ \vdots \\ h^\alpha(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

ou, de forma equivalente, como:

$$\mathbf{G}\mathbf{b} = \mathbf{h} \quad (4.66)$$

em que os vectores dos coeficientes do numerador \mathbf{b} , o vector coluna \mathbf{h} e a matriz \mathbf{G} são, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h^\alpha(0) \\ h^\alpha(1) \\ h^\alpha(2) \\ \vdots \\ h^\alpha(N-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad (4.67)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 & 0 & 0 \\ g(2) & g(1) & g(0) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(N-1) & g(N-2) & g(N-3) & \cdots & g(N-m-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (m+1)} \quad (4.68)$$

A solução pelos mínimos quadrados da equação (4.66) é obtida resolvendo o seguinte sistema de $m+1$ equações normais lineares:

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G})\mathbf{b} = \mathbf{G}^T \mathbf{h} \quad (4.69)$$

Se $\mathbf{G}^T \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$ é uma matriz não singular, então os coeficientes b_k são determinados univocamente por:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{h} = \mathbf{G}^+ \mathbf{h} \quad (4.70)$$

onde $\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$ é a matriz *pseudoinversa* de \mathbf{G} .

Como se constata, o método de Shanks é computacionalmente mais pesado que o método Prony. Apesar disto, a redução obtida no erro pode ser desejável em algumas aplicações.

Embora os coeficientes b_k sejam obtidos minimizando o erro $e_S(k)$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$ na equação (4.62), pode ocorrer situações em seja mais apropriado, por exemplo, considerar o erro:

$$E_S = \sum_{k=m+1}^{N-1} [e_S(k)]^2 \quad (4.71)$$

Por outras palavras, o intervalo de minimização do erro, $[m+1, N-1]$, é o mesmo que o usado para determinar os coeficientes do denominador a_k .

As técnicas de modelação de sinal (Padé, Prony e Shanks) atrás descritas merecem as seguintes observações:

- A técnica de Padé não é um método óptimo. Gera aproximações com um ajuste perfeito na sequência impulsional $h^\alpha(k)$ desejada para o intervalo $[0, m+n]$. No entanto, não há nenhuma garantia de se obter uma aproximação com uma boa precisão para $N > m+n+1$, dado que as amostras fora do intervalo $[0, m+n]$ nunca são consideradas. Mais ainda, não é garantido que a aproximação gerada seja estável, pois o método força a função racional a coincidir na sequência impulsional somente sobre um número limitado de amostras.
- A técnica de Prony é um método óptimo, pois os coeficientes do denominador a_k são determinados pelos mínimos quadrados. É normalmente mais preciso que a aproximação de Padé. De referir que os coeficientes a_k são parâmetros óptimos, mas os coeficientes b_k não o são (*i.e.*, são obtidos através da técnica de Padé).
- A técnica de Shanks é também um método óptimo, pois os coeficientes do numerador b_k são determinados minimizando o erro quadrático. Aliás, os coeficientes do denominador a_k também são determinados de uma forma óptima através do método de Prony. Este facto faz com que se obtenha aproximações com uma melhor precisão. No entanto, deve-se reparar que, embora os coeficientes a_k e b_k sejam obtidos de uma forma óptima, esta abordagem é diferente da que se obtém por aplicação directa do método dos mínimos quadrados, conforme referido na secção 4.5.

4.6 Aproximação Digitais Racionais Através do Método de Identificação dos Mínimos Quadrados

Nesta secção adopta-se uma abordagem alternativa para a obtenção de aproximações racionais aos operadores fraccionários. O método aqui desenvolvido baseia-se no algoritmo clássico de

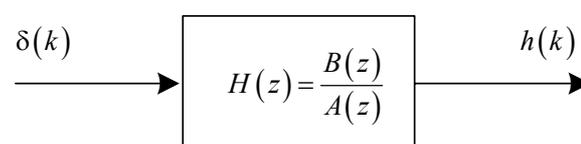


Figura 4.5 – Ilustração do método de identificação.

identificação através do método dos mínimos quadrados (Ogata, 1987; Franklin, *et al.*, 1990; Schilling e Harris, 2000).

A resposta impulsional $h(k)$ da aproximação $H(z^{-1})$, dada pela função (4.29), a uma entrada em impulso unitário $\delta(k)$, corresponde à expressão (como mostra a Figura 4.5):

$$h(k) + \sum_{l=1}^n a_l h(k-l) = \sum_{l=0}^m b_l \delta(k-l), \quad k \geq 0 \quad (4.72)$$

em que:

$$\delta(k-l) = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.73)$$

onde N corresponde ao número de amostras das sequências de entrada e de saída.

A expressão (4.72) pode ser representada em notação matricial como:

$$h(k) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}(k), \quad k \geq 0 \quad (4.74)$$

onde $\mathbf{x}(k)$ designa o vector $(m+n+1) \times 1$ dos estados e $\boldsymbol{\theta}$ é o vector $(m+n+1) \times 1$ dos parâmetros definidos respectivamente por:

$$\mathbf{x}(k) = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), \delta(k), \dots, \delta(k-m)]^T \quad (4.75)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]^T \quad (4.76)$$

Introduzem-se as seguintes variáveis matriciais:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(0) \\ \mathbf{x}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h^\alpha(0) \\ h^\alpha(1) \\ \vdots \\ h^\alpha(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

onde \mathbf{X} é uma matriz $N \times (m+n+1)$ e \mathbf{h} é um vector $N \times 1$. Para a construção de \mathbf{X} considera-se que as condições iniciais do sistema são nulas, isto é, que $h(k) = 0$ para $k < 0$.

Se o sistema da Figura 4.5 pode ser representado pela aproximação (4.74) para um determinado $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$, então o vector de saídas \mathbf{h} pode ser expresso como:

$$\mathbf{h} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}^* \quad (4.78)$$

Para um vector de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ geral, a precisão do ajuste pode ser medida usando o seguinte vector de erro (geralmente, $N \gg m+n+1$):

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{h} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \quad (4.79)$$

O objectivo é então encontrar uma estimativa de $\boldsymbol{\theta}$ que minimize a soma dos erros quadráticos, ou seja:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{k=0}^{N-1} [e(k)]^2 = \mathbf{e}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) \\ &= (\mathbf{h} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{h} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{h}^T \mathbf{h} - 2\mathbf{h}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Aplicando $\partial J(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta}$ e igualando a zero, obtém-se:

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{h} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (4.81)$$

Resolvendo a equação (4.81) chega-se ao seguinte sistema de *equações normais*, para o qual o vector de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ deve satisfazer:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}^T \mathbf{h} \quad (4.82)$$

Como se verifica, a estimativa do vector de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é dada pela resolução de um sistema de $m+n+1$ equações lineares (Schilling e Harris, 2000; Burden e Faires, 2001). Se a matriz $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ de dimensão $(m+n+1) \times (m+n+1)$ é não singular (*i.e.*, se admite inversa), então existe uma única solução do sistema (4.82). Neste caso, a solução $\boldsymbol{\theta}$ é dada por:

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{h} = \mathbf{X}^+ \mathbf{h} \quad (4.83)$$

onde $\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ é a designada *pseudoinversa* de \mathbf{X} .

A partir da expressão (4.83), estabelece-se que para $N = m+n+1$ o sistema (4.83) fica reduzido ao cálculo da inversa de uma matriz $N \times N$ quadrada e, portanto, o vector de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é determinado de uma forma simples através da expressão:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{h} \quad (4.84)$$

Neste caso, obtém-se a mesma aproximação racional que a gerada por aplicação dos métodos de Padé ou de CFE (Barbosa, *et al.*, 2004a).

Mais ainda, verifica-se que esta abordagem fornece as mesmas aproximações que o método de Prony (ver subsecção 4.5.2). No entanto, o presente método (alternativo) possui a vantagem de se poder determinar num só passo os coeficientes (a_k, b_k) da função racional,

em contraste com o de Prony que necessita de dois passos para calcular os parâmetros. Sendo assim, nos exemplos ilustrativos a seguir apresentados, e para evitar uma duplicação de resultados, refere-se a este método como sendo também de Prony.

Deve ser enfatizado que as técnicas aqui desenvolvidas (nas secções 4.5 e 4.6), para a obtenção de aproximações digitais racionais de integradores e diferenciadores de ordem fraccionária, podem ser implementadas adoptando diferentes abordagens. Uma das formas apresentadas resume-se à resolução de sistemas de equações algébricas lineares, para as quais existem métodos eficientes para obter a sua solução e que são encontrados num livro comum de cálculo numérico (Schilling e Harris, 2000; Burdens e Faires, 2001). Outra das formas desenvolvidas consiste na resolução de matrizes inversas e pseudoinversas, existindo também, neste caso, métodos eficientes para o seu cálculo (Golub e Van Loan, 1996). No entanto, em termos numéricos, é de evitar esta última solução e optar pela resolução de sistemas lineares. No decorrer do desenvolvimento dos métodos aparecem também matrizes especiais (*e.g.*, matriz de Toeplitz) que podem ser calculadas por algoritmos adequados (Hayes, 1996; Golub e Van Loan, 1996; Poularikas, 1999). Existe uma outra solução que consiste na utilização de *software* de computação numérica para resolver os referidos sistemas (por equações lineares ou através de matrizes inversas ou pseudoinversas). De facto, o uso de uma ferramenta de processamento numérico como, por exemplo, o MATLAB, pode simplificar significativamente a obtenção da sua solução, resolvendo de forma eficiente as equações e aplicando as mais recentes inovações em termos de cálculo numérico. Esta foi a forma adoptada para a implementação das técnicas expostas neste estudo. Assim, verifica-se que com a utilização do operador “backslash” \ do MATLAB é possível resolver de forma eficiente os algoritmos propostos neste capítulo.

4.7 Aplicação das Técnicas Propostas: Exemplo Ilustrativo

Nesta secção usam-se as técnicas de modelação de sinal, descritas nas secções anteriores 4.5 e 4.6, para o projecto de aproximações digitais racionais do tipo $H(z^{-1})$ ao integro-diferenciador de ordem fraccionária s^α , com $\alpha = -1/2$. Utilizam-se os equivalentes discretos fraccionários dos operadores de Euler, Tustin e Al-Alaoui, com um período de amostragem de $T = 0,01$ s. As ordens das aproximações são colocadas para $m = n$, situação normalmente

considerada em aplicações práticas, dado que o caso em que $m < n$ produz geralmente aproximações inferiores (Vinagre, *et al.*, 2000; Chen e Moore, 2002; Barbosa, *et al.*, 2004a).

As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 ilustram os diagramas de Bode e as respostas ao degrau unitário das aproximações de Prony para os operadores de Euler, Tustin e de Al-Alaoui, com $\alpha = -1/2$, utilizando vários comprimentos da resposta impulsional desejada $N = \{11, 100, 200, 500, 1000\}$, e para uma ordem fixa das aproximações de $m = n = 5$. Para efeitos de comparação, também se mostra a aproximação de Padé (ou de CFE).

A resposta em frequência do integrador fracionário $G(j\omega) = 1/(j\omega)^\alpha$ é dada por ($\alpha > 0$):

$$|G(j\omega)|_{dB} = -\alpha 20 \text{ dB/dec}, \quad \angle G(j\omega) = -\alpha \frac{\pi}{2} \quad (4.85)$$

Com $\alpha = 1/2$, obtém-se:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -10 \text{ dB/dec}, \quad \angle G(j\omega) = -45^\circ \quad (4.86)$$

A resposta a uma entrada em degrau unitário do integrador fracionário, ou seja, $Y(s) = 1/s^\alpha \cdot R(s)$, com $R(s) = 1/s$, é estabelecida através do conhecido par de transformada de Laplace (Abramowitz e Stegun, 1974; Poularikas, 1999):

$$\frac{1}{s^\alpha} = L \left\{ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\}, \quad \alpha > 0 \quad (4.87)$$

Assim, considerando $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ e o par de transformada (4.87), obtém-se:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (4.88)$$

Para $\alpha = 1/2$, $y(t)$ vem:

$$y(t) = \frac{t^{0,5}}{\Gamma(1,5)} \quad (4.89)$$

As Figuras 4.6–4.8 ilustram de forma clara a influência do comprimento da sequência impulsional N no desempenho das aproximações. De facto, verifica-se que quanto maior for a sequência impulsional melhor é o desempenho das aproximações no ajuste às curvas ideais (tanto para as respostas em frequência como para as respostas temporais ao degrau). No

entanto, observa-se que existe um limite para o valor de N , a partir do qual já não se obtêm melhorias significativas das suas respostas. A partir dos gráficos, retira-se que este limite está situado em $N = 1000$. Aliás, para valores elevados de N as amostras começam a ter pouco significado, podendo mesmo causar alguns problemas numéricos devido à ordem elevada do sistema de equações a resolver. Os gráficos revelam que, por exemplo, com $N = 100$, obtêm-se desempenhos superiores face ao método de Padé (ou de CFE).

Os operadores utilizados apresentam diferenças nos diferentes domínios (frequências e tempos) que devem ser tomados em conta. Assim, em termos da resposta em frequência, o operador de Tustin apresenta o melhor desempenho nas fases enquanto que os operadores de Euler e de Al-Alaoui possuem uma melhor resposta nas amplitudes, sendo que o de Al-Alaoui é o que faz um melhor ajuste às altas frequências. Nas respostas ao degrau, os operadores de Euler e de Al-Alaoui são os que apresentam melhores resultados. Como se verifica, os diferentes operadores têm propriedades distintas que devem ser tomadas em consideração aquando da sua aplicação.

Tomando em consideração estas observações, as experiências a seguir apresentadas utilizam um comprimento fixo de $N = 1000$ da sequência impulsional $h^\alpha(k)$ desejada. Para uma utilização efectiva das técnicas propostas, considera-se que, para o valor de N indicado, as amostras têm um valor desprezável, ou seja, $h^\alpha(k) \approx 0$ para $k > N$.

As subsecções 4.7.1, 4.7.2 e 4.7.3 mostram os resultados da utilização das aproximações racionais de Padé, Prony e de Shanks, para o integrador fraccionário s^α , com $\alpha = -1/2$, considerando diferentes ordens das aproximações $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e um comprimento fixo da resposta impulsional de $N = 1000$. Para cada um dos casos, apresentam-se os gráficos das respostas impulsional, dos diagramas de Bode, das respostas ao degrau unitário e dos mapas dos pólos e dos zeros das aproximações resultantes. Em todos os casos consideram-se os operadores de Euler, Tustin e de Al-Alaoui. São também fornecidas tabelas com as correspondentes funções digitais racionais. Para efeitos de comparação, mostram-se, sempre que possível, as curvas analíticas das respostas, assim como a aproximação racional obtida por aplicação da técnica de Padé (ou de CFE) para o caso de $m = n = 5$ ($N = 11$).

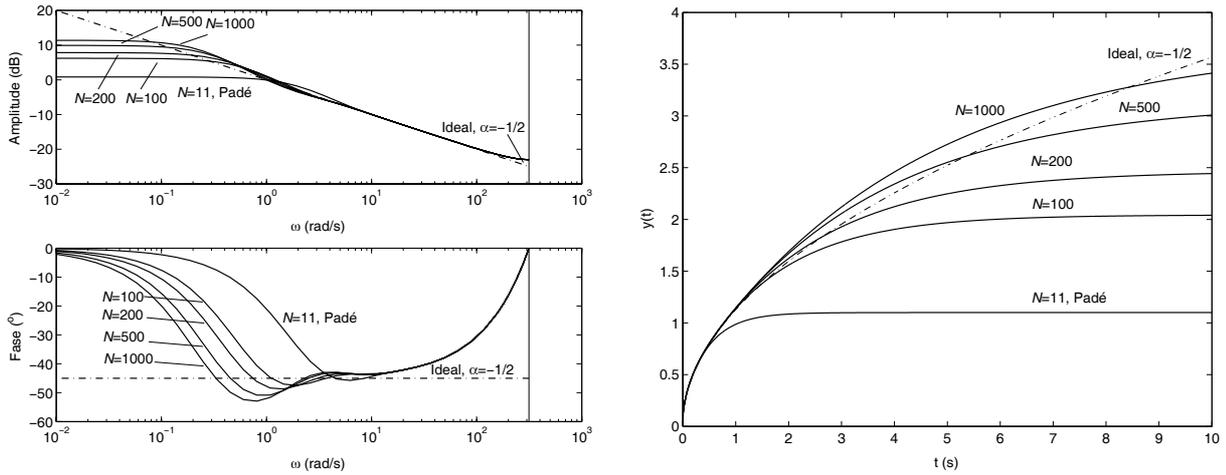


Figura 4.6 – Diagramas de Bode (esquerda) e respostas ao degrau (direita) das aproximações de Prony ao operador de Euler, com $\alpha = -1/2$, para $m = n = 5$ e $N = \{11, 100, 200, 500, 1000\}$.

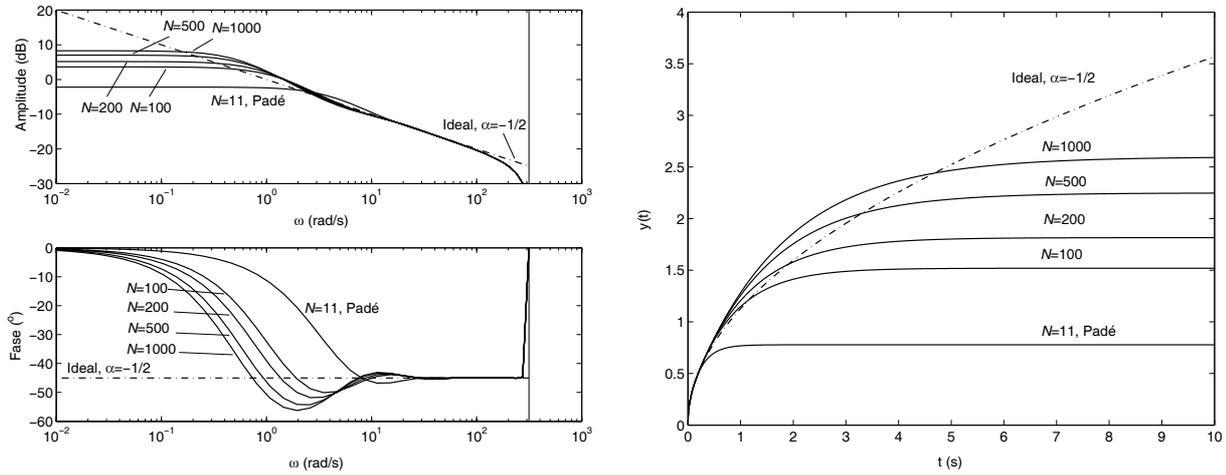


Figura 4.7 – Diagramas de Bode (esquerda) e respostas ao degrau (direita) das aproximações de Prony ao operador de Tustin, com $\alpha = -1/2$, para $m = n = 5$ e $N = \{11, 100, 200, 500, 1000\}$.

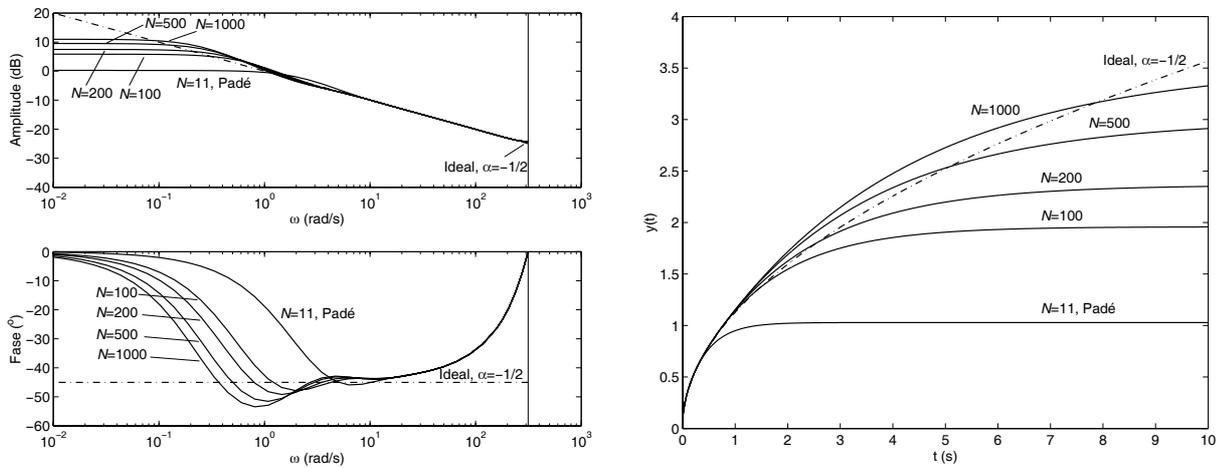


Figura 4.8 – Diagramas de Bode (esquerda) e respostas ao degrau (direita) das aproximações de Prony ao operador de Al-Alaoui, com $\alpha = -1/2$, para $m = n = 5$ e $N = \{11, 100, 200, 500, 1000\}$.

4.7.1 Aproximações de Padé

Tabela 4. 2: Aproximações de Padé ao operador de Euler para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.1 - 0.025z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1}}$
3	$\frac{0.1 - 0.125z^{-1} + 0.0375z^{-2} - 0.001562z^{-3}}{1 - 1.75z^{-1} + 0.875z^{-2} - 0.1094z^{-3}}$
5	$\frac{0.1 - 0.225z^{-1} + 0.175z^{-2} - 0.05469z^{-3} + 0.005859z^{-4} - 9.766e-5z^{-5}}{1 - 2.75z^{-1} + 2.75z^{-2} - 1.203z^{-3} + 0.2148z^{-4} - 0.01074z^{-5}}$
7	$\frac{0.1 - 0.325z^{-1} + 0.4125z^{-2} - 0.2578z^{-3} + 0.08203z^{-4} - 0.0123z^{-5} + 0.0006836z^{-6} - 6.104e-6z^{-7}}{1 - 3.75z^{-1} + 5.625z^{-2} - 4.297z^{-3} + 1.758z^{-4} - 0.3691z^{-5} + 0.03418z^{-6} - 0.0009155z^{-7}}$
9	$\frac{0.1 - 0.425z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.711z^{-3} + 0.391z^{-4} - 0.1257z^{-5} + 0.02256z^{-6} - 0.002014z^{-7} + 6.868e-5z^{-8} - 3.816e-7z^{-9}}{1 - 4.75z^{-1} + 9.5z^{-2} - 10.39z^{-3} + 6.754z^{-4} - 2.653z^{-5} + 0.6124z^{-6} - 0.07655z^{-7} + 0.004349z^{-8} - 7.249e-5z^{-9}}$

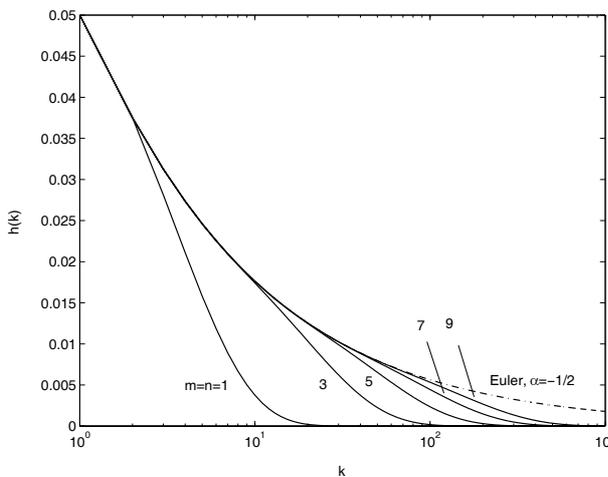
Tabela 4. 3: Aproximações de Padé ao operador de Tustin para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.07071 + 0.03536z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$
3	$\frac{0.07071 + 0.03536z^{-1} - 0.03536z^{-2} - 0.008839z^{-3}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} + 0.125z^{-3}}$
5	$\frac{0.07071 + 0.03536z^{-1} - 0.07071z^{-2} - 0.02652z^{-3} + 0.01326z^{-4} + 0.00221z^{-5}}{1 - 0.5z^{-1} - z^{-2} + 0.375z^{-3} + 0.1875z^{-4} - 0.03125z^{-5}}$
7	$\frac{0.07071 + 0.03536z^{-1} - 0.1061z^{-2} - 0.04419z^{-3} + 0.04419z^{-4} + 0.01326z^{-5} - 0.004419z^{-6} - 0.0005524z^{-7}}{1 - 0.5z^{-1} - 1.5z^{-2} + 0.625z^{-3} + 0.625z^{-4} - 0.1875z^{-5} - 0.0625z^{-6} + 0.007813z^{-7}}$

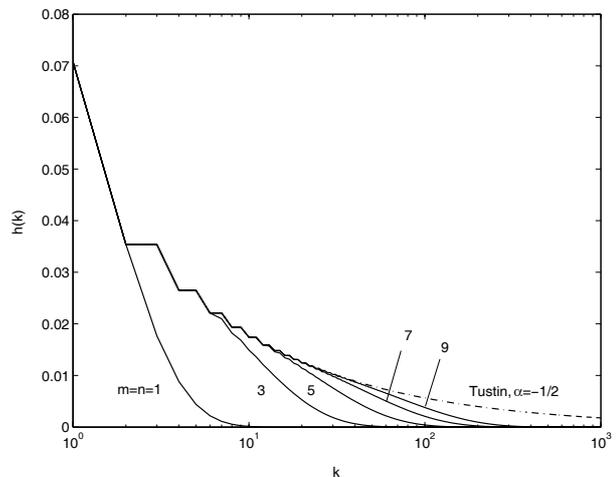
$$\begin{aligned}
 & 0.07071 + 0.03536z^{-1} - 0.1414z^{-2} - 0.061871z^{-3} + 0.09281z^{-4} + 0.03315z^{-5} \\
 & \frac{-0.0221z^{-6} - 0.005524z^{-7} + 0.001381z^{-8} + 0.0001381z^{-9}}{1 - 0.5z^{-1} - 2z^{-2} + 0.875z^{-3} + 1.312z^{-4} - 0.4688z^{-5} - 0.3125z^{-6} \\
 & \quad + 0.07813z^{-7} + 0.01953z^{-8} - 0.001953z^{-9}}
 \end{aligned}$$

Tabela 4. 4: Aproximações de Padé ao operador de Al-Alaoui para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.09354 - 0.01336z^{-1}}{1 - 0.7143z^{-1}}$
3	$\frac{0.09354 - 0.09354z^{-1} + 0.01336z^{-2} + 0.001909z^{-3}}{1 - 1.571z^{-1} + 0.6327z^{-2} - 0.0379z^{-3}}$
5	$\frac{0.09354 - 0.1737z^{-1} + 0.09545z^{-2} - 0.01145z^{-3} - 0.001987z^{-4} + 0.000128z^{-5}}{1 - 2.429z^{-1} + 2z^{-2} - 0.6122z^{-3} + 0.03873z^{-4} + 0.003986z^{-5}}$
7	$\frac{0.09354 - 0.2539z^{-1} + 0.2463z^{-2} - 0.09681z^{-3} + 0.009155z^{-4} + 0.002221z^{-5} - 0.0002393z^{-6} - 1.011e-5z^{-7}}{1 - 3.286z^{-1} + 4.102z^{-2} - 2.376z^{-3} + 0.5977z^{-4} - 0.03124z^{-5} - 0.0006842z^{-6} + 0.0003339z^{-7}}$
9	$\frac{0.09354 - 0.3341z^{-1} + 0.4658z^{-2} - 0.3131z^{-3} + 0.09654z^{-4} - 0.006445z^{-5} - 0.002592z^{-6} + 0.0003167z^{-7} + 1.702e-5z^{-8} - 1.059e-6z^{-9}}{1 - 4.143z^{-1} + 6.939z^{-2} - 5.959z^{-3} + 2.711z^{-4} - 0.5758z^{-5} + 0.0188z^{-6} + 0.0009641z^{-7} - 0.000684z^{-8} - 1.975e-5z^{-9}}$



a) Euler



b) Tustin

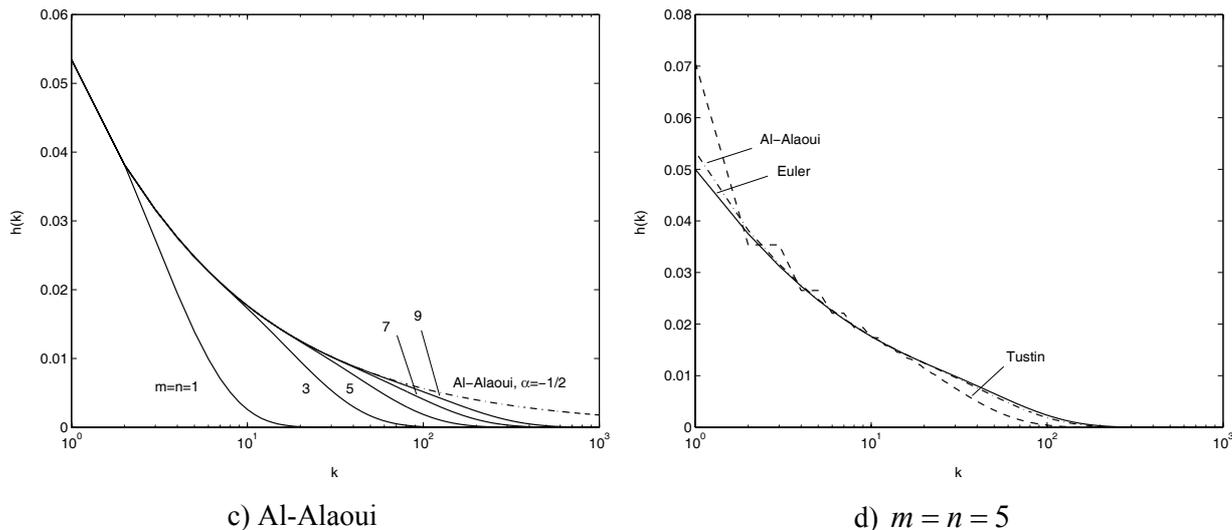


Figura 4.9 – Respostas impulsionais das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.

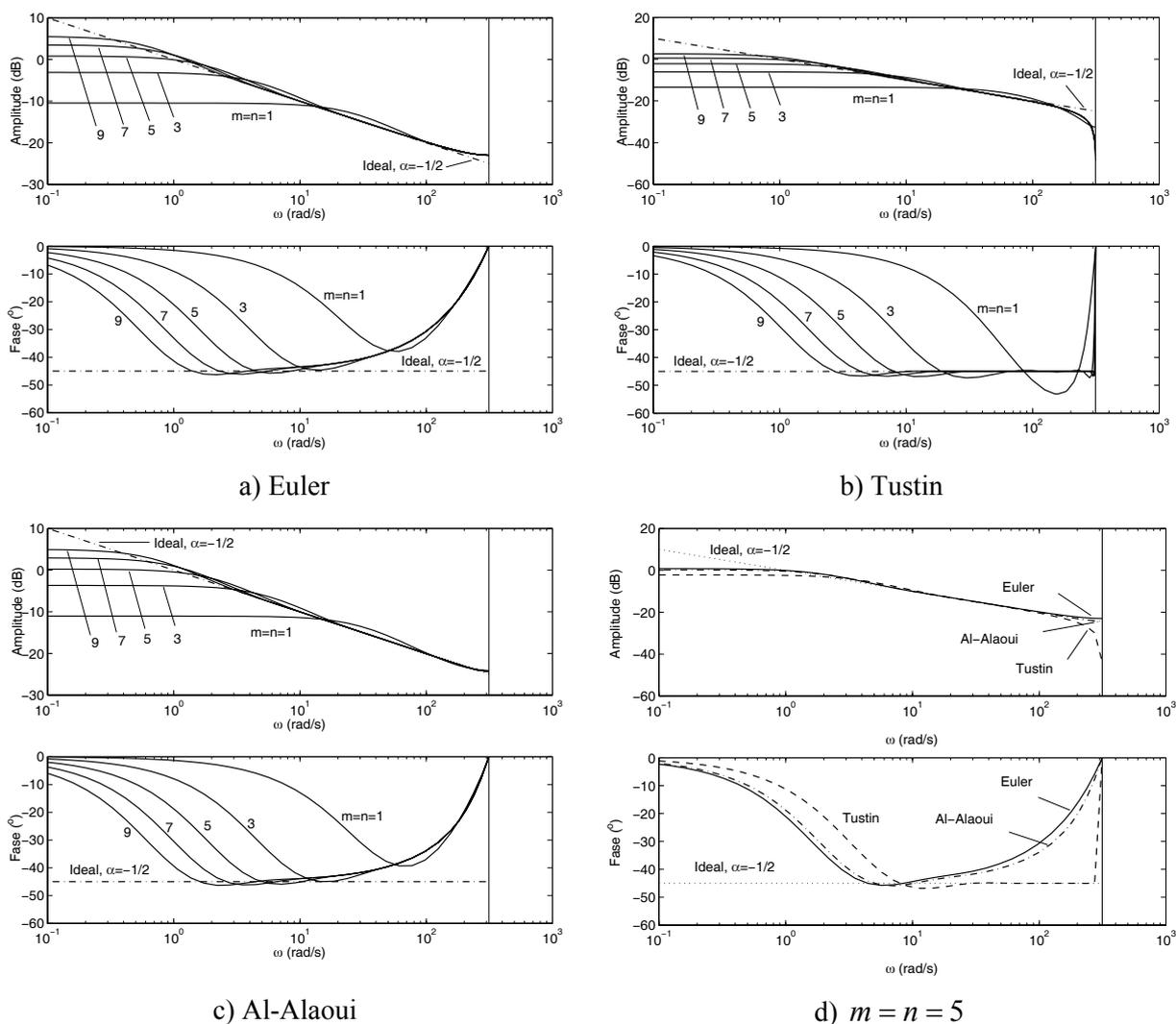


Figura 4.10 – Diagramas de Bode das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.

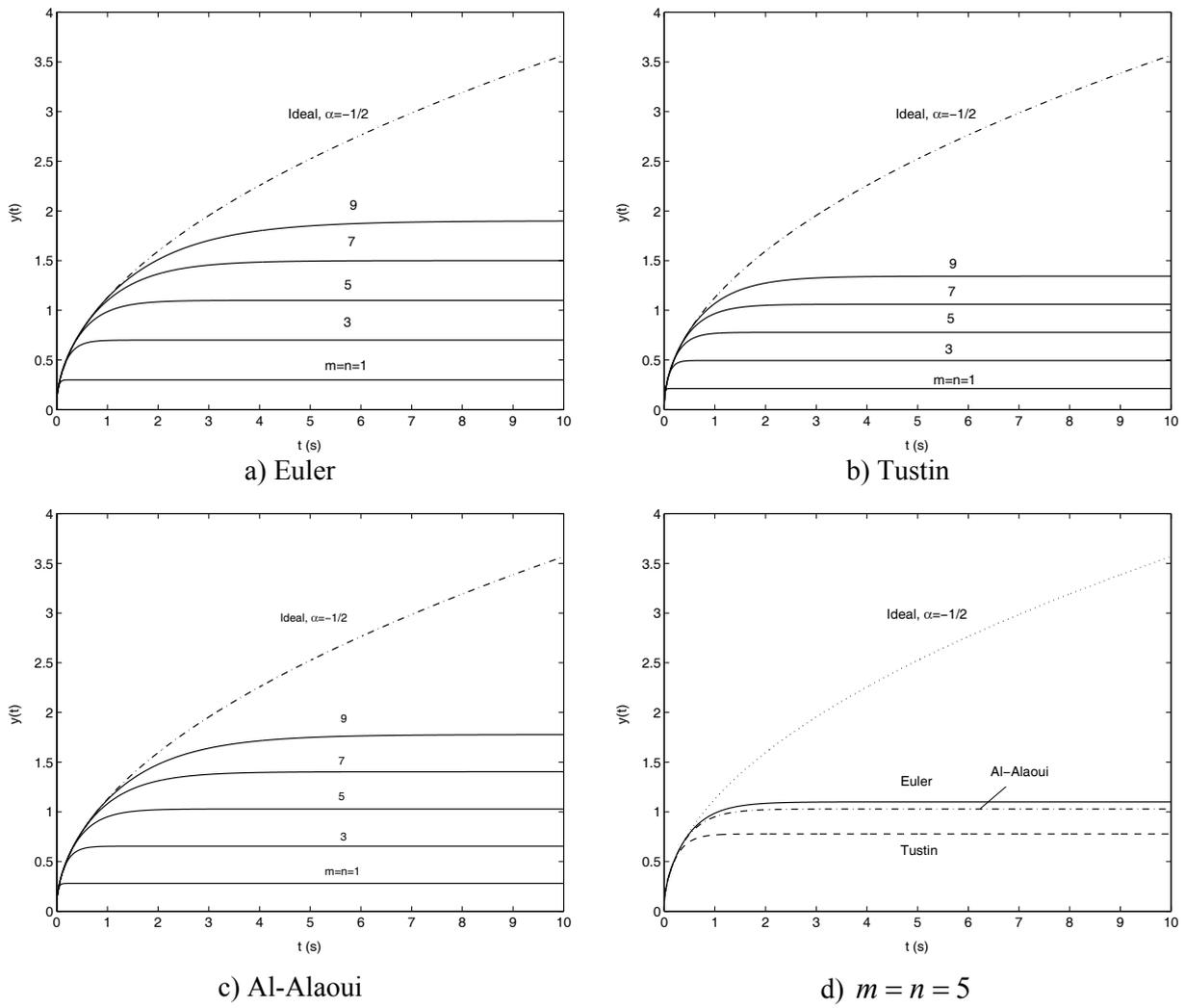
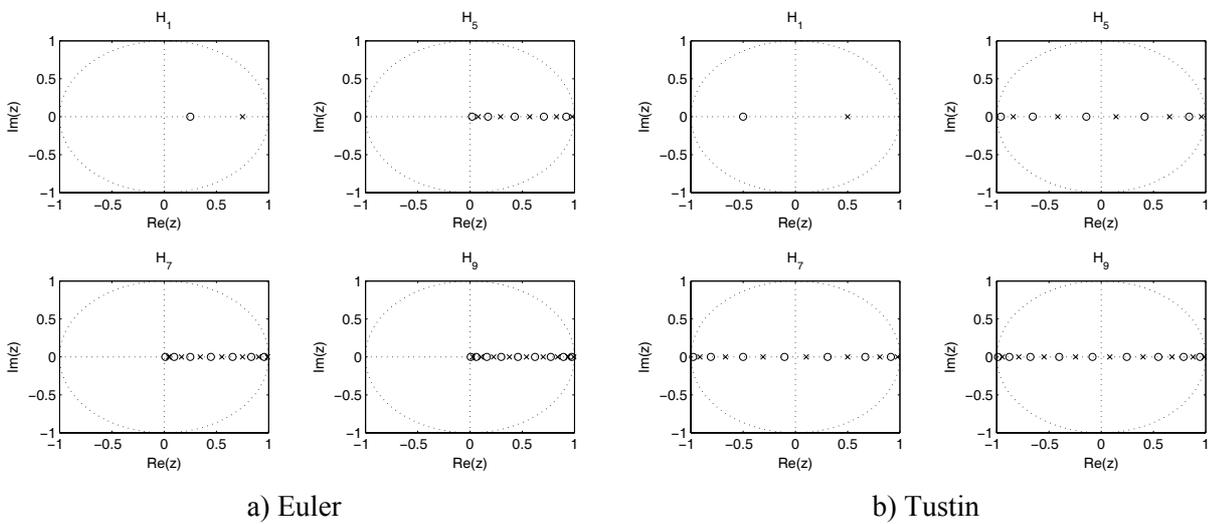
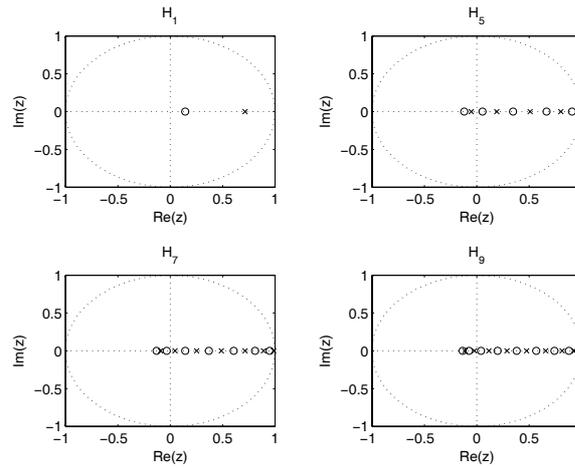


Figura 4.11 – Respostas ao degrau unitário das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.





c) Al-Alaoui

Figura 4.12 – Distribuição dos pólos e dos zeros das aproximações de Padé para $m = n = \{1, 5, 7, 9\}$ e $\alpha = -1/2$: a) Euler, b) Tustin e c) Al-Alaoui.

4.7.2 Aproximações de Prony

Tabela 4. 5: Aproximações de Prony ao operador de Euler para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.1 - 0.04397z^{-1}}{1 - 0.9397z^{-1}}$
3	$\frac{0.1 - 0.161z^{-1} + 0.06789z^{-2} - 0.004722z^{-3}}{1 - 2.11z^{-1} + 1.359z^{-2} - 0.2479z^{-3}}$
5	$\frac{0.1 - 0.2789z^{-1} + 0.2792z^{-2} - 0.1184z^{-3} + 0.01861z^{-4} - 0.0005166z^{-5}}{1 - 3.289z^{-1} + 4.062z^{-2} - 2.294z^{-3} + 0.5644z^{-4} - 0.04312z^{-5}}$
7	$\frac{0.1 - 0.3966z^{-1} + 0.6293z^{-2} - 0.5065z^{-3} + 0.2155z^{-4} - 0.04542z^{-5} + 0.003798z^{-6} - 5.645e-5z^{-7}}{1 - 4.466z^{-1} + 8.151z^{-2} - 7.778z^{-3} + 4.109z^{-4} - 1.164z^{-5} + 0.1544z^{-6} - 0.006461z^{-7}}$
9	$\frac{0.1 - 0.5143z^{-1} + 1.118z^{-2} - 1.331z^{-3} + 0.9427z^{-4} - 0.4018z^{-5} + 0.09919z^{-6} - 0.01275z^{-7} + 0.0006654z^{-8} - 6.151e-6z^{-9}}{1 - 5.643z^{-1} + 13.62z^{-2} - 18.32z^{-3} + 14.97z^{-4} - 7.593z^{-5} + 2.338z^{-6} - 0.4066z^{-7} + 0.03393z^{-8} - 0.0008948z^{-9}}$

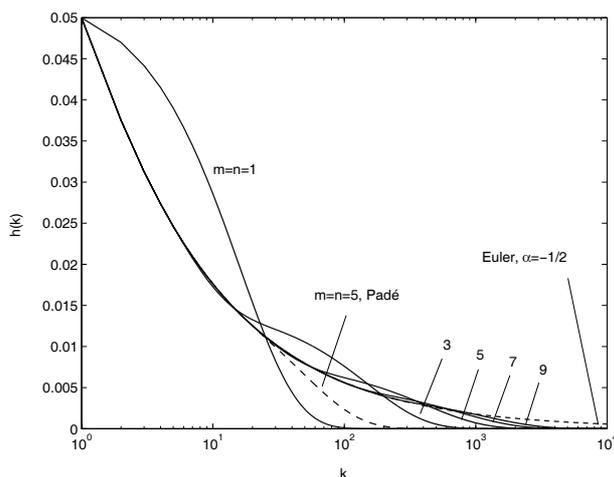
Tabela 4. 6: Aproximações de Prony ao operador de Tustin para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.07071 + 0.008843z^{-1}}{1 - 0.8749z^{-1}}$
3	$\frac{0.07071 + 0.005302z^{-1} - 0.05281z^{-2} - 0.001747z^{-3}}{1 - 0.925z^{-1} - 0.3218z^{-2} + 0.2596z^{-3}}$
5	$\frac{0.07071 + 0.004728z^{-1} - 0.09396z^{-2} - 0.004356z^{-3} + 0.02656z^{-4} + 0.0005193z^{-5}}{1 - 0.9331z^{-1} - 0.8957z^{-2} + 0.8007z^{-3} + 0.1144z^{-4} - 0.08461z^{-5}}$
7	$\frac{0.07071 + 0.004737z^{-1} - 0.1355z^{-2} - 0.007165z^{-3} + 0.0771z^{-4} + 0.00279z^{-5} - 0.0118z^{-6} - 0.0001729z^{-7}}{1 - 0.933z^{-1} - 1.483z^{-2} + 1.348z^{-3} + 0.5753z^{-4} - 0.4936z^{-5} - 0.04154z^{-6} + 0.02785z^{-7}}$
9	$\frac{0.07071 + 0.004989z^{-1} - 0.177z^{-2} - 0.01049z^{-3} + 0.1521z^{-4} + 0.007065z^{-5} - 0.05061z^{-6} - 0.001587z^{-7} + 0.004901z^{-8} + 6.038e-5z^{-9}}{1 - 0.9294z^{-1} - 2.074z^{-2} + 1.89z^{-3} + 1.388z^{-4} - 1.222z^{-5} - 0.3187z^{-6} + 0.2604z^{-7} + 0.01529z^{-8} - 0.009187z^{-9}}$

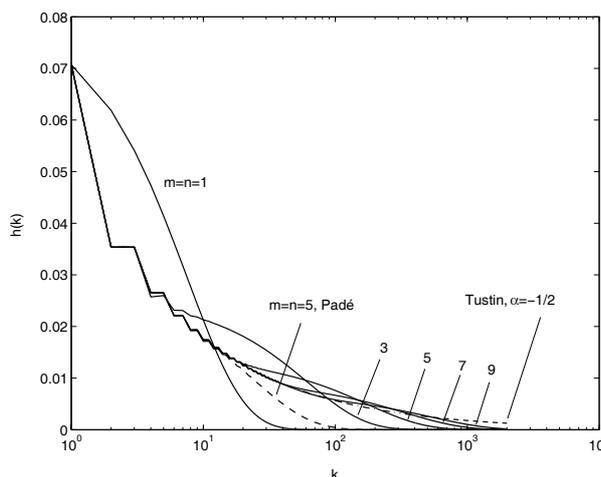
Tabela 4. 7: Aproximações de Prony ao operador de Al-Alaoui para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.09354 - 0.03368z^{-1}}{1 - 0.9315z^{-1}}$
3	$\frac{0.09354 - 0.1311z^{-1} + 0.03858z^{-2} + 0.002071z^{-3}}{1 - 1.973z^{-1} + 1.132z^{-2} - 0.1574z^{-3}}$
5	$\frac{0.09354 - 0.2294z^{-1} + 0.186z^{-2} - 0.05066z^{-3} - 0.0002193z^{-4} + 0.0007631z^{-5}}{1 - 3.023z^{-1} + 3.308z^{-2} - 1.536z^{-3} + 0.2528z^{-4} - 0.001467z^{-5}}$
7	$\frac{0.09354 - 0.3276z^{-1} + 0.4367z^{-2} - 0.2685z^{-3} + 0.06878z^{-4} - 0.001529z^{-5} - 0.001428z^{-6} + 4.645e-5z^{-7}}{1 - 4.074z^{-1} + 6.588z^{-2} - 5.31z^{-3} + 2.164z^{-4} - 0.3769z^{-5} + 0.0068z^{-6} + 0.002455z^{-7}}$

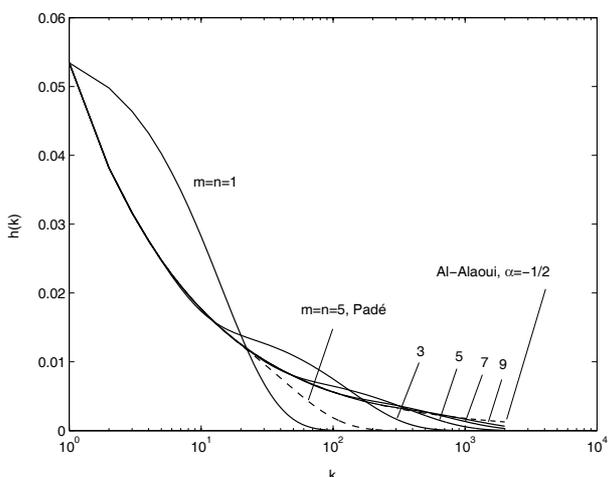
$$9 \frac{0.09354 - 0.4258z^{-1} + 0.7901z^{-2} - 0.7592z^{-3} + 0.3906z^{-4} - 0.09488z^{-5} + 0.003474z^{-6} + 0.002216z^{-7} - 0.0001825z^{-8} - 7.716e-6z^{-9}}{1 - 5.123z^{-1} + 10.97z^{-2} - 12.63z^{-3} + 8.355z^{-4} - 3.097z^{-5} + 0.5485z^{-6} - 0.01463z^{-7} - 0.006062z^{-8} + 0.0002832z^{-9}}$$



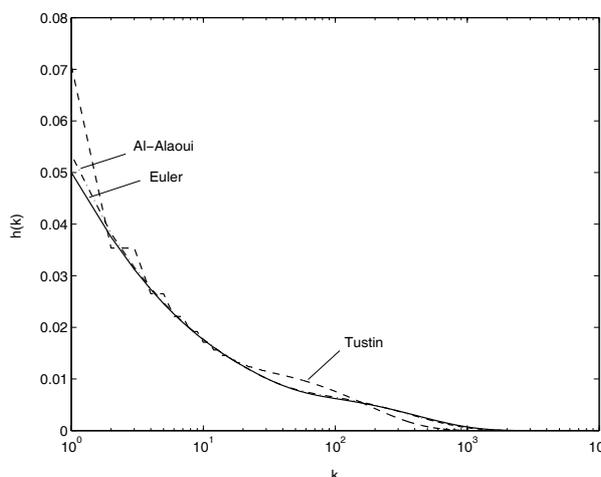
a) Euler



b) Tustin



c) Al-Alaoui



d) $m = n = 5$

Figura 4.13 – Respostas impulsionais das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.

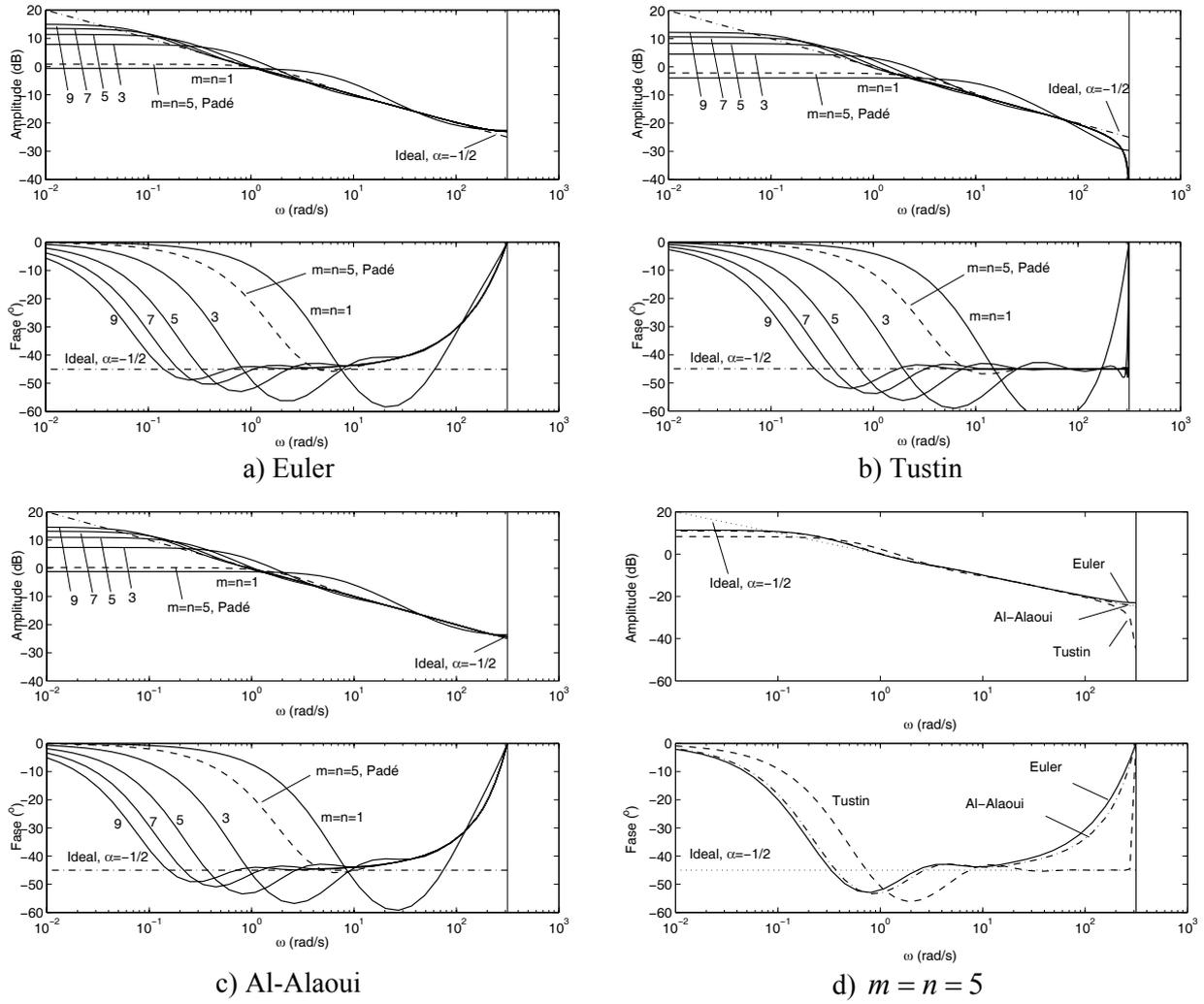
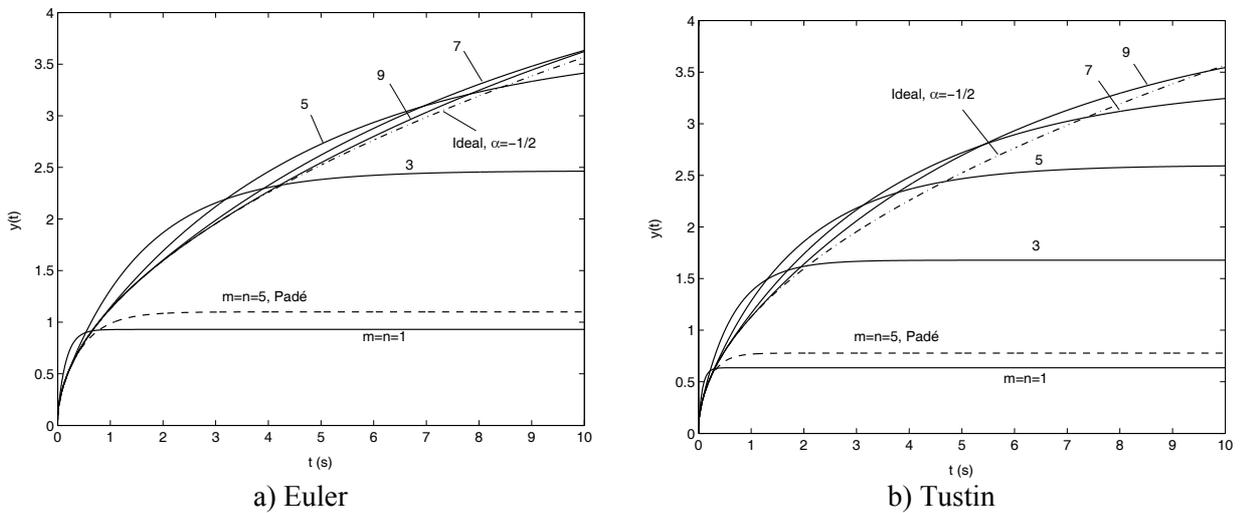


Figura 4.14 – Diagramas de Bode das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.



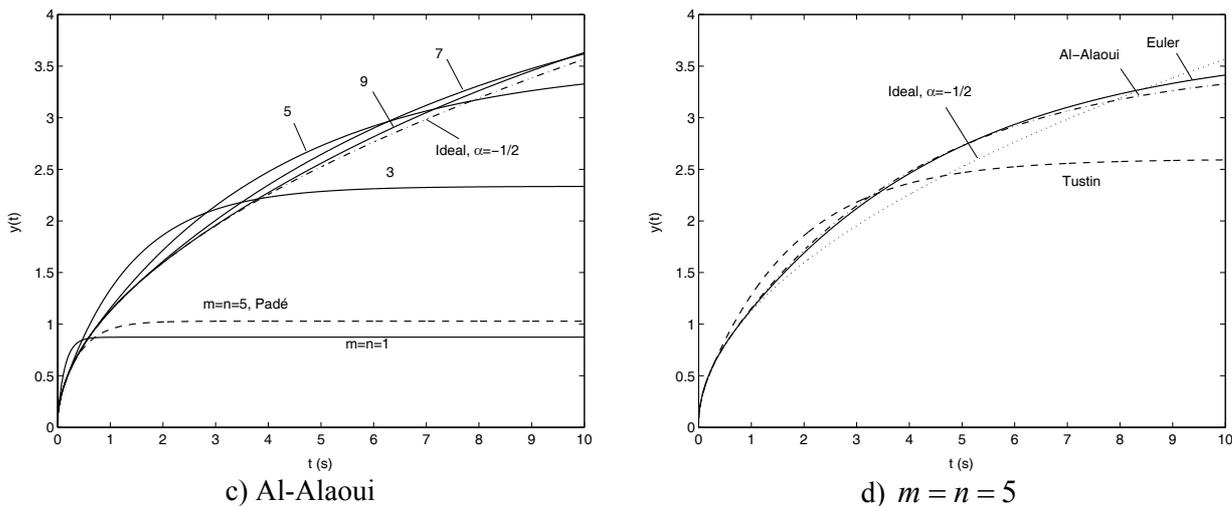


Figura 4.15 – Respostas ao degrau unitário das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.

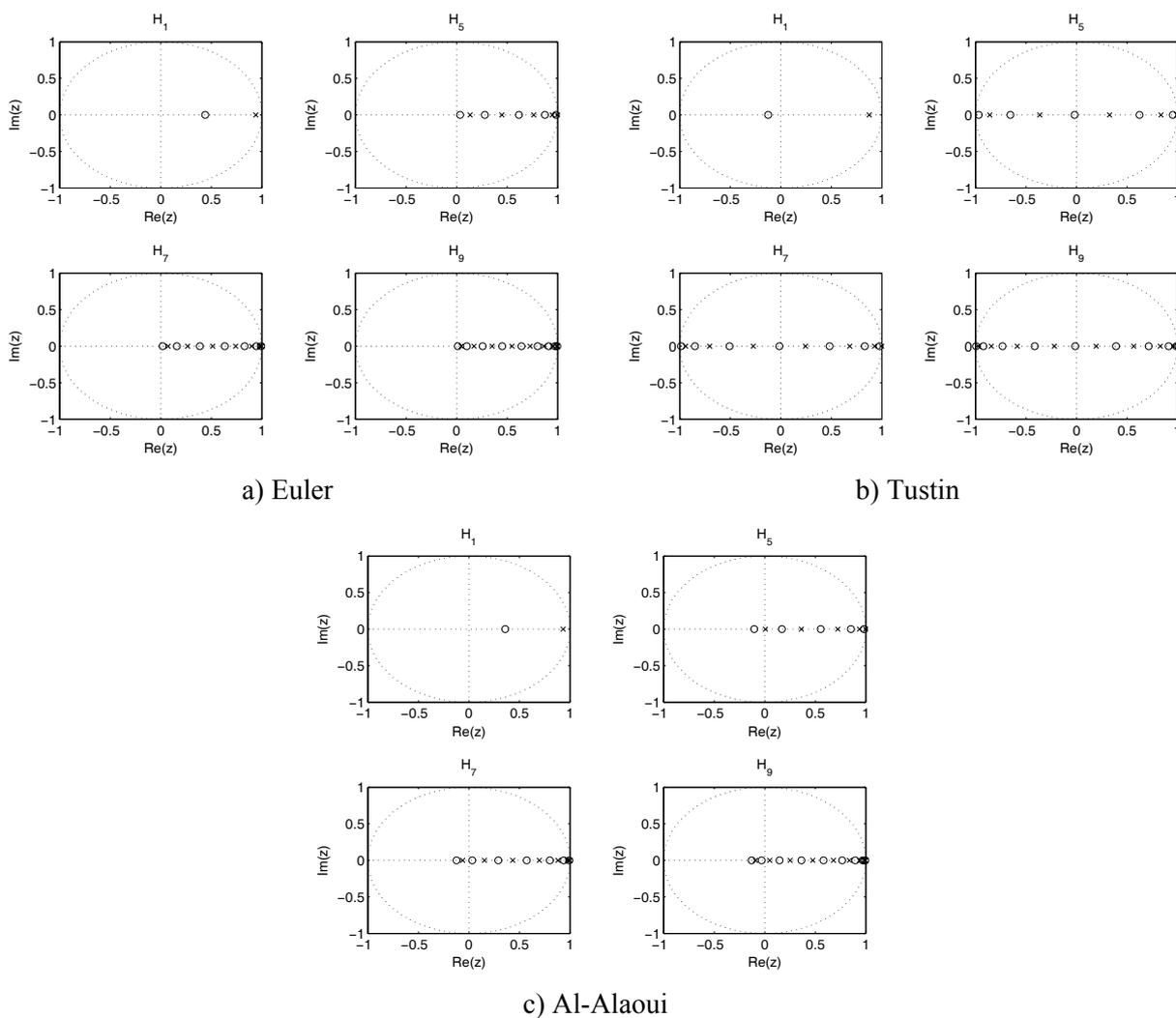


Figura 4.16 – Distribuição dos pólos e dos zeros das aproximações de Prony para $m = n = \{1, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin e c) Al-Alaoui.

4.7.3 Aproximações de Shanks

Tabela 4. 8: Aproximações de Shanks ao operador de Euler para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.1 - 0.05574z^{-1}}{1 - 0.9397z^{-1}}$
3	$\frac{0.1 - 0.1614z^{-1} + 0.06977z^{-2} - 0.006386z^{-3}}{1 - 2.11z^{-1} + 1.359z^{-2} - 0.2479z^{-3}}$
5	$\frac{0.1 - 0.2789z^{-1} + 0.2795z^{-2} - 0.1192z^{-3} + 0.01956z^{-4} - 0.0009311z^{-5}}{1 - 3.289z^{-1} + 4.062z^{-2} - 2.294z^{-3} + 0.5644z^{-4} - 0.04312z^{-5}}$
7	$\frac{0.1 - 0.3966z^{-1} + 0.6293z^{-2} - 0.5067z^{-3} + 0.2161z^{-4} - 0.04641z^{-5} + 0.004525z^{-6} - 0.000266z^{-7}}{1 - 4.466z^{-1} + 8.151z^{-2} - 7.778z^{-3} + 4.109z^{-4} - 1.164z^{-5} + 0.1544z^{-6} - 0.006461z^{-7}}$
9	$\frac{0.1 - 0.5143z^{-1} + 1.118z^{-2} - 1.331z^{-3} + 0.943z^{-4} - 0.4024z^{-5} + 0.1002z^{-6} - 0.01369z^{-7} + 0.001148z^{-8} - 0.0001101z^{-9}}{1 - 5.643z^{-1} + 13.62z^{-2} - 18.32z^{-3} + 14.97z^{-4} - 7.593z^{-5} + 2.338z^{-6} - 0.4066z^{-7} + 0.03393z^{-8} - 0.0008948z^{-9}}$

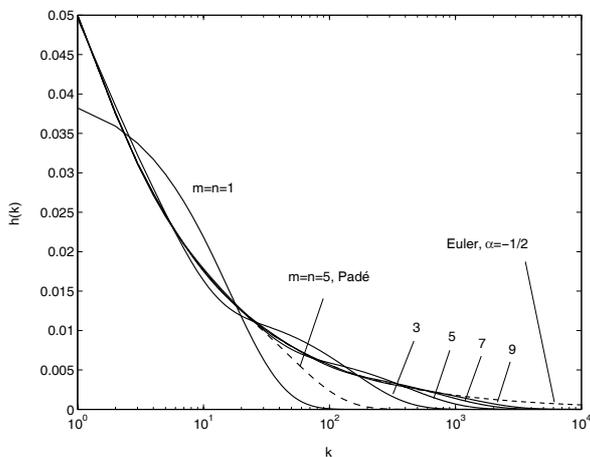
Tabela 4. 9: Aproximações de Shanks ao operador de Tustin para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$.

$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.07071 - 0.007443z^{-1}}{1 - 0.8749z^{-1}}$
3	$\frac{0.07071 + 0.006379z^{-1} - 0.053z^{-2} - 0.005851z^{-3}}{1 - 0.925z^{-1} - 0.3218z^{-2} + 0.2596z^{-3}}$
5	$\frac{0.07071 + 0.004612z^{-1} - 0.09393z^{-2} - 0.003218z^{-3} + 0.02651z^{-4} - 0.0008494z^{-5}}{1 - 0.9331z^{-1} - 0.8957z^{-2} + 0.8007z^{-3} + 0.1144z^{-4} - 0.08461z^{-5}}$
7	$\frac{0.07071 + 0.004752z^{-1} - 0.1355z^{-2} - 0.007437z^{-3} + 0.07712z^{-4} + 0.00355z^{-5} - 0.01183z^{-6} - 0.00071z^{-7}}{1 - 0.933z^{-1} - 1.483z^{-2} + 1.348z^{-3} + 0.5753z^{-4} - 0.4936z^{-5} - 0.04154z^{-6} + 0.02785z^{-7}}$

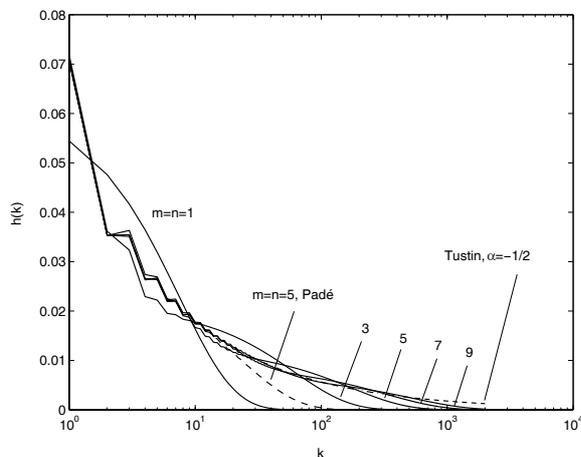
9	$\frac{0.07071 + 0.004986z^{-1} - 0.177z^{-2} - 0.01041z^{-3} + 0.1521z^{-4} + 0.006673z^{-5} - 0.05058z^{-6} - 0.0009699z^{-7} + 0.004885z^{-8} - 0.0002478z^{-9}}{1 - 0.9294z^{-1} - 2.074z^{-2} + 1.89z^{-3} + 1.388z^{-4} - 1.222z^{-5} - 0.3187z^{-6} + 0.2604z^{-7} + 0.01529z^{-8} - 0.009187z^{-9}}$
---	--

Tabela 4. 10: Aproximações de Shanks ao operador de Al-Alaoui para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$.

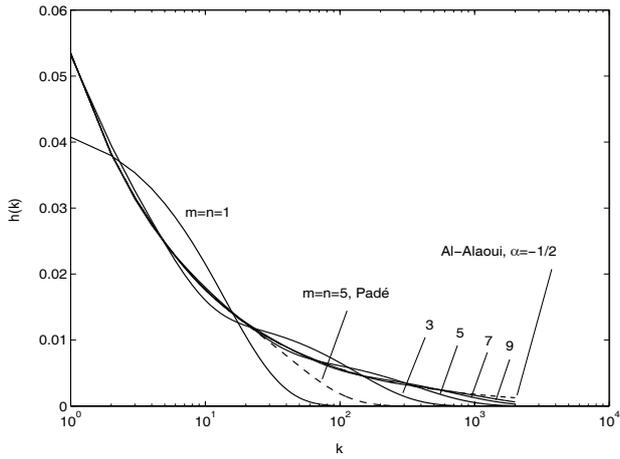
$m=n$	Função racional, $H(z^{-1})$
1	$\frac{0.09354 - 0.04639z^{-1}}{1 - 0.9315z^{-1}}$
3	$\frac{0.09354 - 0.1314z^{-1} + 0.04051z^{-2} + 0.0001285z^{-3}}{1 - 1.973z^{-1} + 1.132z^{-2} - 0.1574z^{-3}}$
5	$\frac{0.09354 - 0.2294z^{-1} + 0.1862z^{-2} - 0.05129z^{-3} + 0.0007569z^{-4} + 0.0002833z^{-5}}{1 - 3.023z^{-1} + 3.308z^{-2} - 1.536z^{-3} + 0.2528z^{-4} - 0.001467z^{-5}}$
7	$\frac{0.09354 - 0.3276z^{-1} + 0.4367z^{-2} - 0.2686z^{-3} + 0.06921z^{-4} - 0.002369z^{-5} - 0.0006936z^{-6} - 0.0001921z^{-7}}{1 - 4.074z^{-1} + 6.588z^{-2} - 5.31z^{-3} + 2.164z^{-4} - 0.3769z^{-5} + 0.0068z^{-6} + 0.002455z^{-7}}$
9	$\frac{0.09354 - 0.4258z^{-1} + 0.7901z^{-2} - 0.7592z^{-3} + 0.3907z^{-4} - 0.09522z^{-5} + 0.004213z^{-6} + 0.001341z^{-7} + 0.0003441z^{-8} - 0.0001354z^{-9}}{1 - 5.123z^{-1} + 10.97z^{-2} - 12.63z^{-3} + 8.355z^{-4} - 3.097z^{-5} + 0.5485z^{-6} - 0.01463z^{-7} - 0.006062z^{-8} + 0.0002832z^{-9}}$



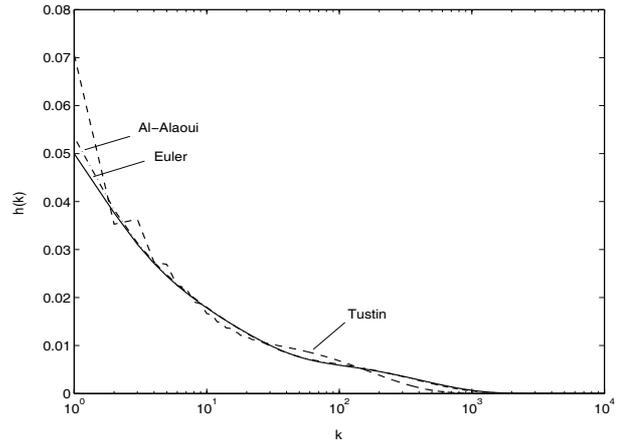
a) Euler



b) Tustin

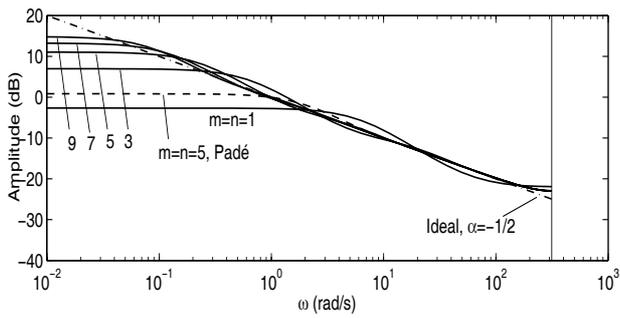


c) Al-Alaoui

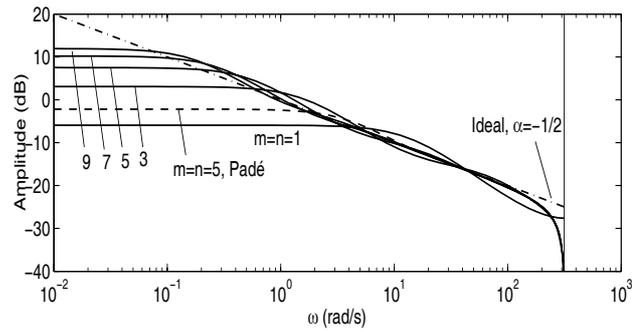


d) $m=n=5$

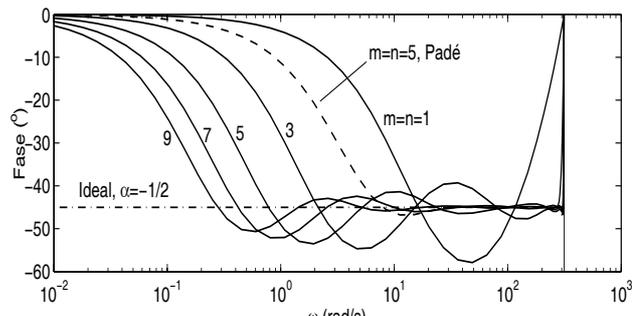
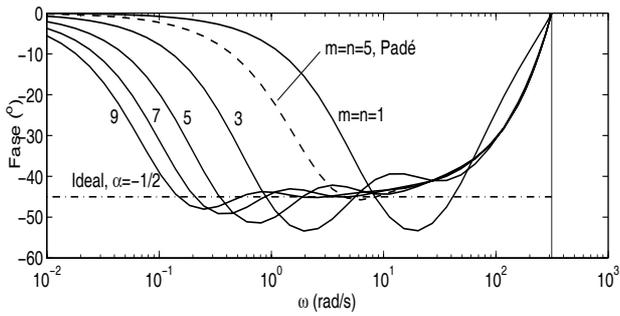
Figura 4.17 – Respostas impulsionais das aproximações de Shanks para $m=n=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha=-1/2$ e $N=1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m=n=5$.



a) Euler



b) Tustin



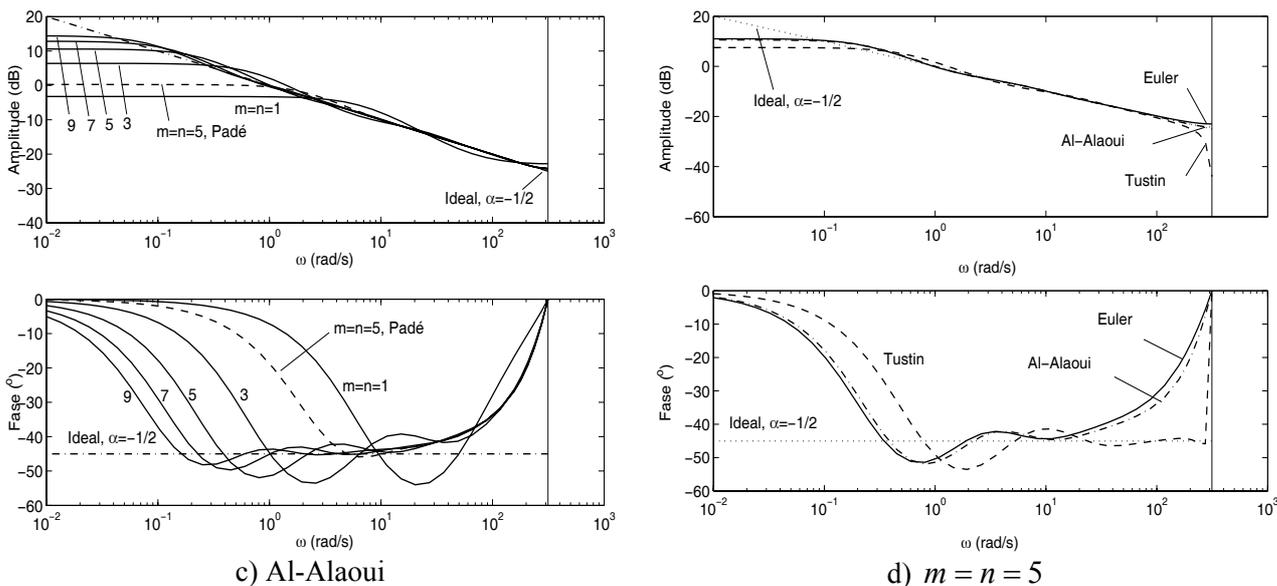


Figura 4.18 – Diagramas de Bode das aproximações de Shanks para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.

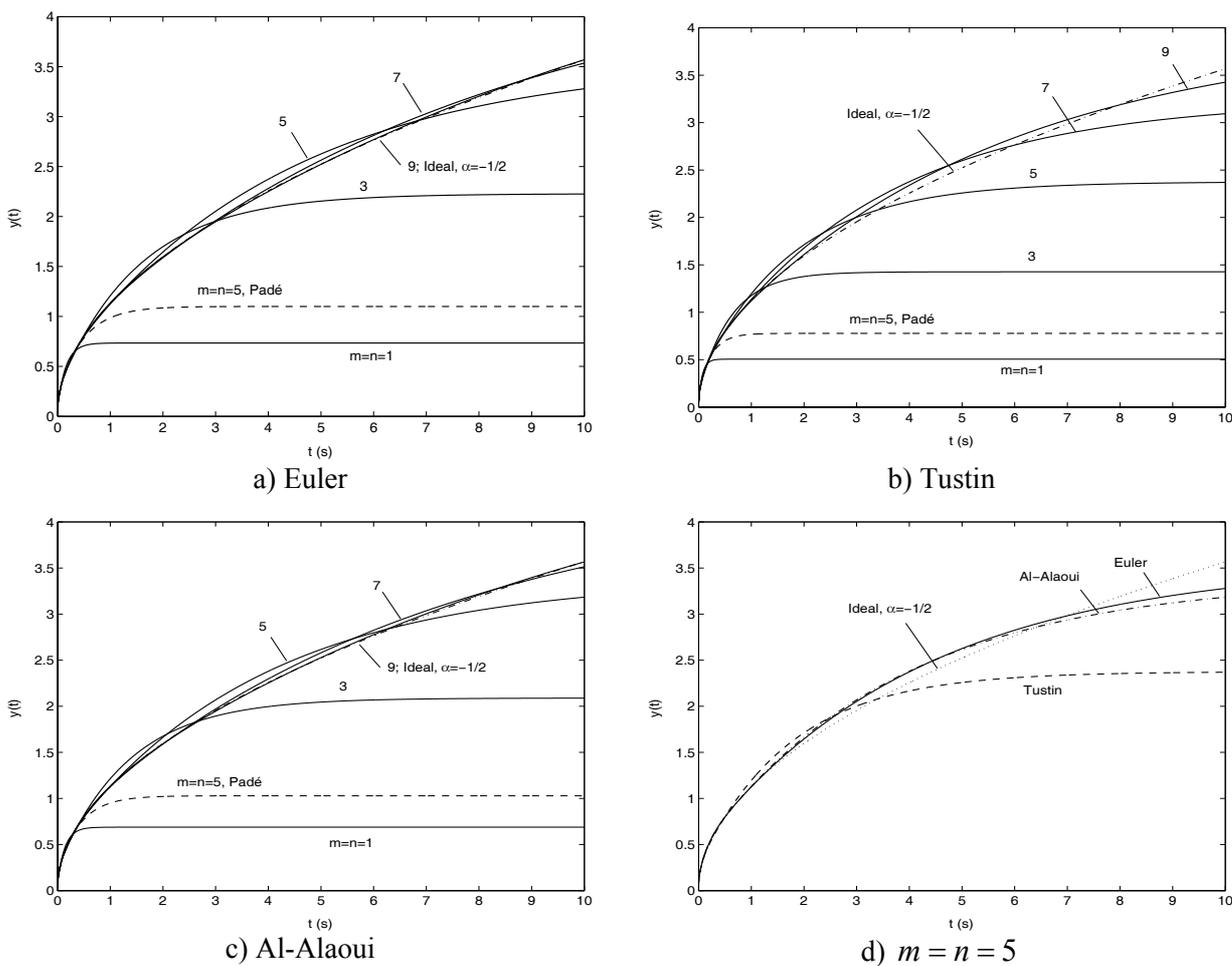


Figura 4.19 – Respostas ao degrau unitário das aproximações de Shanks para $m = n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin, c) Al-Alaoui e d) Os três operadores para $m = n = 5$.

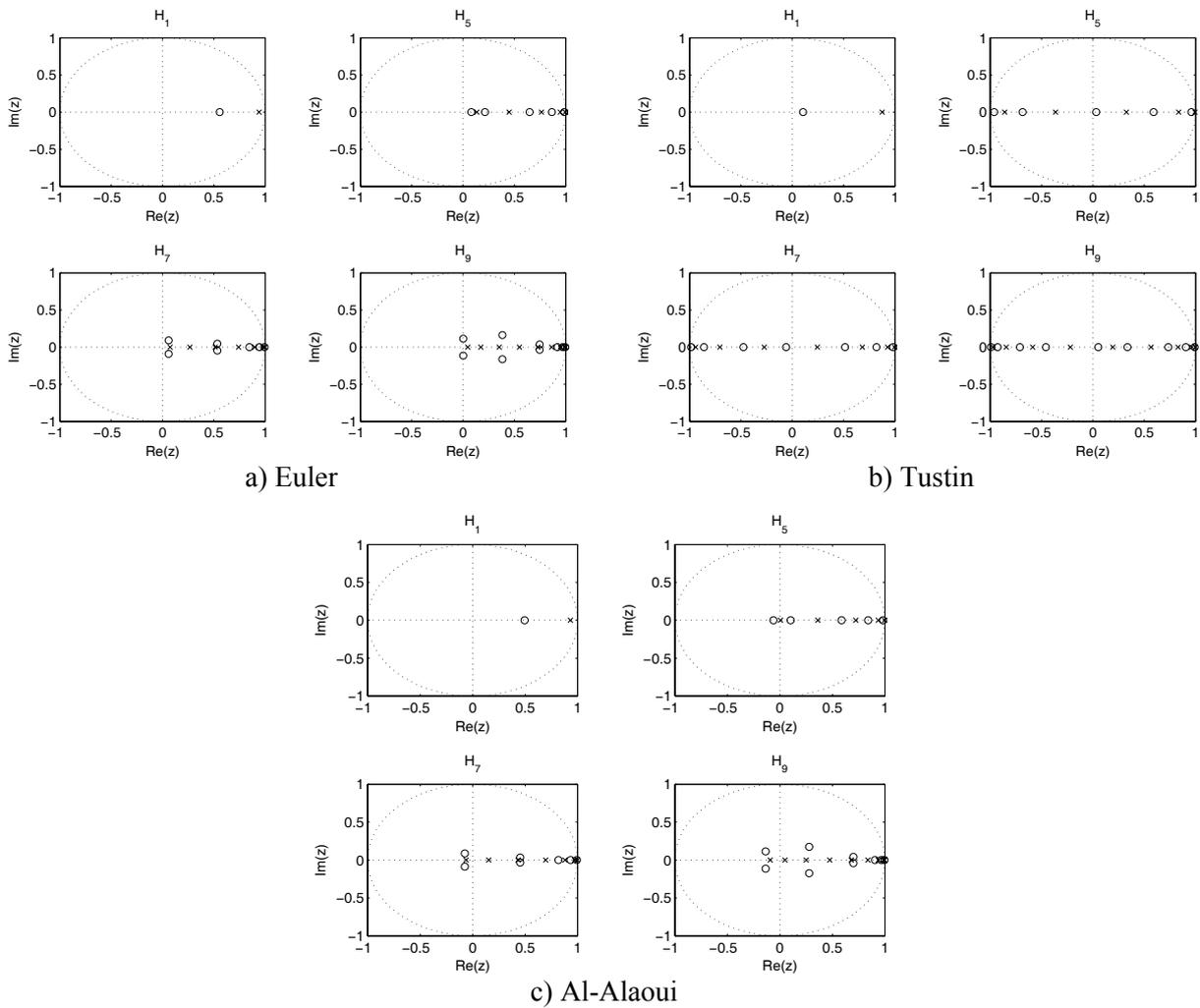


Figura 4.20 – Distribuição dos pólos e dos zeros das aproximações de Shanks para $m = n = \{1, 5, 7, 9\}$, $\alpha = -1/2$ e $N = 1000$: a) Euler, b) Tustin e c) Al-Alaoui.

4.7.4 Observações Sobre os Resultados Obtidos

Como seria de esperar, verifica-se que quanto maior é a ordem $m = n$ das aproximações melhor é o desempenho destas em se ajustarem às curvas ideais, tanto no domínio das frequências como no domínio dos tempos. Nota-se ainda que as aproximações de Prony e de Shanks possuem um melhor desempenho às baixas frequências (resposta em regime permanente) do que as aproximações de Padé (ou de CFE). Este facto pode ser justificado pois os métodos de Prony e de Shanks são baseados na minimização do erro quadrático considerando toda (ou grande parte) da sequência impulsional no intervalo $[0; N - 1]$, em contraste com o método de Padé (ou de CFE) que produz um ajuste perfeito para os primeiros

$m+n+1$ valores da resposta impulsional $h^\alpha(k)$, sem que haja uma garantia sobre a qualidade da aproximação para valores de $k > m+n$.

Os mapas da distribuição dos pólos e dos zeros mostram que as aproximações satisfazem duas propriedades desejadas:

- i) Todos os pólos e zeros encontram-se dentro do círculo unitário;
- ii) Os pólos e os zeros estão intercalados ao longo do eixo real correspondendo a $z \in]-1; 1[$ para os operadores de Tustin e de Al-Alaoui e $z \in]0; 1[$ para o operador de Euler.

Portanto, constata-se que as aproximações obtidas são estáveis e de fase mínima. Contudo, para as aproximações de Shanks, e no caso dos operadores de Euler e de Al-Alaoui, nota-se o aparecimento de pares de zeros complexos conjugados que aumentam a partir da ordem da aproximação $m = n = 7$. O aparecimento deste tipo de zeros está relacionado com o elevado número de amostras utilizadas. Para se obter uma distribuição alternada dos pólos e dos zeros ao longo do eixo real, ter-se-ia, neste caso, que diminuir o valor de N . Este facto está, obviamente, relacionado com a razão de convergência das sequências impulsiais dos operadores de Euler e de Al-Alaoui, aspectos já referidos na secção 4.4. Os valores das amostras possuem um peso desprezável para o comprimento de $N = 1000$ considerado nesta análise, o que poderá causar alguns problemas numéricos. De salientar, que esta correspondência entre os dois operadores é esperada, dado que o Al-Alaoui é uma interpolação pesada de $3/4$ do Euler e somente $1/4$ do Tustin (ver secção 4.2). No caso do operador de Tustin, verifica-se uma distribuição alternada dos pólos e dos zeros ao longo do eixo real em todos os casos estudados. De notar que o operador de Tustin possui uma razão de convergência mais lenta que nos casos dos operadores de Euler e de Al-Alaoui (ver secção 4.4). Deste modo, aconselha-se sempre a verificação das aproximações geradas para as características pretendidas e, se necessário, ajustar tanto o comprimento da sequência impulsional como a ordem das funções racionais.

Através da análise das aproximações racionais (Tabelas 4.2–4.10), verifica-se que a soma dos coeficientes do numerador b_k e do denominador a_k tomam um valor aproximadamente igual a zero:

$$\sum_{k=0}^m b_k = \sum_{k=0}^n a_k \approx 0 \quad (4.90)$$

Em conclusão, os métodos propostos, baseados nas técnicas de modelação de sinal, fornecem aproximações digitais racionais causais, estáveis e de fase mínima, adequadas para uma implementação digital. Mais ainda, os resultados obtidos revelam que a abordagem pelos mínimos quadrados é uma técnica viável gerando aproximações superiores face a outros métodos existentes.

4.8 Desempenho das Aproximações Digitais no Cálculo de Derivadas e Integrais Fraccionários de Funções Temporais

Nesta secção testa-se o desempenho das aproximações digitais racionais no domínio dos tempos. Estas são obtidas por intermédio da aplicação das técnicas de modelação de sinal propostas na secção 4.5. Para isso, utilizam-se as aproximações digitais para calcular a derivada e/ou integral fraccionários dos sinais degrau unitário, onda quadrada e triangular, e seno e coseno. Estas funções são definidas da seguinte forma ($t \geq 0$):

- O degrau unitário (ou função de Heaviside) que ocorre para $t = t_0$ é dada por:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (4.91)$$

- As ondas quadrada e triangular, $qua(t)$ e $tri(t)$, são definidas em termos da função degrau unitário (4.91), sendo dadas respectivamente por (Oldham e Spanier, 1974; Abramowitz e Stegun, 1974):

$$qua(t) = u(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u(t-2k) \quad (4.92)$$

$$tri(t) = tu(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (t-2k+1)u(t-2k+1) \quad (4.93)$$

- As funções seno e coseno (causais) são dadas na forma:

$$s(t) = \sin(t)u(t) \tag{4.94}$$

$$c(t) = \cos(t)u(t) \tag{4.95}$$

em que $u(t)$ representa a função degrau unitário (4.91) com $t_0 = 0$.

As derivadas e integrais fraccionários de ordem α , $D^\alpha (t > 0, \alpha \in \mathbb{R})$, das funções de (4.91)–(4.93) são dadas respectivamente por (Oldham e Spanier, 1974; Miller e Ross, 1993; Podlubny, 1999b):

$$D^\alpha [u(t-t_0)] = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & t > t_0 \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{4.96}$$

$$D^\alpha [qua(t)] = u(t) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} u(t-2k) (-1)^k \frac{(t-2k)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{4.97}$$

$$D^\alpha [tri(t)] = u(t) \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} u(t-2k+1) (-1)^k \frac{(t-2k+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \tag{4.98}$$

Para as funções seno (4.94) e coseno (4.95) calculam-se as semiderivadas ($\alpha = 1/2$) e os semi-integrais ($\alpha = -1/2$), as quais são dadas através das expressões (Oldham e Spanier, 1974):

$$D^{1/2} \begin{cases} \sin(t) \\ \cos(t) \end{cases} = \begin{cases} \sin(t + \pi/4) - \sqrt{2}g(\sqrt{2t/\pi}) \\ 1/\sqrt{\pi t} + \cos(t + \pi/4) - \sqrt{2}f(\sqrt{2t/\pi}) \end{cases} \tag{4.99}$$

$$D^{-1/2} \begin{cases} \sin(t) \\ \cos(t) \end{cases} = \begin{cases} \sin(t - \pi/4) + \sqrt{2}f(\sqrt{2t/\pi}) \\ \cos(t - \pi/4) - \sqrt{2}g(\sqrt{2t/\pi}) \end{cases} \tag{4.100}$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ são as funções auxiliares dos integrais de Fresnel (ver Anexo A – Funções Especiais do Cálculo Fraccionário). Nas expressões (4.99) e (4.100), os termos em $\sin(x)$ e $\cos(x)$ representam as *componentes em regime permanente da função* enquanto que os restantes termos se anulam à medida que t tende para infinito (*i.e.*, são as *componentes em regime transitório da função*). De facto, considerando $t \rightarrow \infty$, as funções (4.99) e (4.100) podem ser agrupadas numa só, sendo dadas, de uma forma genérica, através das expressões ($-1 < \alpha < 1$):

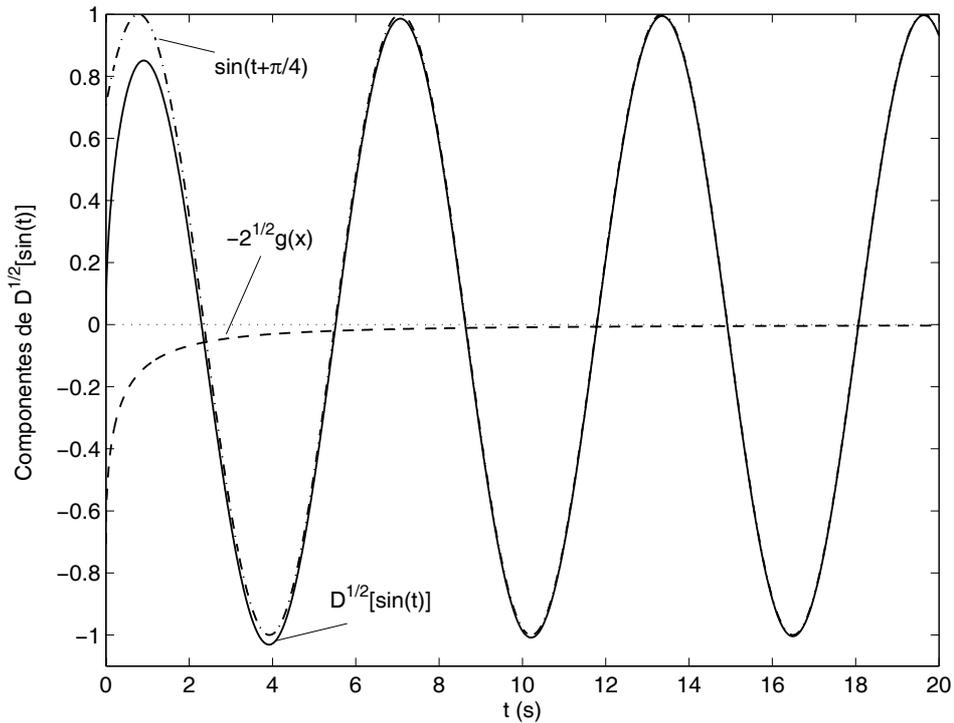


Figura 4.21 – Ilustração das componentes presentes no cálculo da semiderivada da função $\sin(t)$.

$$D^\alpha \begin{cases} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{cases} = \begin{cases} \omega^\alpha \sin\left(\omega t + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ \omega^\alpha \cos\left(\omega t + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (4.101)$$

Como exemplo, a Figura 4.21 mostra as diferentes componentes presentes no cálculo da semiderivada ($\alpha = 1/2$) da função $\sin(t)$, dada pela expressão analítica da equação (4.99), em que $x = \sqrt{2t/\pi}$.

A Figura 4.22 mostra a função degrau unitário $u(t-1)$ ($t_0 = 1$) juntamente com os correspondentes semi-integral ($\alpha = -1/2$) e semiderivada ($\alpha = 1/2$), ambos calculados através da expressão (4.96). O gráfico ilustra também os respectivos integral e derivada fracionários do degrau unitário calculados através das aproximações de Prony ao operador de Al-Alaoui para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. A aproximação $H_7(z)$ para $\alpha = -1/2$ está listada na Tabela 4.7. Para $\alpha = 1/2$ a aproximação $F_7(z)$ é dada por:

$$F_7(z) = \frac{10.69 - 41.41z^{-1} + 63.12z^{-2} - 47.31z^{-3} + 17.47z^{-4} - 2.557z^{-5} - 0.02519z^{-6} + 0.01857z^{-7}}{1 - 3.302z^{-1} + 4.099z^{-2} - 2.294z^{-3} + 0.5003z^{-4} + 0.007948z^{-5} - 0.01106z^{-6} + 0.0001524z^{-7}} \quad (4.102)$$

Como se pode observar, as curvas ideais (dadas pelas expressões analíticas (4.96)) e as calculadas através das aproximações racionais $H_7(z)$ e $F_7(z)$ encontram-se numa quase concordância, demonstrando a sua eficácia no cálculo das derivadas e integrais fraccionários. No entanto, nota-se que o ajuste é mais perfeito para valores de t pequenos (*i.e.*, próximo de $t \rightarrow t_0$). Assim, para se obter um melhor ajuste a valores de t elevados (*i.e.*, para $t \gg t_0$), ter-se-á, nesse caso, de aumentar o tempo de amostragem T . Contudo, isto leva à diminuição da precisão das aproximações em torno de $t = t_0$. Deste modo, há que estabelecer um compromisso entre estes dois factores que, por sua vez, dependem da utilização das referidas aproximações. Pode-se ainda sintonizar a ordem $m = n$ das aproximações em simultâneo com o tempo de amostragem T por forma a obter-se uma melhor concordância entre as duas curvas (a ideal e a aproximada). Estas observações continuam válidas para os exemplos a seguir apresentados.

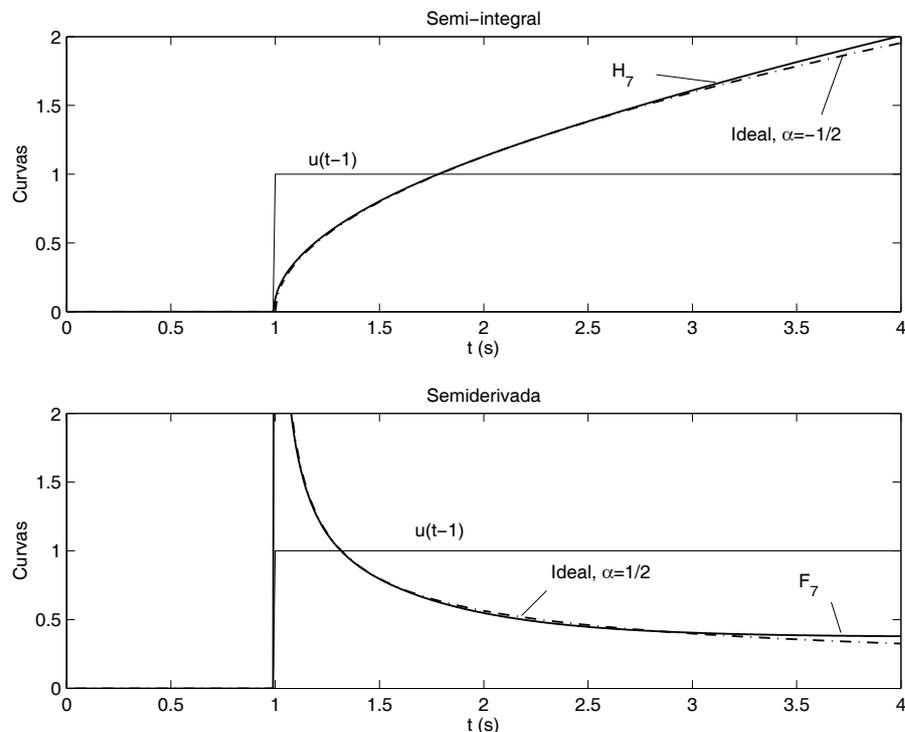


Figura 4.22 – Semi-integral e semiderivada da função degrau $u(t-1)$ com a aproximação de Prony ao operador de Al-Alaoui para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários.

A Figura 4.23 mostra a função onda quadrada $qua(t)$ juntamente com os correspondentes semi-integral ($\alpha = -1/2$) e semiderivada ($\alpha = 1/2$), ambos calculados através da expressão (4.97). O gráfico ilustra também os respectivos integral e derivada fraccionários da onda quadrada calculados através de aproximações de Shanks ao operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. A aproximação $H_7(z)$ para $\alpha = -1/2$ está listada na Tabela 4.8. Para $\alpha = 1/2$ a aproximação $F_7(z)$ é dada por:

$$F_7(z) = \frac{10 - 43.02z^{-1} + 75.31z^{-2} - 68.59z^{-3} + 34.38z^{-4} - 9.162z^{-5} + 1.129z^{-6} - 0.04301z^{-7}}{1 - 3.802z^{-1} + 5.755z^{-2} - 4.395z^{-3} + 1.761z^{-4} - 0.3463z^{-5} + 0.02663z^{-6} - 0.0003561z^{-7}} \quad (4.103)$$

Analisando as curvas, constata-se, mais uma vez, o bom desempenho das aproximações no cálculo das correspondentes derivada e integral fraccionários.

A Figura 4.24 mostra a função onda triangular $tri(t)$ juntamente com os correspondentes semi-integral ($\alpha = -1/2$) e semiderivada ($\alpha = 1/2$), ambos calculados através da expressão (4.98).

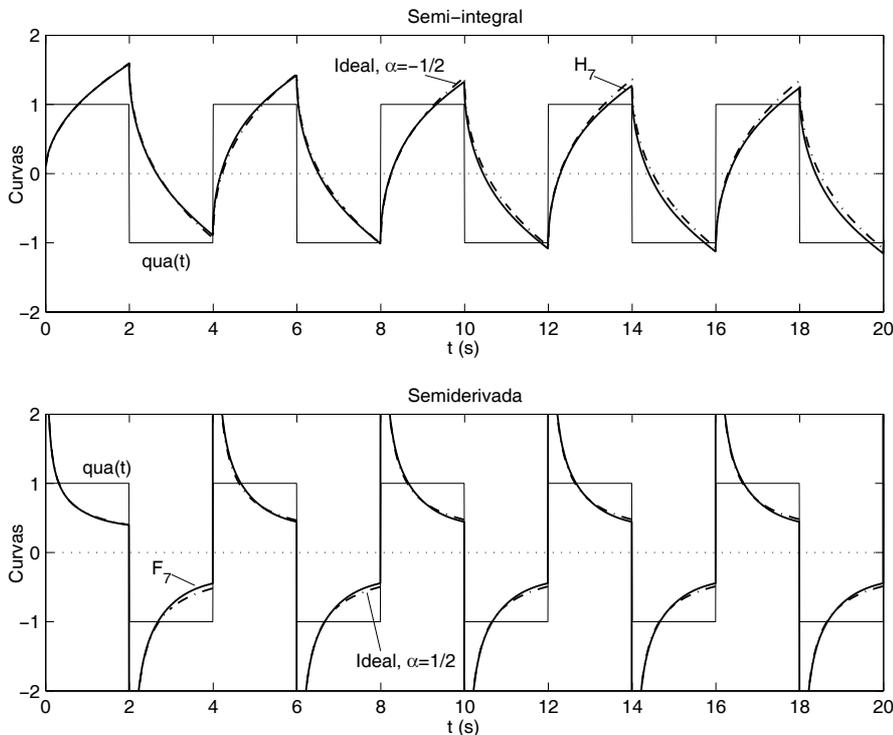


Figura 4.23 – Semi-integral e semiderivada da função onda quadrada $qua(t)$ com a aproximação de Shanks ao operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários.

O gráfico ilustra também os respectivos integral e derivada fraccionários da onda triangular calculados através das aproximações de Prony ao operador de Tustin com $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. A aproximação $H_7(z)$ para $\alpha = -1/2$ está listada na Tabela 4.6. Para $\alpha = 1/2$ a aproximação $F_7(z)$ é dada por:

$$F_7(z) = \frac{14.14 - 0.9474z^{-1} - 27.09z^{-2} + 1.433z^{-3} + 15.42z^{-4} - 0.558z^{-5} - 2.361z^{-6} + 0.03459z^{-7}}{1 + 0.933z^{-1} - 1.483z^{-2} - 1.348z^{-3} + 0.5753z^{-4} + 0.4936z^{-5} - 0.04154z^{-6} - 0.02785z^{-7}} \quad (4.104)$$

A Figura 4.25 mostra a mesma onda triangular e respectivos semi-integral e semiderivada analíticos, agora com aproximações de Prony ao operador de Euler. Utilizam-se os mesmos parâmetros de $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. A aproximação $H_7(z)$ para $\alpha = -1/2$ está listada na Tabela 4.5. Para $\alpha = 1/2$ a aproximação $F_7(z)$ é a mesma da equação (4.105). Verifica-se que em ambos os casos as aproximações possuem um bom desempenho. No entanto, nota-se que a aproximação com o operador de Euler fornece um melhor ajuste que o operador de Tustin, facto este, já referido aquando da análise das diferentes técnicas de modelação de sinal descritas nas secções 4.5 e 4.7.

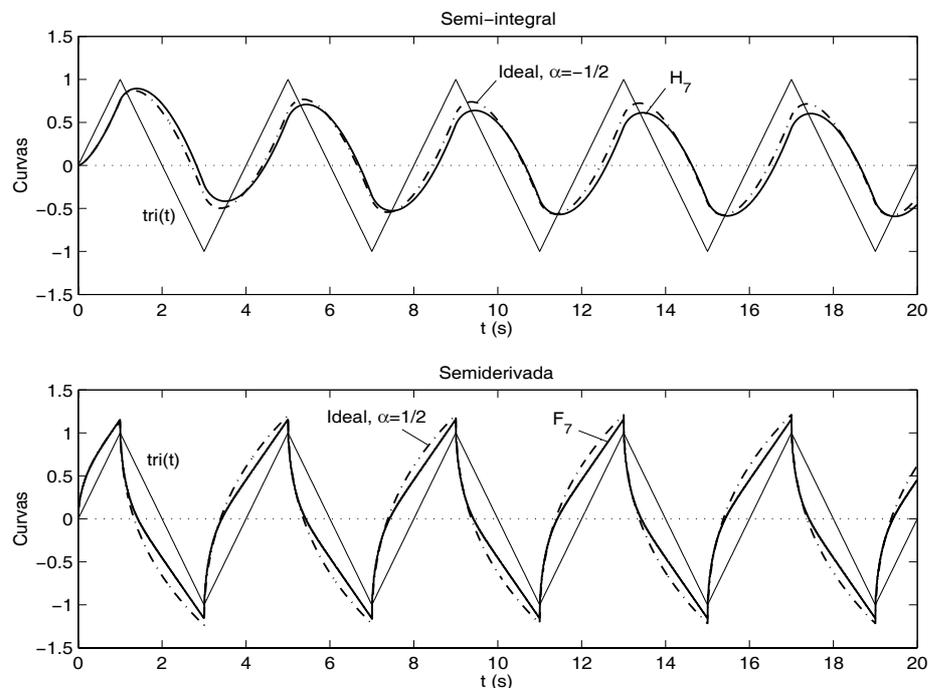


Figura 4.24 – Semi-integral e semiderivada da função onda triangular $tri(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Tustin para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários.

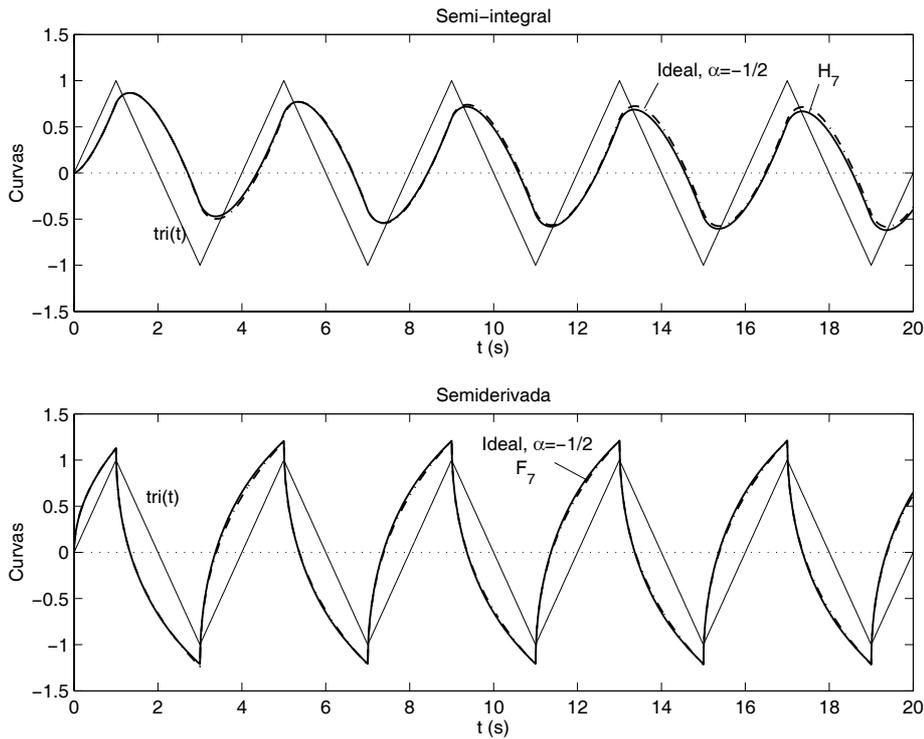


Figura 4.25 – Semi-integral e semiderivada da função onda triangular $tri(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fracionários.

Por último, as Figuras 4.26 e 4.27 mostram respectivamente as funções seno $s(t)$ e coseno $c(t)$ juntamente com as curvas das semiderivada ($\alpha = 1/2$) e semi-integral ($\alpha = -1/2$), calculadas respectivamente através das expressões (4.99) e (4.100). Estão também ilustradas as correspondentes aproximações de Prony com o operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01$ s. A aproximação $H_7(z)$ para $\alpha = -1/2$ está listada na Tabela 4.5. Para $\alpha = 1/2$ a aproximação $F_7(z)$ é dada por:

$$F_7(z) = \frac{10 - 43.02z^{-1} + 75.31z^{-2} - 68.59z^{-3} + 34.38z^{-4} - 9.162z^{-5} + 1.129z^{-6} - 0.04313z^{-7}}{1 - 3.802z^{-1} + 5.755z^{-2} - 4.395z^{-3} + 1.761z^{-4} - 0.3463z^{-5} + 0.02663z^{-6} - 0.0003561z^{-7}} \quad (4.105)$$

Mais uma vez, saliente-se o bom desempenho das aproximações no ajuste às curvas ideais. De notar que as curvas analíticas e as aproximadas são praticamente coincidentes para valores de t pequenos (*i.e.*, próximo de $t = 0$). Este facto torna-se relevante pois é nesta zona que as componentes transitórias das funções (seno e coseno) têm mais influência, conforme ilustra a Figura 4.21.

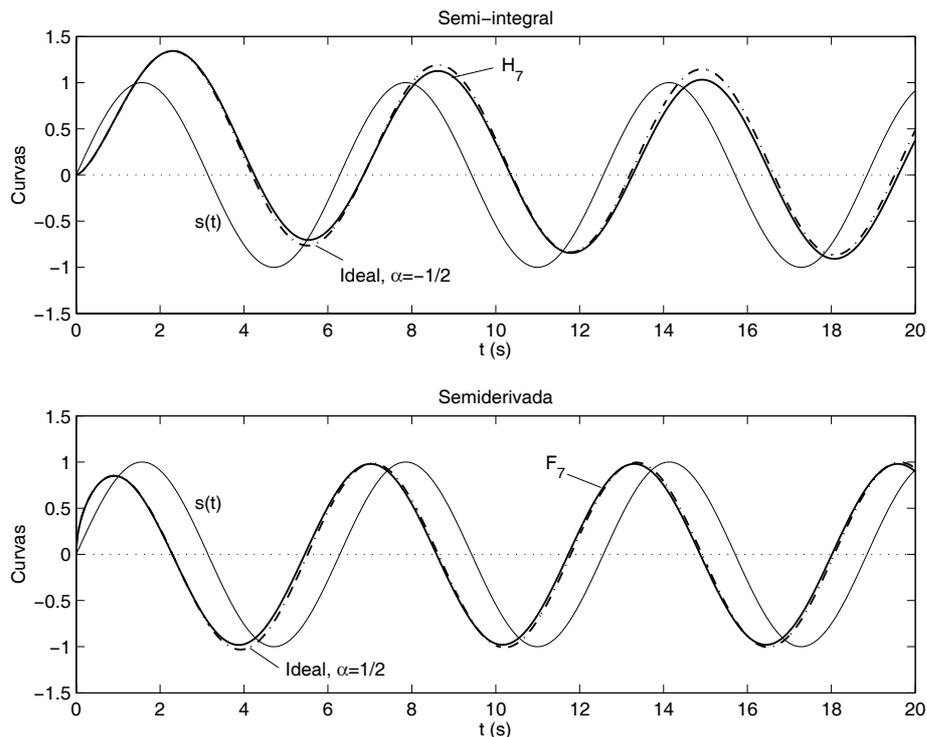


Figura 4.26 – Semi-integral e semiderivada da função seno $s(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01s$. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação digital racional do integral e derivada fraccionários.

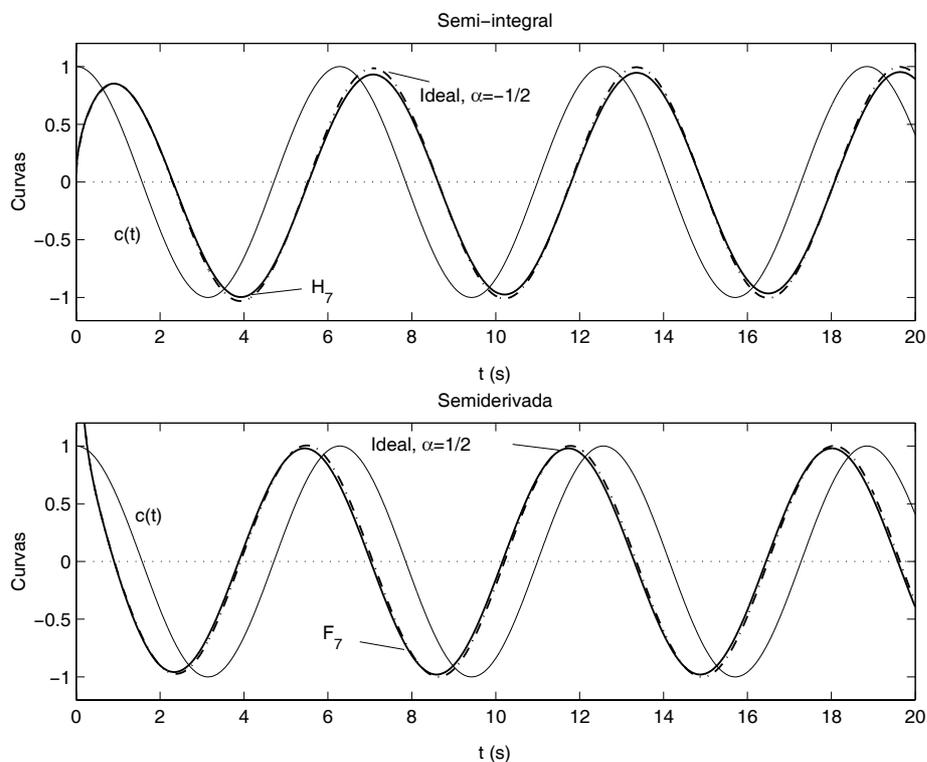


Figura 4.27 – Semi-integral e semiderivada da função coseno $c(t)$ com a aproximação de Prony do operador de Euler para $m = n = 7$, $N = 1000$ e $T = 0,01s$. $H_7(z)$ e $F_7(z)$ representam respectivamente a aproximação racional digital do integral e derivada fraccionários.

Os resultados apresentados revelam que as aproximações digitais racionais obtidas através das técnicas de modelação de sinal propostas nas secções 4.5 e 4.6 possuem um bom desempenho no domínio dos tempos. Este facto está demonstrado pela quase concordância entre as curvas ideais e as calculadas através das funções racionais. Por outro lado, confirmam a eficácia e a aplicabilidade dos métodos propostos para o desenvolvimento de integradores e diferenciadores de ordem não inteira.

Apesar disso, existem diferenças entre as diversas técnicas para obtenção das funções racionais, e entre os diferentes esquemas de conversão de $s \rightarrow z$, que devem ser tomados em consideração em função da utilização das referidas aproximações digitais.

4.9 Conclusões

Neste capítulo são apresentados vários métodos para o projecto de integradores e diferenciadores digitais de ordem fraccionária. A abordagem proposta adopta as técnicas de modelação de sinais determinísticos para a obtenção de aproximações racionais (filtros IIR) do operador básico fraccionário s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$). Nesta perspectiva, são desenvolvidas as técnicas de modelação de sinal de Padé, de Prony e de Shanks, as quais requerem somente a resolução de um sistema de equações lineares. Apresenta-se também um método que constitui uma alternativa eficiente às técnicas de modelação de sinais determinísticos. O novo método baseia-se no algoritmo de identificação de sistemas pelos mínimos quadrados, e gera as mesmas aproximações que o método de Prony, mas apresentando a vantagem de se poder obter, num único passo, a função racional desejada.

O método de Padé gera uma aproximação que faz um encaixe perfeito para as primeiras $m + n + 1$ amostras da sequência impulsional desejada, onde m representa o número de zeros e n o número de pólos. Contudo, este tipo de ajuste compromete a precisão da aproximação fora deste intervalo restrito. Assim, desenvolve-se o método de Prony, o qual gera uma aproximação mais precisa (no sentido dos mínimos quadrados) que a aproximação de Padé, sobre todo o intervalo de valores da sequência impulsional considerada. O método de Shanks modifica o método de Prony na forma de determinar os zeros da função e que, por isso, fornece no geral uma aproximação ainda mais precisa. Saliente-se que as técnicas adoptadas fornecem soluções subóptimas para o problema da modelação de sinal e, conseqüentemente, são diferentes da “verdadeira” solução obtida pela aplicação (directa) do método dos mínimos

quadrados (*i.e.*, solução ótima), a qual possui a desvantagem de requerer a resolução de um sistema de equações não lineares. As funções racionais obtidas são causais, estáveis e de fase mínima, o que as torna indicadas para uma análise por transformada dos Z e para implementação digital em tempo real. No entanto, dado que as sequências impulsionais são truncadas não é garantida a sua estabilidade, pelo que esta deve ser observada através da verificação dos seus pólos no interior do círculo unitário.

As técnicas aqui ilustradas (Padé, Prony e de Shanks) geram funções racionais com um bom desempenho, tanto no domínio das frequências como no domínio dos tempos. Na realidade, as técnicas de Padé e de CFE geram a mesma função racional ($m = n$). Mais ainda, as técnicas de Prony e de Shanks fornecem aproximações superiores face a outros métodos existentes, nomeadamente ao extensivamente usado método de CFE. A eficácia das aproximações resultantes é testada através do cálculo de diversas funções temporais, e comparadas com as respectivas expressões analíticas. Os resultados obtidos mostram uma boa concordância entre as curvas analíticas e as aproximadas, abrangendo um intervalo de tempo longo, para o caso de funções não periódicas, e uma precisão elevada (as curvas são praticamente coincidentes) no caso de funções periódicas, mesmo quando se adoptam frequências baixas.

Nesta linha de pensamento, o estudo aqui realizado representa mais um passo para a implementação prática e com bom desempenho de integradores e diferenciadores digitais de ordem fraccionária.

Sintonia de Controladores PID Robustos

NESTE capítulo é apresentada uma nova estratégia de sintonia de controladores PID clássicos. O estudo aqui realizado adopta uma perspectiva baseada na aplicação da teoria das derivadas e integrais fraccionários para a sintonia de sistemas compensados de ordem inteira. Assim, os parâmetros do PID são obtidos através da minimização do integral do erro quadrático entre as respostas ao degrau de um sistema de referência de realimentação unitária (sistema de ordem fraccionária), cuja a função de transferência em malha aberta é dada pela função de transferência ideal de Bode, e a do sistema actual em malha fechada com o controlador PID. Verifica-se que os sistemas compensados, sintonizados por este método, tornam-se robustos a variações do ganho exibindo respostas ao degrau com a propriedade de um amortecimento constante.

Tomando estas ideias em consideração, o capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. Na secção 5.1 é feita uma introdução ao problema. Na secção 5.2 é proposto um sistema de referência que servirá de base à sintonia de controladores PID. Aqui são estabelecidas as principais características (nos domínios complexo, frequências e tempos) deste tipo de sistema. Motivado por estes resultados, a secção 5.3 desenvolve um método de sintonia de controladores PID. A estratégia proposta é aplicada na secção 5.4 a vários tipos de processos que revelam bons resultados e que demonstram a eficácia e aplicabilidade do método. Por último, a secção 5.5 estabelece as principais conclusões e endereça perspectivas de evolução futura.

5.1 Introdução

O controlador PID é a forma de controlo mais utilizada em sistemas de controlo industriais, sendo que deve ser considerada sempre a abordagem inicial a ser adoptada quando se pretende projectar um sistema de controlo (Åström, 1995). Deste modo, é natural que se procurem melhores técnicas de sintonia, ou a definição de estruturas de controlo PID alternativas, não só devido ao seu uso generalizado, mas também com vista a alargar o seu campo de aplicação.

É nesta perspectiva que Oustaloup (1991) desenvolve o chamado controlador CRONE (abreviatura do Francês *Commande Robuste d'Ordre Non Entier*, isto é, controlo robusto de ordem não inteira), sendo um dos primeiros a introduzir os algoritmos de ordem fraccionária no controlo automático de sistemas. Oustaloup demonstrou que este tipo de controladores possuem um melhor desempenho face ao controlador PID clássico. Mais recentemente, Podlubny (1999a) propôs uma generalização do controlador PID, o designado controlador $PI^\lambda D^\mu$ fraccionário, que envolve um integrador fraccionário de ordem λ e diferenciador fraccionário de ordem μ . Esta abordagem apresenta também um melhor desempenho quando usado para o controlo de sistemas de ordem fraccionária que o controlador PID clássico. No capítulo 2 descreve-se com mais detalhe estes dois tipos de controladores que são uma referência importante no controlo de sistemas dinâmicos (inteiros ou fraccionários).

Nas últimas décadas, desenvolveram-se inúmeras técnicas de sintonia para a determinação dos parâmetros do controlador PID. De entre estas, as heurísticas de Ziegler-Nichols (Z-N) são as mais populares, sendo, actualmente, ainda extensivamente usadas. Todavia, verifica-se que os sistemas compensados, com controladores sintonizados através do método de Z-N, não produzem normalmente resultados satisfatórios, fornecendo um amortecimento muito fraco, tipicamente na ordem de $\xi \approx 0,2$ (Åström, 1995) e, conseqüentemente, apresentando respostas ao degrau com sobreelongações demasiado elevadas. Mais ainda, as técnicas de Z-N são apenas válidas para processos que apresentam uma resposta ao degrau do tipo monótona crescente (isto é, a chamada resposta ao degrau em forma de S). Por este facto, outras metodologias de sintonia foram desenvolvidas com vista a fornecer resultados mais satisfatórios, como, por exemplo, as técnicas baseadas no lugar geométrico de raízes (Åström, 1995) ou os métodos baseados em estratégias de optimização (Zhuang e Atherton, 1993). No entanto, muitas das alternativas propostas não impõem qualquer restrição no valor máximo da sobreelongação para a resposta temporal do sistema.

Neste capítulo, é proposta uma nova estratégia para a sintonia de controladores PID de forma que a resposta temporal do sistema compensado possua uma sobreelongação quase constante, definida previamente como uma das especificações do sistema. De facto, estas especificações são dadas através da frequência ao ganho unitário desejada e o declive a essa frequência (o que é equivalente a definir uma determinada margem de fase para o sistema) de um integrador de ordem fraccionário, designado de *função de transferência ideal de Bode*. O método proposto consiste na minimização do integral do erro quadrático entre as respostas ao degrau do sistema em malha fechada de realimentação unitária (cuja a função de transferência em malha aberta é dada pela função de transferência ideal de Bode) e o sistema compensado com o controlador PID. Desta forma, assegura-se que o diagrama de Bode do sistema compensado apresenta uma curva de fase quase constante em torno da frequência ao ganho unitário. Este facto vai implicar que o sistema em malha fechada, com o controlador PID, seja robusto a variações do ganho exibindo respostas ao degrau com uma sobreelongação quase constante, ou seja, com a propriedade de um amortecimento constante.

A estratégia aqui proposta é aplicada a vários exemplos ilustrativos que demonstram a sua eficácia e aplicabilidade. Nesta perspectiva, salienta-se a sua aplicação em processos que são aproximados através do popular modelo de primeira ordem com um atraso de transporte (modelo FOPDT¹). Existem diversas técnicas para a aproximação das respostas de processos a entradas em degrau por este tipo de função de transferência (Åström, 1995). É também demonstrado que, embora o sistema em malha fechada com o controlador PID seja um sistema de ordem inteira, este pode ser analisado aplicando conceitos básicos do cálculo fraccionário, fazendo, deste modo, com que apresente (sobre uma faixa limitada de frequências) uma dinâmica fraccionária.

5.2 Função de Transferência Ideal de Bode Como Sistema de Referência

Nesta secção apresentam-se as principais características, no domínio dos tempos e das frequências, do sistema de controlo de ordem fraccionária que serve como *sistema de referência* para o método de sintonia de controladores PID proposto na secção 5.3. Algumas das características deste sistema já foram brevemente referidas no Capítulo 2 (secção 2.10).

¹ *First-order plus dead-time*

Aqui será feita uma análise mais detalhada dessas características, tendo como objectivo evidenciar as potencialidades da utilização de sistemas fraccionários para o projecto de sistemas de controlo (inteiros ou fraccionários) mais robustos.

O sistema de referência consiste numa malha de controlo de realimentação unitária com função de transferência em malha aberta ($L(s)$) dada por um integrador de ordem fraccionária, conforme mostra a Figura 5.1.

A função de transferência em malha aberta $L(s)$ é definida como:

$$L(s) = \left(\frac{\omega_c}{s} \right)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (5.1)$$

em que ω_c é a frequência ao ganho unitário, isto é, $|L(j\omega_c)| = 1$. O parâmetro α é o declive da curva da amplitude do diagrama de Bode, numa escala log-log, e tanto pode assumir valores inteiros como valores não inteiros (fraccionários). Na realidade, a função de transferência $L(s)$ consiste num diferenciador de ordem fraccionária para $\alpha < 0$ e num integrador de ordem fraccionária para $\alpha > 0$. Neste estudo, considera-se $L(s)$ como sendo um integrador fraccionário de ordem $1 < \alpha < 2$ (regime de oscilação amortecida fraccionária). A função $L(s)$ é também conhecida como *função de transferência ideal de Bode* desde a investigação que Bode realizou sobre amplificadores realimentados no início da década de quarenta, em que sugeriu uma função de transferência em malha aberta ideal do tipo (5.1) (Bode, 1945).

Os diagramas de Bode da amplitude e da fase de $L(s)$ estão ilustrados na Figura 5.2. A curva da amplitude é uma recta de declive -20α dB/dec e a curva da fase é uma recta horizontal de ordenada $-\alpha \pi/2$ rad. O diagrama de Nyquist consiste simplesmente numa recta que passa pela origem com argumento de $\arg L(j\omega) = -\alpha \pi/2$ rad.

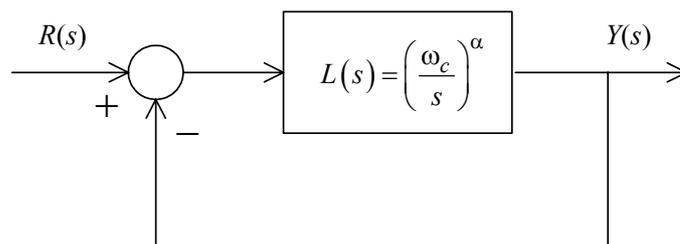


Figura 5. 1– Sistema de controlo de ordem fraccionária com função de transferência em malha aberta dada por $L(s)$.

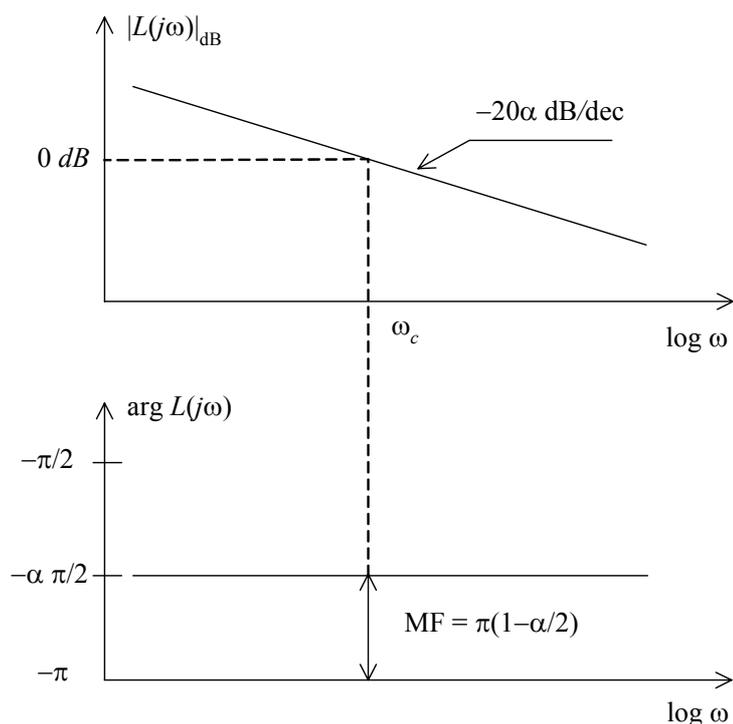


Figura 5.2 – Diagramas de Bode da amplitude e da fase de $L(j\omega)$ para $1 < \alpha < 2$.

Considere-se de novo o sistema de realimentação unitário representado na Figura 5.1 com função de transferência ideal de Bode $L(s)$ inserida no ramo directo. Esta escolha de $L(s)$ dá origem a sistemas em malha fechada com a propriedade desejada de serem insensíveis a variações do ganho. Por exemplo, se houver uma variação do ganho, então a frequência ao ganho unitário ω_c altera-se, mas a margem de fase (MF) do sistema mantém-se constante, tomando o valor de:

$$MF = \pi \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5.2)$$

Como se verifica, a MF é independente do valor do ganho, sendo determinada unicamente pela ordem α . Esta característica pode ser observada através das curvas da amplitude e da fase representadas na Figura 5.2.

5.2.1 Integral de Bode

A expressão (5.2) deriva da aplicação do chamado integral de Bode que relaciona a fase do sistema a uma qualquer frequência como função da derivada da sua amplitude. As relações entre a fase e amplitude de um sistema de fase mínima estável foram investigados pela primeira vez por Bode (Bode, 1945). Assim, tomando como exemplo a função de transferência (5.1), Bode demonstrou que a fase do sistema a uma frequência ω_0 , $\arg [L(j\omega_0)]$, é dada por:

$$\arg [L(j\omega_0)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \ln |L(j\omega)|}{dv} \ln \coth \frac{|v|}{2} dv \quad (5.3)$$

em que:

$$v = \ln \frac{\omega}{\omega_0} \quad (5.4)$$

Dado que $\ln \coth(|v|/2)$ decresce rapidamente à medida que ω se afasta de ω_0 (Bode, 1945; Åström, 2000), o integral (5.3) depende essencialmente de $d \ln |L(j\omega)|/dv$, isto é, do declive do diagrama de Bode da amplitude em torno de ω_0 . Assim, considerando que esse declive é quase constante na vizinhança de ω_0 , o $\arg [L(j\omega_0)]$ pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned} \arg [L(j\omega_0)] &\approx \frac{1}{\pi} \frac{d \ln |L(j\omega)|}{dv} \Big|_{\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \coth \frac{|v|}{2} dv \\ &\approx \frac{\pi}{2} \frac{d \ln |L(j\omega)|}{dv} \Big|_{\omega_0} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Isto significa que se o declive da curva da amplitude do diagrama de Bode (numa escala log-log) $\alpha = d \ln |L(j\omega)|/dv$ é constante então a fase é também constante e dada por (e.g., para o caso considerado do integrador):

$$\arg [L(j\omega_0)] = -\alpha \frac{\pi}{2} \quad (5.6)$$

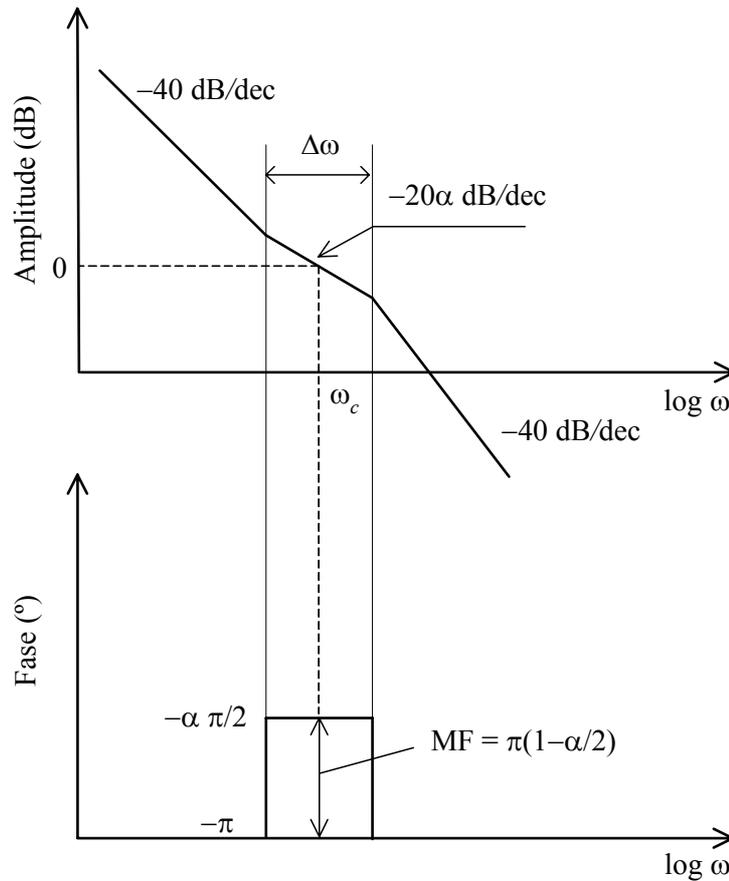


Figura 5.3 – Ilustração do princípio proposto. Note a fase constante em torno da frequência ao ganho unitário ω_c .

Esta propriedade é usada neste estudo para obtenção de uma função de transferência em malha aberta em que o declive da curva de amplitude do diagrama de Bode à frequência ao ganho unitário ω_c é limitado ao valor de $-20\alpha \text{ dB/dec}$ de forma a obter-se uma margem de fase aproximada de $\text{MF} = \pi(1-\alpha/2)$ rad, com $1 < \alpha < 2$. Este conceito é ilustrado através da Figura 5.3, onde se observa que facilmente se pode obter uma dada margem de fase MF variando apenas a ordem fraccionária α . Mais ainda, mostra que é possível efectuar uma transição ($\Delta\omega$) adequada (através da variação de α) entre a faixa das baixas frequências ($\omega \ll \omega_c$) e a faixa das altas frequências ($\omega \gg \omega_c$), a qual se revela crucial para o projecto de um controlo robusto.

Nas subsecções seguintes são analisadas, de uma forma mais detalhada, as principais características das respostas no domínio das frequências e no domínio dos tempos do sistema de controlo de ordem fraccionária representado na Figura 5.1. Motivado por estes resultados, na secção 5.3 é desenvolvida uma estratégia de sintonia de controladores PID robustos.

5.2.2 Análise no Plano Complexo

A função de transferência do sistema em malha fechada, com o integrador fraccionário, representado na Figura 5.1, $T(s) = Y(s)/R(s)$, é dada por:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^\alpha}{1+\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha + 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (5.7)$$

Na secção 5.3 é introduzido um atraso de transporte puro à função (5.7). A equação característica do sistema (5.7) é:

$$\left(s/\omega_c\right)^\alpha + 1 = 0 \quad (5.8)$$

Para $1 < \alpha < 2$, a equação (5.8) possui apenas dois pólos complexos conjugados sobre a superfície principal de Riemann, isto é, para $-\pi < \arg(s) < \pi$, dados por (Oustaloup, 1991, 1995b):

$$s_{1,2} = \omega_c e^{\pm \frac{\pi}{\alpha}} \quad (5.9)$$

Assim, o coeficiente de amortecimento ζ vem:

$$\zeta = \cos(\pi - \pi/\alpha) = -\cos(\pi/\alpha) \quad (5.10)$$

Verifica-se que ζ é determinado exclusivamente pela ordem α sendo independente da frequência ω_c .

Esta propriedade importante é evidenciada através da representação do lugar de raízes da equação (5.8), ilustrado na Figura 5.4, e o qual revela que, quando, os pólos $s_{1,2}$ deslizam sobre duas semi-rectas que formam um ângulo de $\pi - \pi/\alpha = \cos^{-1}(\zeta)$, independente da frequência ω_c , mantendo, desta forma, uma margem de fase $MF = \pi(1 - \alpha/2)$ constante.

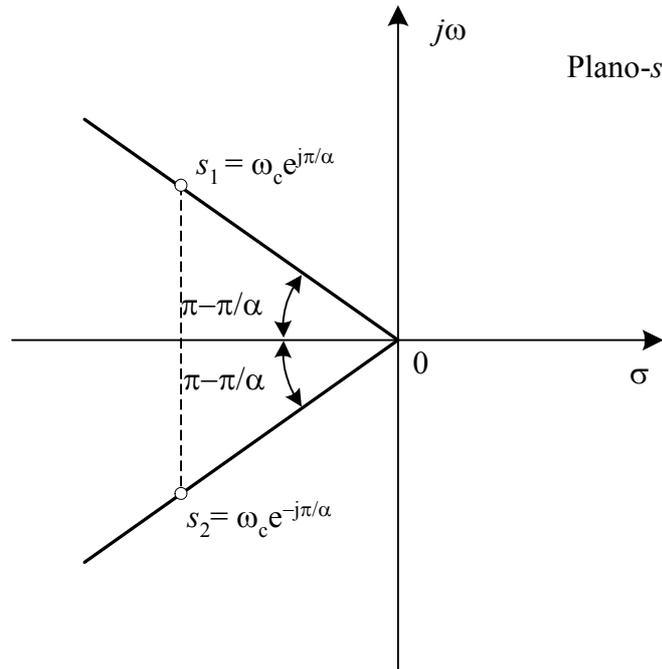


Figura 5.4 – Lugar de raízes da equação característica (5.8). O deslizamento ao longo das rectas assegura a robustez do sistema.

Outros parâmetros (tais como, a frequência natural não amortecida, a frequência natural amortecida, etc.) podem ser derivados a partir da equação característica (5.8), tal como se faz para os sistemas de segunda ordem subamortecidos. Aqui são apenas estabelecidos os parâmetros essenciais para o estudo em questão. Assim, para uma caracterização mais completa de (5.8) consultar os trabalhos de (Oustaloup, 1991, 1995b; Vinagre, 2001; Vinagre, *et al.*, 2004).

5.2.3 Análise no Domínio das Frequências

A resposta em frequência do sistema (5.7) é obtida fazendo $s = j\omega$, resultando:

$$T(j\omega) = T(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + 1 \right] + j \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^\alpha \sin(\alpha\pi/2) \right]} \quad (5.11)$$

Os diagramas de Bode da amplitude e da fase da função de transferência $T(j\omega)$ (5.11), $|T(j\omega)|_{dB}$ e $\arg[T(j\omega)]$, são dados respectivamente por:

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |T(j\omega)|$$

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left[\frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^{2\alpha} + 2(\omega/\omega_c)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + 1}} \right] \quad (5.12)$$

$$\arg[T(j\omega)] = -\arctan \left[\frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\cos(\alpha\pi/2) + (\omega_c/\omega)^\alpha} \right] \quad (5.13)$$

Analisando o comportamento assintótico das expressões (5.12) e (5.13), verifica-se que, quando $\omega \rightarrow +\infty$, estas expressões tendem para, respectivamente ($\alpha > 0$):

$$|T(j\omega)|_{dB} \approx -20\alpha \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (5.14)$$

$$\arg[T(j\omega)] \approx -\alpha \frac{\pi}{2} \quad (5.15)$$

Assim, às altas frequências ($\omega \rightarrow \infty$), as assíntotas da amplitude correspondem a rectas com um declive de -20α dB/dec, enquanto que a fase é dada por rectas horizontais de ordenada $-\alpha\pi/2$ rad. Por outro lado, às baixas frequências ($\omega \rightarrow 0$), a amplitude e a fase aproximam-se assintoticamente de rectas horizontais dadas por 0 dB e 0 rad, respectivamente. Estes resultados estão ilustrados na Figura 5.5, os quais mostram os diagramas de Bode da amplitude e fase de $T(j\omega)$ para vários valores de $1 < \alpha < 2$.

O erro máximo e_{\max} na curva das amplitudes, causado pelo uso das assíntotas, ocorre para $\omega = \omega_c$ (expressões (5.12) e (5.14)), e é calculado através da equação (Arena, *et al.*, 2000; Caponetto, *et al.*, 2004):

$$\begin{aligned} e_{\max} &= \left| |T(j\omega)|_{dB,aprox} - |T(j\omega)|_{dB} \right| \\ &= 10 \log_{10} \left[2 + 2 \cos(\alpha\pi/2) \right] \cong 6 + 20 \log_{10} |\cos(\alpha\pi/4)| \end{aligned} \quad (5.16)$$

De notar que e_{\max} pode ser colocado a zero, o que acontece para:

$$2 \cos(\alpha\pi/2) + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \{4/3, 8/3\} \quad (5.17)$$

Nas curvas das amplitudes, o pico de ressonância M_r (*i. e.*, o valor para o qual o denominador de $|T(j\omega)|$ é um mínimo (expressão (5.12)) e a frequência ω_r ao qual ocorrem são dados pelas expressões ($1 < \alpha < 2$) (Manabe, 1961; Oustaloup, 1995b):

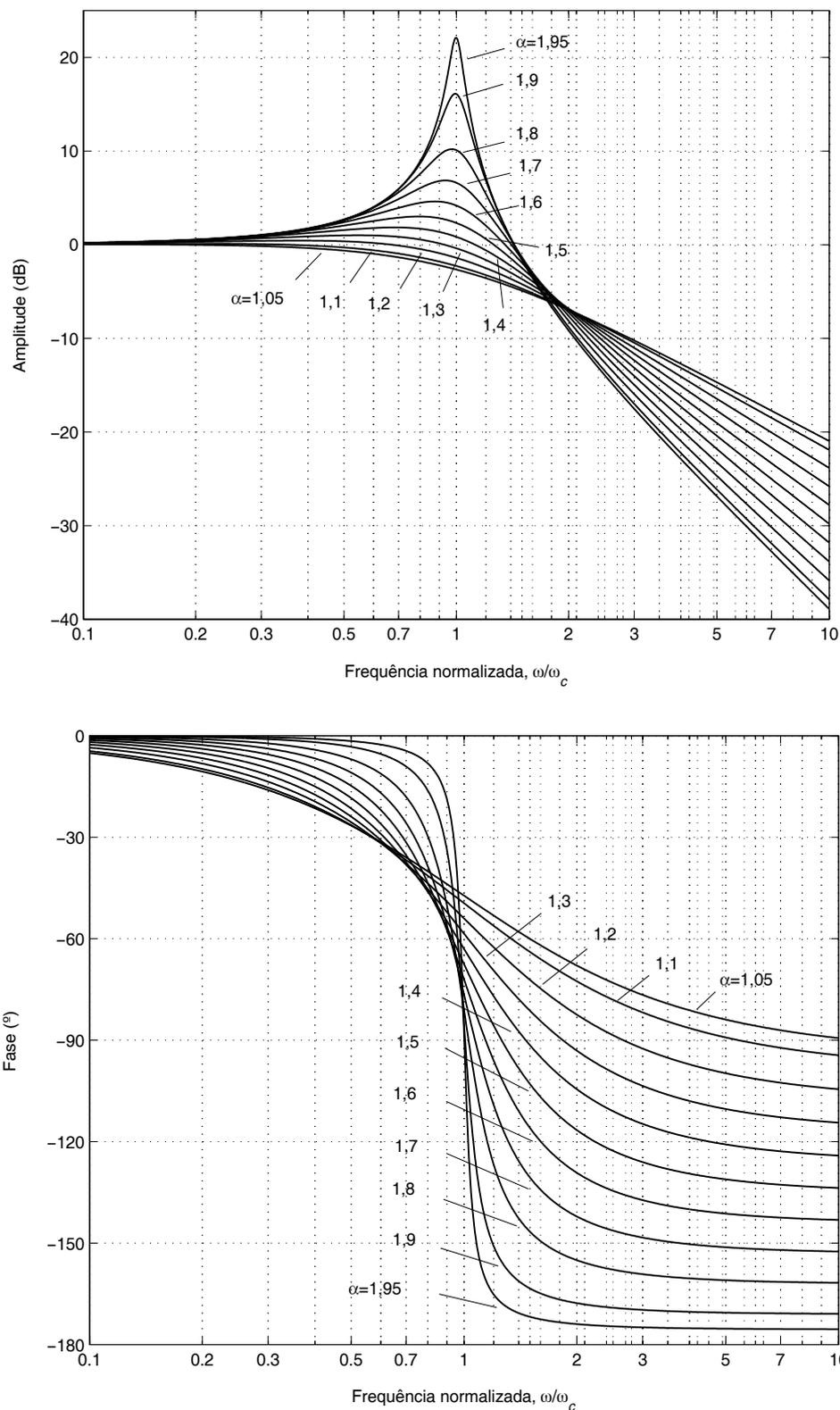


Figura 5. 5 – Diagramas de Bode da amplitude e da fase de $T(j\omega)$ para $1 < \alpha < 2$.

$$M_r = \frac{1}{\sin(\alpha\pi/2)} \tag{5.18}$$

$$\omega_r = \omega_c (-\cos(\alpha\pi/2))^{1/\alpha} \quad (5.19)$$

5.2.4 Análise no Domínio dos Tempos

A resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada (Figura 5.1), com o integrador fraccionário, e cuja a função de transferência em malha fechada é $T(s)$ (5.7), é obtida como $y(t) = L^{-1}\{1/s \cdot T(s)\}$, sendo dada através da expressão (Westerlund e Ekstam, 1994; Barbosa, *et al.*, 2003b):

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha + 1} \right\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-(\omega_c t)^\alpha]^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} = 1 - E_\alpha [-(\omega_c t)^\alpha] \quad (5.20)$$

onde $E_\alpha(x)$ denota a função de Mittag-Leffler a um parâmetro (Miller e Ross, 1993; Gorenflo e Mainardi, 1996). Esta função especial representa uma generalização da usual função exponencial pois, quando $\alpha = 1$, $E_1(x) = e^x$.

Para uma análise mais pormenorizada no domínio dos tempos da expressão (5.20), é conveniente expressar a função de Mittag-Leffler em termos mais simples. Assim, seguindo Gorenflo e Mainardi (1996), a função $e_\alpha(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$ (de notar que, neste caso, considera-se $\omega_c = 1$, sendo apenas uma questão de escala para valores de $\omega_c \neq 1$) é decomposta em duas partes distintas ($t \geq 0$):

$$e_\alpha(t) = f_\alpha(t) + g_\alpha(t) \quad (5.21)$$

A primeira parcela $f_\alpha(t)$ é dada por:

$$f_\alpha(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1} \sin(\alpha\pi)}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha \cos(\alpha\pi) + 1} e^{-st} ds \quad (5.22)$$

a qual só está presente para valores não inteiros de α , sendo uma função totalmente monótona que tende para zero quando $t \rightarrow \infty$, e é negativa para todo o s se $1 < \alpha < 2$.

A segunda parcela $g_\alpha(t)$ é expressa como:

$$g_\alpha(t) = \frac{2}{\alpha} e^{t \cos(\pi/\alpha)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right] \quad (5.23)$$

sendo responsável pelo carácter oscilatório da resposta (se $1 < \alpha < 2$). De facto, a função (5.23) exhibe oscilações a uma frequência circular de $\omega(\alpha) = \sin(\pi/\alpha)$ com uma amplitude que decai exponencialmente ($1 < \alpha < 2$) à razão de $\lambda(\alpha) = |\cos(\pi/\alpha)|$. De notar que a função $g_\alpha(t)$ é determinada somente para os pólos relevantes, isto é, para os dois pólos $s_{1,2} = e^{\pm j\pi/\alpha}$ situados sobre a superfície principal de Riemann onde $-\pi < \arg(s) < \pi$.

Combinando as expressões (5.20), (5.22) e (5.23), resulta a resposta ao degrau $y(t)$ (para o caso normalizado de $\omega_c = 1$) (Gorenflo e Mainardi, 1996; Vinagre, *et al.*, 2004) dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e_\alpha(t) \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1} \sin(\alpha\pi)}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha \cos(\alpha\pi) + 1} e^{-st} ds - \frac{2}{\alpha} e^{t \cos(\pi/\alpha)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

É óbvio que a expressão (5.24) ainda não está numa forma de fácil análise e, portanto, não é adequada para a derivação das usuais características e especificações temporais do sistema (5.20). Mais adiante, retorna-se a esta equação para apresentar uma função (aproximada) adequada para derivar estas características.

Por agora, o objectivo consiste em estabelecer expressões úteis para as habituais especificações temporais da resposta ao degrau (unitário).

Considerando o comportamento assintótico de $E_\alpha[-(\omega_c t)^\alpha]$, quando $t \rightarrow \infty$ (regime permanente) e $t \rightarrow 0^+$ (valor inicial), obtêm-se as aproximações (Mainardi, 1994):

$$E_\alpha[-(\omega_c t)^\alpha] \approx \begin{cases} 1 - \frac{(\omega_c t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & , \omega_c t \rightarrow 0^+ \\ \frac{(\omega_c t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & , \omega_c t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5.25)$$

Assim, chega-se aos valores final e inicial da resposta ao degrau, respectivamente $y(t \rightarrow \infty)$ e $y(t \rightarrow 0^+)$:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \quad (5.26)$$

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0 \quad (5.27)$$

Normalmente, o projecto de um sistema de controlo envolve a especificação de certos requisitos associados à resposta temporal do sistema. Nesta perspectiva, de seguida, derivam-se algumas expressões úteis que caracterizam a resposta ao degrau da função de transferência de ordem fraccionária $T(s)$ (5.7). Tal como no caso dos sistemas de segunda ordem subamortecidos, desenvolvem-se expressões para a sobreelongação M_p , tempo de pico T_p , tempo de subida T_r , constante de tempo T_c e tempo de estabelecimento T_s . A Figura 5.6 mostra as respostas ao degrau (normalizadas) de $T(s)$ enquanto que a Figura 5.7 ilustra a variação do valor da sobreelongação M_p , ambos para $1 < \alpha < 2$. Estas especificações são obtidas por simulação das respostas ao degrau e ajustadas a funções polinomiais (M_p , T_c) ou funções racionais (T_p , T_r). As expressões resultantes são as seguintes:

- A sobreelongação M_p corresponde ao valor máximo de sinal que ultrapassa o seu valor final, isto é:

$$M_p = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \approx 0,8(\alpha - 1)(\alpha - 0,75), \quad 1 < \alpha < 2 \quad (5.28)$$

- O tempo de pico T_p corresponde ao instante em que ocorre a sobreelongação M_p . A função racional obtida (com um erro inferior a 1%) é:

$$T_p \approx \frac{1,106(\alpha - 0,255)^2}{(\alpha - 0,921)\omega_c}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (5.29)$$

- O tempo de subida T_r é o tempo necessário para a resposta evoluir desde 10% até 90% do seu valor final. A função racional obtida (com um erro inferior a 1%) é:

$$T_r \approx \frac{0,131(\alpha + 1,157)^2}{(\alpha - 0,724)\omega_c}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (5.30)$$

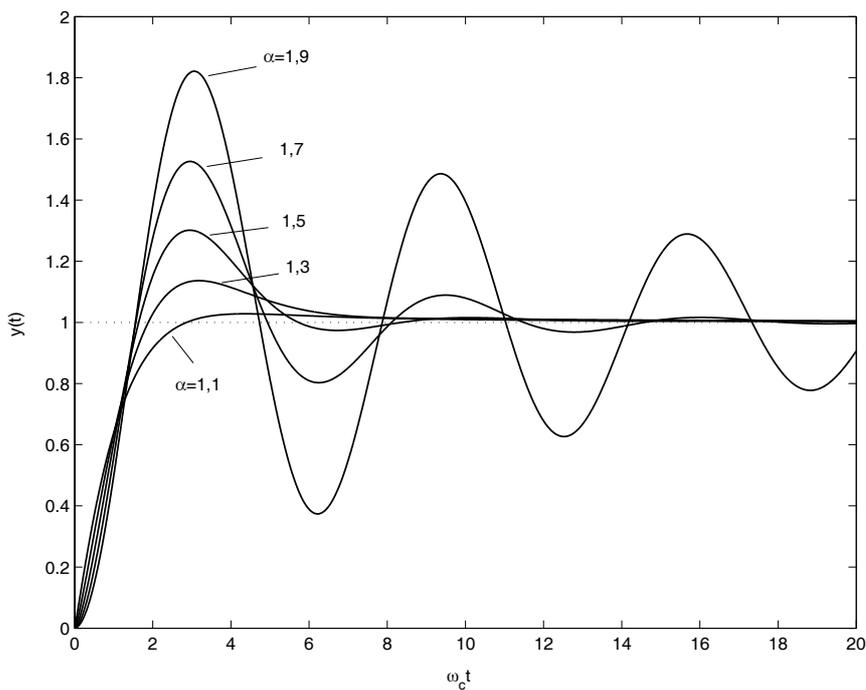


Figura 5. 6 – Resposta ao degrau unitário de $T(s)$ para $1 < \alpha < 2$.

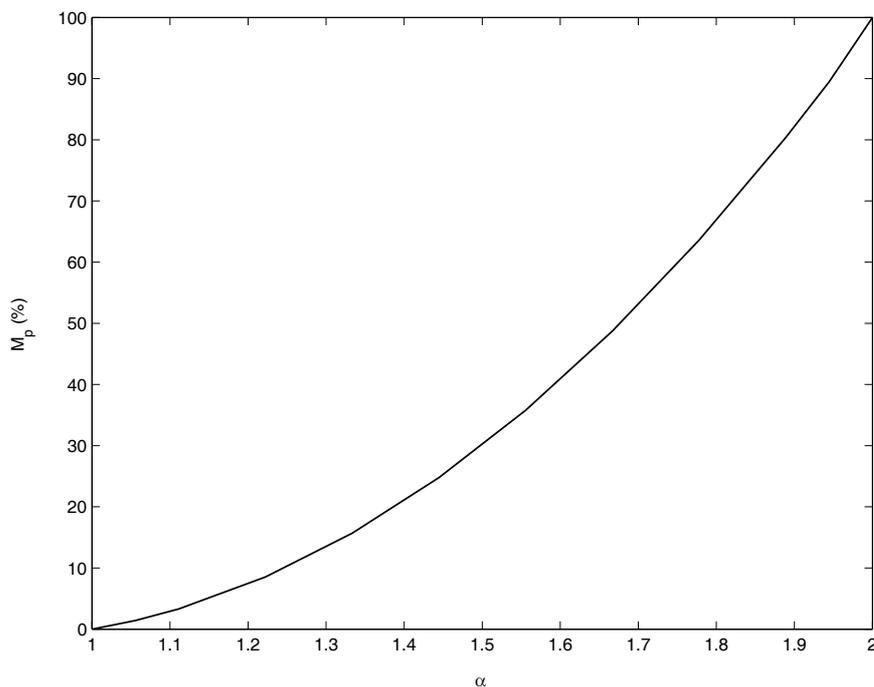


Figura 5. 7 – Sobreelongação da resposta ao degrau unitário de $T(s)$ para $1 \leq \alpha \leq 2$.

- A constante de tempo T_c é o tempo necessário para a resposta atingir 63% do seu valor final. A função polinomial obtida (com um erro inferior a 2%) é:

$$T_c \approx \frac{0,2(\alpha-1)^2+1}{\omega_c}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (5.31)$$

- O tempo de estabelecimento T_s é o tempo necessário para a resposta se estabelecer dentro de uma determinada faixa em torno do seu valor final (normalmente 2% e 5%) e permanecer lá. A sua expressão (aproximada) pode ser obtida notando que na equação (5.24) o termo correspondente à função $f_\alpha(t)$ tem pouca influência quando $t \rightarrow \infty$. Deste modo, retiram-se as envolventes de $y(t)$ como $1 \pm (2/\alpha)e^{t \cos(\pi/\alpha)}$ e define-se a constante de tempo $T = 1/\cos(\pi - \pi/\alpha) = 1/(-\cos(\pi/\alpha))$ (Barbosa, *et al.*, 2003b; Vinagre, *et al.*, 2004). As expressões para o tempo de estabelecimento de T_s são então definidas como:

- Para o critério de 2%, $\omega_c T_s \approx 4T$:

$$T_s \approx \frac{4}{\cos(\pi - \pi/\alpha)\omega_c} = \frac{4}{\zeta\omega_c}, \quad 1,39 < \alpha < 2 \quad (5.32)$$

- Para o critério de 5%, $\omega_c T_s \approx 3T$:

$$T_s \approx \frac{3}{\cos(\pi - \pi/\alpha)\omega_c} = \frac{3}{\zeta\omega_c}, \quad 1,44 < \alpha < 2 \quad (5.33)$$

em que $\zeta = \cos(\pi - \pi/\alpha) = -\cos(\pi/\alpha)$ denota o coeficiente de amortecimento do sistema fraccionário em malha fechada. A Figura 5.8 ilustra o tempo de estabelecimento T_s (normalizado) em função de $1 \leq \alpha \leq 2$, para o critério de 2% e de 5%. Como se verifica, as expressões correspondentes (5.32) e (5.33), fornecem um boa aproximação de T_s dentro das faixas estabelecidas.

De notar as similaridades das expressões (5.32) e (5.33) com as obtidas para os sistemas de segunda ordem subamortecidos (ou seja, para $0 < \xi < 1$, em que ξ é o coeficiente de amortecimento do sistema subamortecido). De facto, têm sido feitas algumas tentativas no sentido de estabelecer relações entre os dois tipos de sistemas (Manabe, 1961). Apesar de as respostas ao degrau unitário, ilustradas na Figura 5.6, possuírem algumas parecenças com as de um sistema de segunda ordem subamortecido, as características de ambos são obviamente diferentes, conforme ilustrado no estudo aqui realizado. Um sistema de segunda ordem

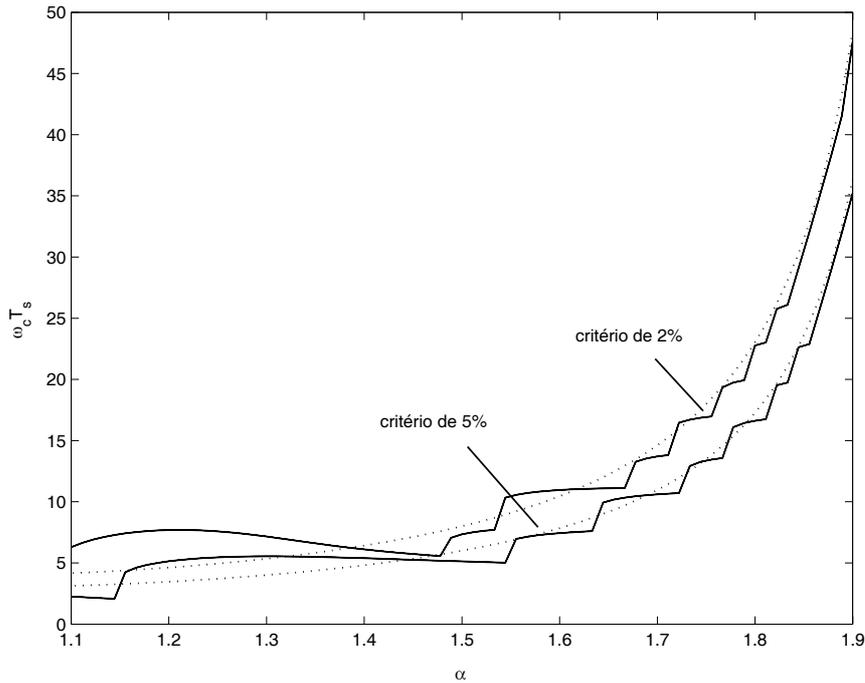


Figura 5.8 – Tempo de estabelecimento T_s (normalizado) para $1 < \alpha < 2$, com as curvas analítica (linha sólida) e aproximada (linha pontilhada).

subamortecido é caracterizado por possuir uma oscilação exponencialmente amortecida enquanto que o sistema fraccionário ($1 < \alpha < 2$) possui uma oscilação fraccionária (Gorenflo e Mainardi, 1996).

Mais recentemente, Vinagre, *et al.* (2004) obtém uma expressão aproximada (a qual é obtida ajustando a função $f_\alpha(t)$ a um termo exponencial) da resposta ao degrau analítica (5.15) mais simples de manusear e, portanto, mais fácil de derivar as características e especificações temporais do sistema. Contudo, a expressão fornecida leva a erros significativos da saída $y(t)$ para valores de t perto de $t=0^+$ (tempo inicial). De forma a resolver este problema, indica-se de seguida uma expressão (versão melhorada da fornecida em Vinagre, *et al.*, (2004)) que apresenta melhores resultados para o tempo de início $t=0^+$. Esta foi estabelecida tendo em conta a satisfação da condição inicial $e_\alpha(0^+) = 1$, resultando a expressão aproximada melhorada $y_a(t)$:

$$y_a(t) = 1 + \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right) e^{-t} - \frac{2}{\alpha} e^{t \cos(\pi/\alpha)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right] \quad (5.34)$$

Como se verifica:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y_a(t) = 0 \quad (5.35)$$

Deste modo, a aproximação $y_a(t)$, aqui sugerida, possui um melhor comportamento em torno de $t = 0^+$. Para ilustrar este facto, a Figura 5.9 mostra as respostas ao degrau calculadas a partir das expressões analítica $y(t)$ e aproximada $y_a(t)$, assim como o erro correspondente $e(t) = y(t) - y_a(t)$. Como pode ser observado, as curvas são muito próximas (o erro $e(t)$ é, de facto, muito pequeno), com a maior diferença entre as curvas a verificar-se para o tempo de início $t = 0^+$ e em torno do tempo de pico T_p , ou seja, correspondente à zona das altas frequências.

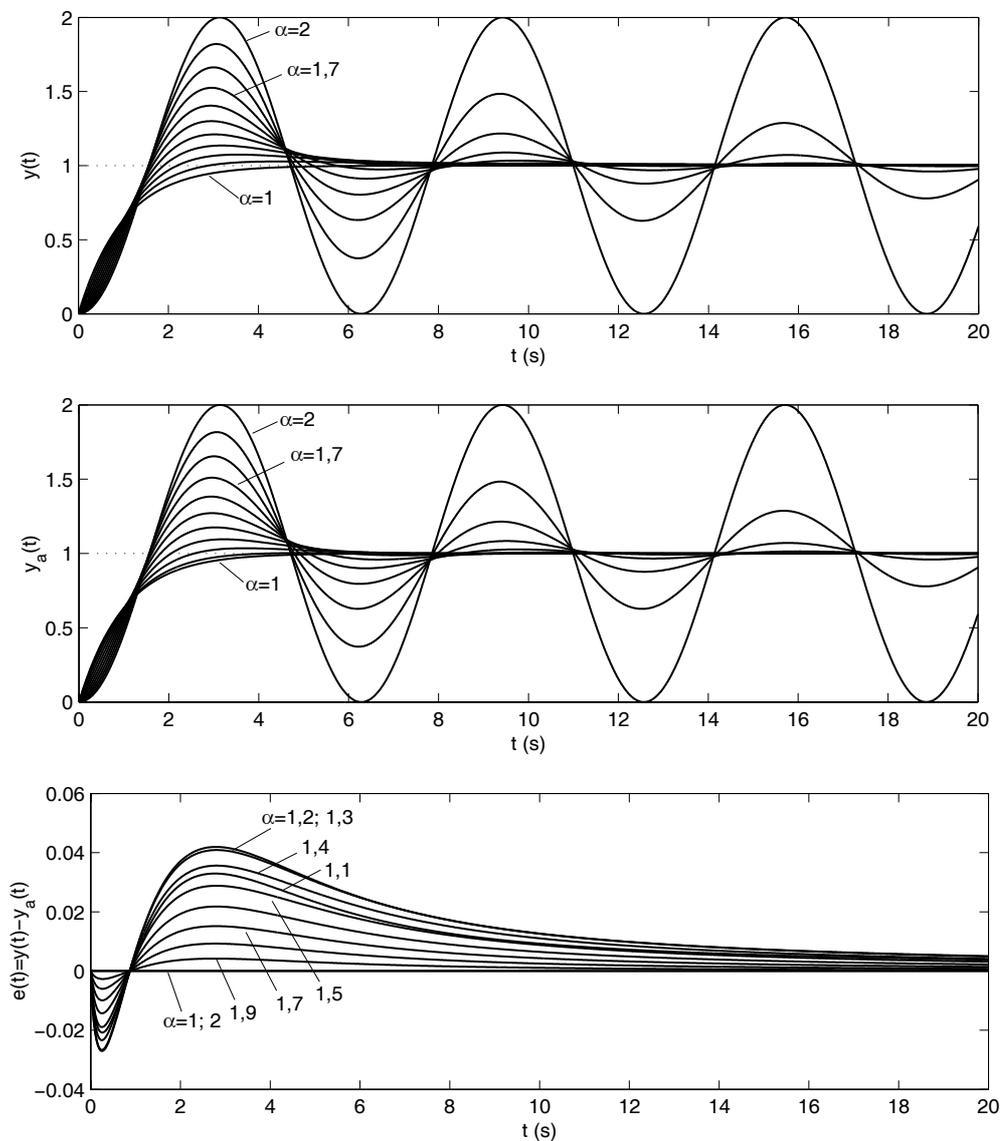


Figura 5.9 – Respostas ao degrau unitário das soluções analítica $y(t)$, aproximada $y_a(t)$, e respectivos erros $e(t) = y(t) - y_a(t)$ para $1 \leq \alpha \leq 2$.

É interessante verificar que, usando tanto a expressão aproximada $y_a(t)$ como a expressão analítica $y(t)$ da resposta ao degrau do sistema, é possível estabelecer as funções temporais para os casos em que α toma valores inteiros, ou seja, para $\alpha = 1, 2$, resultando:

$$\alpha = 1 \Rightarrow y(t) = y_a(t) = 1 - e^{-t} \quad (5.36)$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow y(t) = y_a(t) = 1 - \cos(t) \quad (5.37)$$

Deve-se referir que algumas das expressões aqui obtidas para a caracterização nos tempos da função de transferência $T(s)$ (funções (5.28)–(5.33)) possuem um erro mínimo (tipicamente $< 1\%$) face às respostas ideais, resultando em melhores aproximações, dentro de toda a faixa de valores de $1 < \alpha < 2$, do que aquelas derivadas analiticamente, como é feito para algumas especificações em (Barbosa, *et al.*, 2003b; Vinagre, *et al.*, 2004). Estas equações aproximadas são úteis e podem, por isso, ser utilizadas para o projecto de sistemas.

5.3 Sintonia de Controladores PID

Na secção anterior estabeleceu-se um procedimento simples de sintonia de um sistema de controlo fraccionário, com a função de transferência ideal de Bode em malha aberta, baseado no ajuste dos parâmetros de referência $(\alpha; \omega_c)$ de um integrador fraccionário. A ordem α e a frequência ao ganho unitário ω_c estabelecem respectivamente a sobreelongação e a velocidade de resposta de saída do sistema.

Entrando em linha de conta com este conhecimento, nesta secção utiliza-se o sistema em malha fechada com a função de transferência ideal de Bode $L(s) = (\omega_c/s)^\alpha$ (Figura 5.1) como *sistema de referência* para a sintonia de controladores PID (Barbosa, *et al.*, 2003b; Barbosa, *et al.*, 2004c). Para esse efeito, considera-se o sistema de controlo de realimentação unitária ilustrado na Figura 5.10, em que $G_c(s)$ e $G_p(s)$ são respectivamente as funções de transferência do controlador PID e do processo a controlar. O sistema pode ser sujeito tanto a variações na entrada de referência $r(t)$ como a variações na entrada de perturbação $p(t)$.

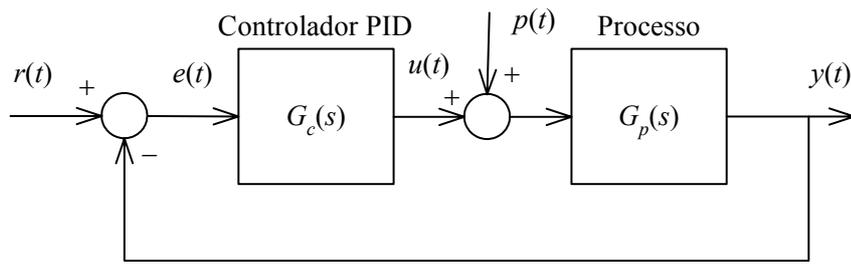


Figura 5.10 – Sistema de controlo realimentado com o controlador PID $G_c(s)$.

De seguida, descreve-se a estratégia adoptada para o projecto de controladores PID. Em primeiro lugar, apresenta-se o tipo de controlador PID utilizado nas simulações, seguido de uma breve descrição do método de optimização usado para a determinação dos seus parâmetros. Por último, a metodologia proposta é aplicada a diversos tipos de processos e comparada com outras técnicas de sintonia existentes. Mostra-se que o controlador PID, sintonizado de acordo com o método proposto, torna o sistema em malha fechada robusto na perspectiva de variações do ganho, com respostas ao degrau revelando uma propriedade de amortecimento constante.

Recentemente, têm surgido outros trabalhos (Chen, *et al.*, 2003b; Chen, *et al.*, 2004) relacionados com a sintonia de controladores PID robustos tendo como ideia base a obtenção da tal região de “fase constante” nos diagramas de Bode do sistema compensado. Embora, nesses estudos, as abordagens ao problema sejam diferentes daquela que se apresenta neste texto, o objectivo é o mesmo, ou seja, obter um sistema em malha fechada robusto a variações do ganho com respostas ao degrau exibindo uma propriedade de amortecimento constante.

5.3.1 Controlador PID

A equação nos tempos de um controlador PID ideal pode ser dada através da seguinte expressão:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right) \quad (5.38)$$

onde $u(t)$ é o sinal de controlo fornecido pelo controlador e $e(t)$ o sinal de erro ao qual se aplica as acções correctivas. Os parâmetros K , T_i e T_d são respectivamente o ganho

proporcional, a constante de tempo integral e a constante de tempo diferencial do controlador PID. O conjunto de variáveis (K, T_i, T_d) são as constantes a serem sintonizadas.

A função de transferência correspondente $G_c(s)$ é dada por:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (5.39)$$

De forma a reduzir a amplitude do sinal de controlo $u(t)$ ou o efeito de qualquer ruído de alta frequência existente no sistema, o termo derivativo sT_d é usualmente implementado através de um diferenciador limitado nas frequências do tipo $sT_d/(1+sT_d/N)$, em que $3 \leq N \leq 20$ (Åström, 1995). A constante N do filtro pode também ser considerada como um parâmetro adicional a ser determinado. Assim, um controlador PID prático deve ser caracterizado por uma função de transferência própria do tipo:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{sT_d}{1+sT_d/N} \right) \quad (5.40)$$

Para $N > 10$, os resultados obtidos através das equações (5.39) e (5.40) são muito similares (Zhuang e Atherton, 1993). A estrutura do PID (5.40) é usualmente modificada de forma a implementar a acção derivativa na malha de realimentação e, assim, reduzir os efeitos de saturação da entrada do processo devido a alterações na entrada de referência. Outras configurações e modificações do PID são possíveis e podem ser encontradas em qualquer livro de controlo clássico (Martins de Carvalho, 2000) ou em (Åström, 1995). Neste estudo, utiliza-se a implementação (5.40) com $N = 100$. A escolha deste valor para N prende-se somente com o facto de se obterem resultados idênticos quer usando a expressão (5.39) ou a expressão (5.40).

5.3.2 Método de Optimização

A Figura 5.11 mostra o diagrama de blocos da estrutura geral do sistema adoptado para a sintonia dos parâmetros (K, T_i, T_d) do controlador PID. De referir que se trata de um procedimento *off-line*.

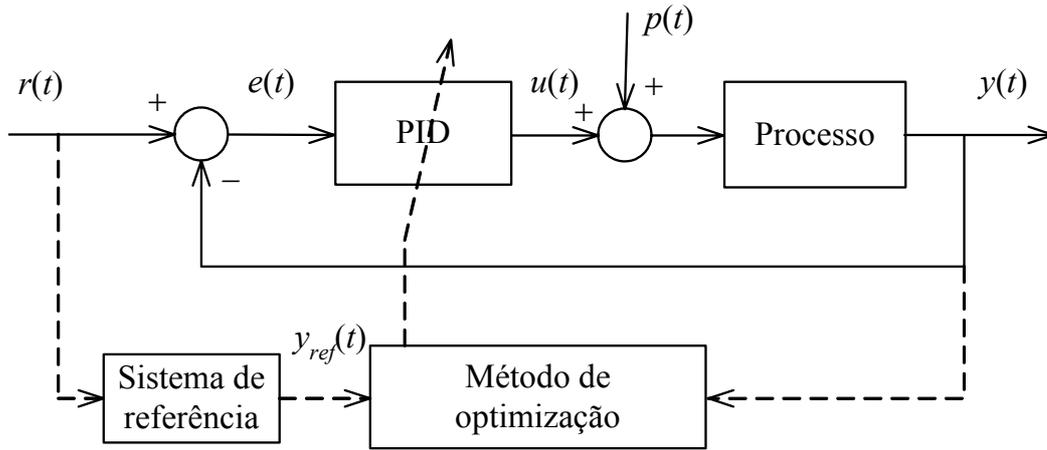


Figura 5. 11 – Estrutura do sistema para sintonia de controladores PID.

O *sistema de referência* é dado pela função de transferência do sistema em malha fechada, com um integrador fraccionário inserido no ramo directo, conforme indicado na Figura 5.1. Desta forma, o sistema possui a chamada função de transferência ideal de Bode $L(s)$ em malha aberta, obtendo-se a função de transferência de ordem fraccionária $T(s)$ (5.7), a qual é reproduzida aqui:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (5.41)$$

Os parâmetros de referência $(\alpha; \omega_c)$ denotam respectivamente a ordem α e a frequência ao ganho unitário ω_c de um integrador fraccionário. Neste estudo, a ordem α pode assumir valores reais não inteiros tais que $1 < \alpha < 2$.

A partir do diagrama de blocos da Figura 5.11, constata-se que a resposta de saída $y(t)$, do sistema em malha fechada com o PID, é comparada com a resposta de saída desejada $y_r(t)$, produzida pelo sistema de referência fraccionário (5.41). Então, o erro resultante, $e_d(t) = y_{ref}(t) - y(t)$, é minimizado através de um critério de desempenho de forma a determinar os valores óptimos dos parâmetros do PID. Neste estudo, adoptou-se como critério a minimização do integral do erro quadrático (ISE²), o qual é definido da seguinte forma:

² Integral square error

$$J(K, T_i, T_d) = \int_0^{\infty} [y(t) - y_{ref}(t)]^2 dt \quad (5.42)$$

onde (K, T_i, T_d) são os parâmetros do controlador a serem otimizados.

Contudo, pode-se tentar usar outros critérios de desempenho óptimos, tais como o integral do erro absoluto (IAE³), o integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo (ITAE⁴), ou o integral do quadrado do erro multiplicado pelo tempo (ISTE⁵). Estes índices são dados pelas expressões:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e_d(t)| dt \quad (5.43)$$

$$ITAE = \int_0^{\infty} t \cdot |e_d(t)| dt \quad (5.44)$$

$$ISTE = \int_0^{\infty} [t \cdot |e_d(t)|]^2 dt \quad (5.45)$$

As simulações efectuadas revelam que a adopção de qualquer um destes índices alternativos (IAE, ITAE ou ISTE) produzem resultados muito similares aos obtidos através do índice adoptado (ISE). Todavia, a selecção do melhor critério é um assunto que deve ser tratado de uma forma mais aprofundada e, portanto, será alvo de estudo em trabalhos futuros.

Tomando isto em consideração, o projecto do controlador PID pode ser formulado como um problema de optimização com restrições, isto é:

$$\underset{K, T_i, T_d}{\text{minimizar}} \quad J(K, T_i, T_d) \quad \text{sujeito a: } (K, T_i, T_d) > 0 \quad (5.46)$$

Ou de outra forma, a sintonia do controlador PID consiste na procura dos valores óptimos dos parâmetros (K, T_i, T_d) que minimizam o índice $J(K, T_i, T_d)$, enquanto se garante a estabilidade do sistema em malha fechada e que os parâmetros do controlador sejam positivos. Para a minimização do índice de desempenho (5.42), com as restrições definidas em (5.46), utilizaram-se as funções da biblioteca de optimização do MATLAB.

³ Integral absolute error

⁴ Integral time absolute error

⁵ Integral square time error

5.4 Aplicação da Metodologia Proposta: Exemplos Ilustrativos

Nesta secção aplica-se o método de sintonia proposto a vários tipos de processos, os quais são frequentemente encontrados nos sistemas de controlo industriais.

Em primeiro lugar, considera-se os processos definidos por funções de transferência de sistemas de segunda ($n = 2$), terceira ($n = 3$), e quarta ordem ($n = 4$), ou seja:

$$G_{pn}(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n = 2, 3, 4 \quad (5.47)$$

Tabela 5. 1: Parâmetros do controlador PID, (K, T_i, T_d) , para os processos $G_{pn}(s) = 1/(s+1)^n$, $n = 2, 3, 4$. As especificações do sistema são $\alpha = 1,5$ e $\omega_c = 0,6$ rad/s.

n	K	T_i	T_d
2	0,4519	0,4452	1,0510
3	1,1562	1,0216	1,1034
4	1,6934	1,4227	1,5594

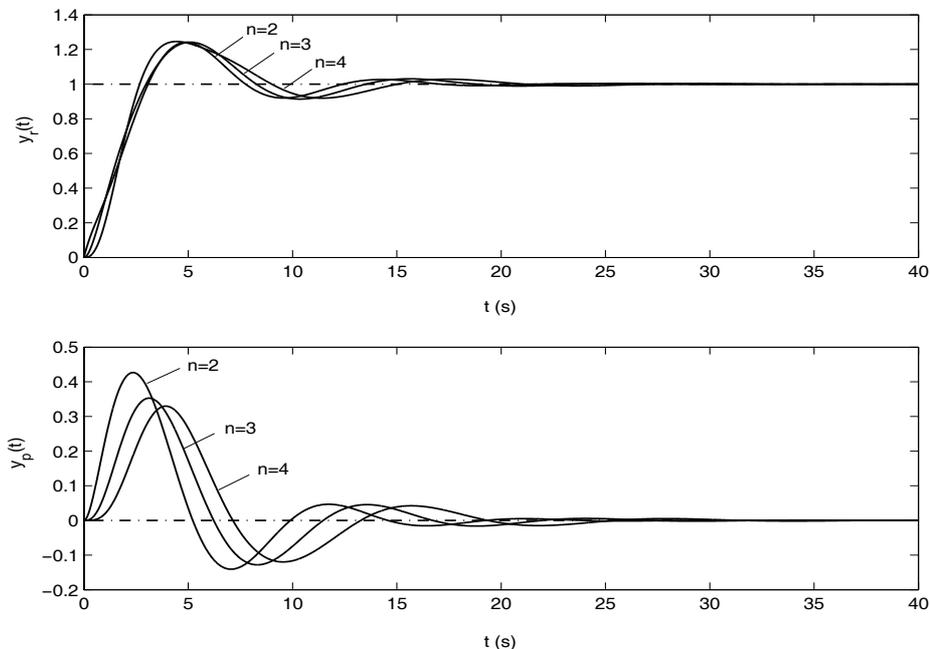


Figura 5. 12 – Respostas $y_r(t)$ e $y_p(t)$ a um degrau unitário aplicado na entrada de referência e na entrada de perturbação, respectivamente, do sistema em malha fechada com o controlador PID e para $G_{pn}(s) = 1/(s+1)^n$, $n = 2, 3, 4$. As especificações desejadas são $\alpha = 1,5$ (MF = 45°) e $\omega_c = 0,6$ rad/s.

A Figura 5.12 mostra as respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada para os processos $G_{pn}(s)$ com o controlador PID sintonizado para as especificações de $\alpha = 1,5$ ($MF = 45^\circ$) e $\omega_c = 0,6$ rad/s. Os parâmetros (K, T_i, T_d) obtidos para o PID estão listados na Tabela 5.1.

Como se pode verificar, as respostas ao degrau unitário aplicado na entrada de referência, $y_r(t)$, estão muito próximas umas das outras, mesmo para o sistema de ordem superior $n = 4$. Mais precisamente, as respostas possuem uma sobreelongação quase constante, isto é, exibem uma propriedade de amortecimento constante. Por outro lado e, como esperado, as respostas ao degrau unitário aplicado na entrada de perturbação, $y_p(t)$, são diferentes, particularmente nas sobreelongações atingidas. Isto é devido ao facto de o controlador PID estar sintonizado para variações na entrada de referência.

A Figura 5.13 mostra os diagramas de Bode da amplitude e da fase do sistema em malha aberta $G_c(s)G_{pn}(s)$ com o controlador PID $G_c(s)$, para $G_{pn}(s) = 1/(s+1)^n$, $n = 2, 3, 4$, e com as especificações desejadas de $(\alpha; \omega_c) \equiv (1,5; 0,6 \text{ rad/s})$. O gráfico revela que a curva da fase é quase constante em torno da frequência ao ganho unitário $\omega_c = 0,6$ rad/s, e que o sistema possui uma margem de fase de aproximadamente $MF = 45^\circ$. No entanto, é de assinalar que esta propriedade (de fase constante) se verifica apenas num intervalo de frequências limitado em torno da frequência ao ganho unitário ω_c , conforme se pode ver através dos diagramas de Bode.

Desta forma, é de esperar que o sistema em malha fechada, com o controlador PID, sintonizado pelo método proposto, seja robusto a variações do ganho, exibindo respostas ao degrau com uma sobreelongação quase constante, ou seja, possuindo uma propriedade de amortecimento constante em torno de ω_c . A obtenção desta característica desejada é evidenciada através dos exemplos a seguir ilustrados.

No entanto, deve-se salientar que a obtenção da propriedade de amortecimento constante irá depender do tipo do processo $G_p(s)$ e das especificações $(\alpha; \omega_c)$ definidas para o sistema, nomeadamente a margem de fase MF desejada e a frequência ao ganho unitário ω_c para a qual ela ocorre.

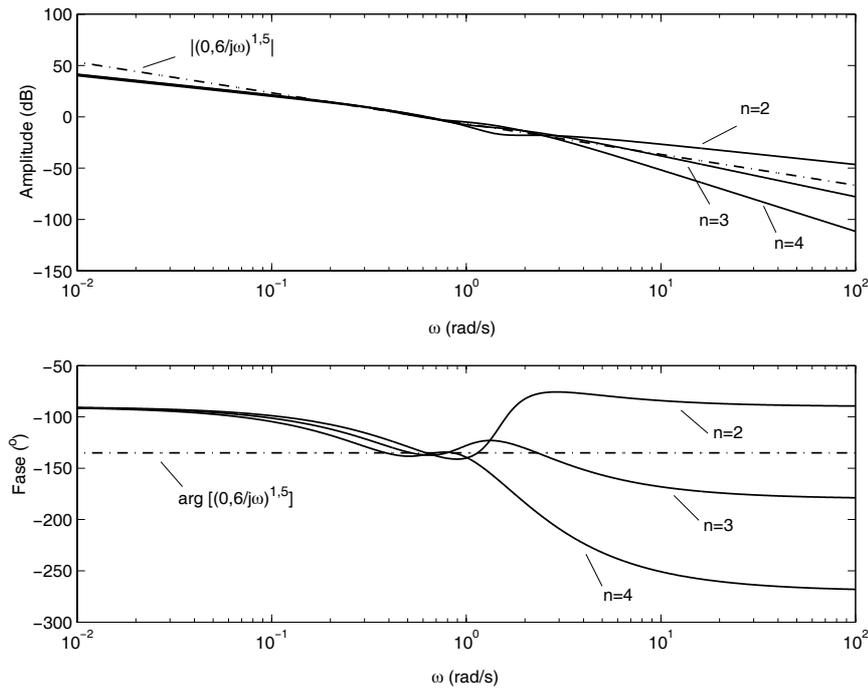


Figura 5. 13 – Diagramas de Bode da amplitude e da fase do sistema em malha aberta com o controlador PID, para $G_{pn}(s) = 1/(s+1)^n$, $n = 2, 3, 4$. As especificações desejadas são $\alpha = 1,5$ (MF = 45°) e $\omega_c = 0,6$ rad/s. Para efeitos de comparação é também mostrada a curva do integrador de ordem fraccionária ideal correspondente, que é dado por $(0,6/j\omega)^{1,5}$.

De forma a ilustrar mais claramente a eficácia do método proposto, de seguida analisa-se as respostas ao degrau do sistema para diferentes especificações de $(\alpha; \omega_c)$, considerando ainda o mesmo processo $G_{p3}(s)$. Assim, a Figura 5.14a) mostra a evolução das respostas ao degrau para vários valores da frequência ao ganho unitário $\omega_c = \{0,5; 0,75; 1\}$ rad/s considerando uma ordem (ou margem de fase) constante de $\alpha = 4/3$ (ou MF = 60°). Alternativamente, a Figura 5.14b) mostra as respostas ao degrau para MF = $\{30^\circ; 45^\circ; 60^\circ\}$ e $\omega_c = 1$ rad/s. Os parâmetros (K, T_i, T_d) obtidos para o controlador PID estão listados na Tabela 5.2.

Analisando as respostas, verifica-se que ao variar a frequência ao ganho unitário ω_c , e mantendo a ordem α constante, obtêm-se diferentes tempos de subida (*i.e.*, diferentes frequências naturais) da resposta de saída, mas com a mesma sobreelongação, ou seja, um sistema de amortecimento constante. Por outro lado, considerando uma frequência ao ganho unitário ω_c fixa, e variando a ordem α , obtêm-se diferentes sobreelongações na resposta de saída, mas com um tempo de subida aproximadamente constante.

Tabela 5. 2: Parâmetros do controlador PID, (K, T_i, T_d) , para o processo $G_{p3}(s)$.

MF	K	T_i	T_d	J
$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$				
$30^\circ (\alpha = 5/3)$	2,6762	1,0139	0,7097	0,0189
$45^\circ (\alpha = 3/2)$	2,7264	1,1914	0,8392	0,0098
$60^\circ (\alpha = 4/3)$	2,6479	1,4067	0,9970	0,0078
$\omega_c \text{ (rad/s)}$	K	T_i	T_d	J
$\text{MF} = 60^\circ (\alpha = 4/3)$				
1	2,6479	1,4067	0,9970	0,0078
0,75	1,8271	1,3977	1,0241	0,0109
0,5	1,0232	1,2889	1,2044	0,0257

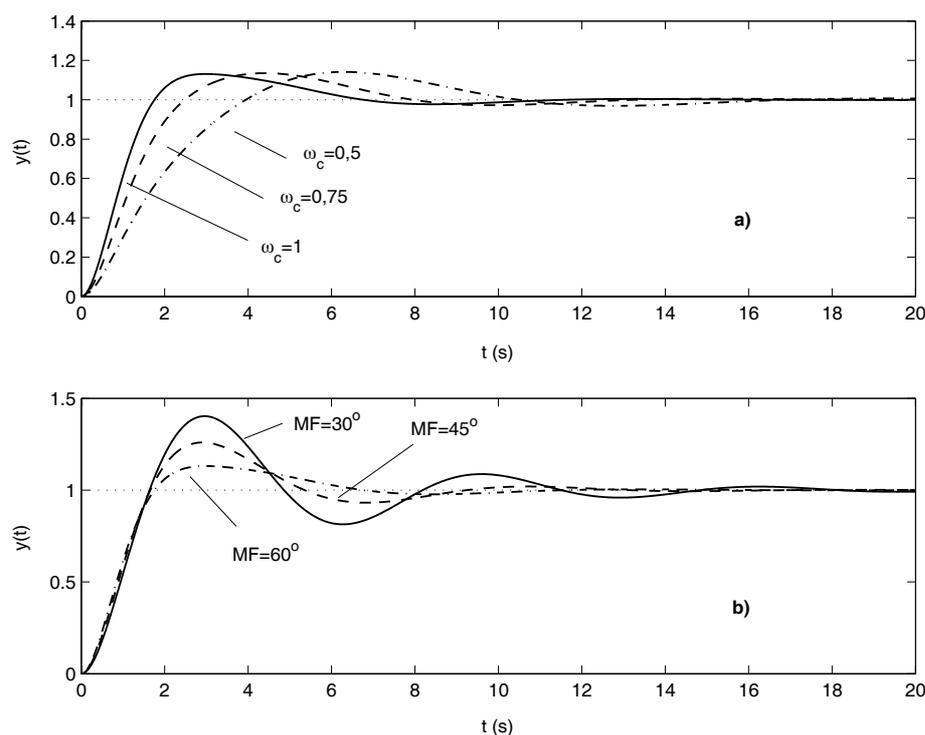


Figura 5. 14 – Respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado pelo método proposto, para $G_{p3}(s) = 1/(s+1)^3$, com as especificações: a) $\text{MF} = 60^\circ$ e $\omega_c = \{0,5; 0,75; 1\}$ rad/s, b) $\omega_c = 1$ rad/s e $\text{MF} = \{30^\circ; 45^\circ; 60^\circ\}$.

Deste modo, através da metodologia proposta, pode-se moldar a resposta de saída do sistema, próxima da resposta desejada, variando simplesmente os parâmetros de referência da sintonia $(\alpha; \omega_c)$.

De seguida testa-se a robustez do sistema a variações do ganho. Para isso, o controlador PID é sintonizado, através do método proposto, para diferentes especificações de $(\alpha; \omega_c)$, e tomando em consideração variações do ganho do sistema em torno do seu valor nominal ($K_p = 1$), correspondendo a valores de $K_p = \{0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4\}$. Por outras palavras, é permitida uma variação do ganho K_p até $\pm 40\%$ do seu valor nominal. Nas Figuras 5.15 e 5.16 estão ilustradas as respostas ao degrau unitário e os respectivos diagramas de Bode da fase do sistema compensado com $G_{p3}(s) = 1/(s+1)^3$, para $\alpha = 3/2$ (MF = 45°) e $\omega_c = 0,8$ rad/s, e com $G_{p4}(s) = 1/(s+1)^4$, para $\alpha = 4/3$ (MF = 60°) e $\omega_c = 0,5$ rad/s.

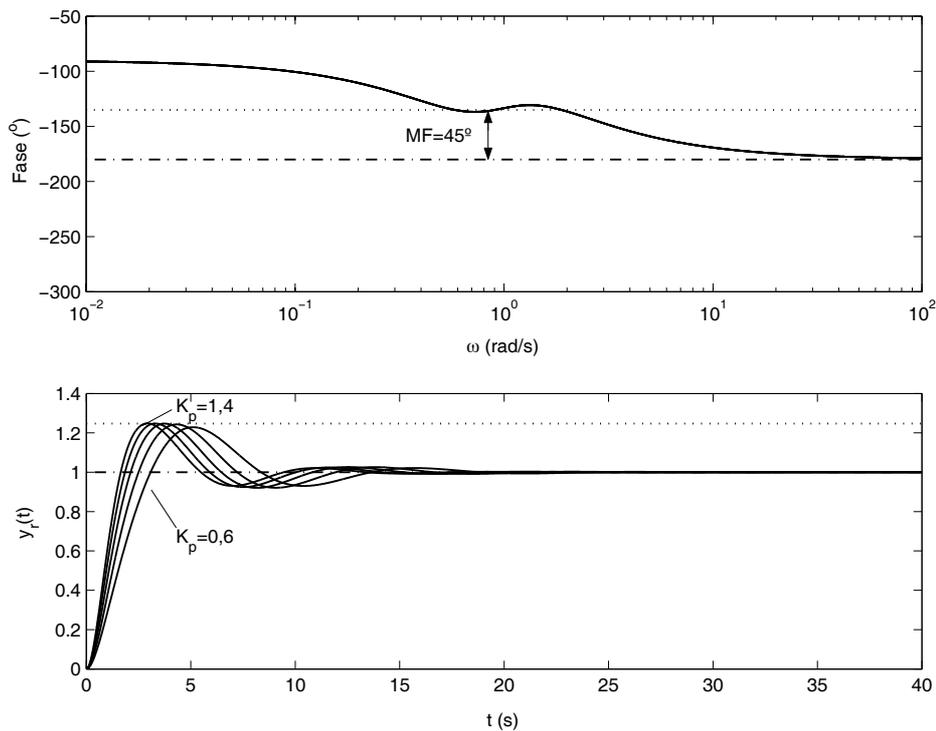


Figura 5.15 – Diagrama de Bode da fase e resposta ao degrau unitário, $y_r(t)$, do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado pelo método proposto, para $G_{p3}(s) = 1/(s+1)^3$ e $\alpha = 3/2$ (MF = 45°), $\omega_c = 0,8$ rad/s. Os parâmetros obtidos para o PID são $K = 1,9158$, $T_i = 1,1407$ e $T_d = 0,9040$.

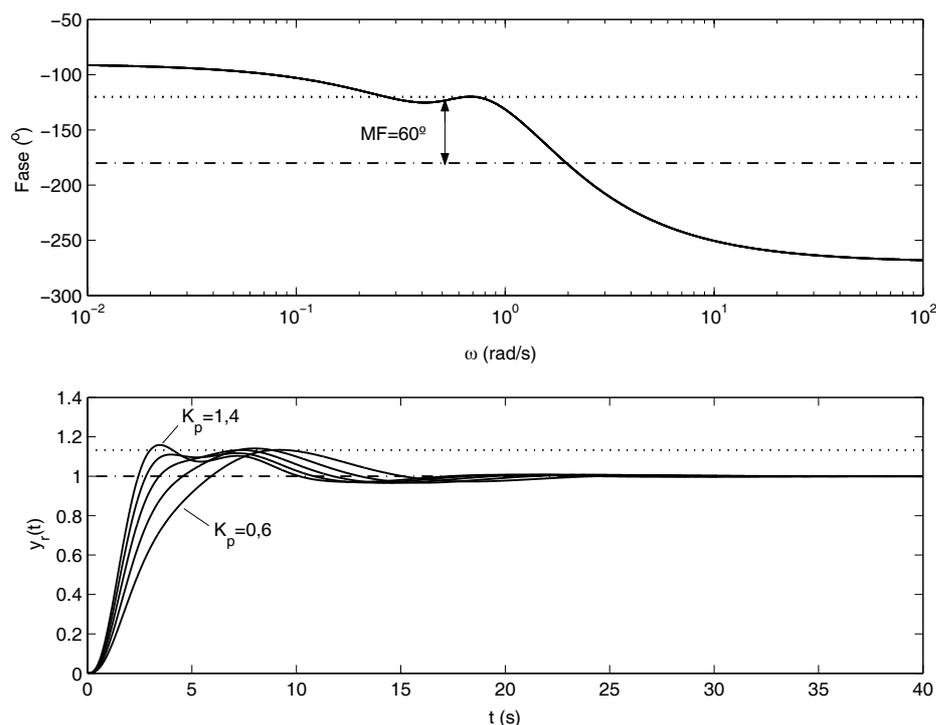


Figura 5. 16 – Diagrama de Bode da fase e resposta ao degrau unitário, $y_r(t)$, do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado pelo método proposto, para $G_{p4}(s) = 1/(s+1)^4$ e $\alpha = 4/3$ ($MF = 60^\circ$), $\omega_c = 0,5$ rad/s. Os parâmetros obtidos para o PID são $K = 1,3774$, $T_i = 1,7030$ e $T_d = 1,7187$.

Em ambas os casos, obtém-se a propriedade desejada de o sistema possuir um amortecimento constante, o qual corresponde às especificações pré-definidas para os valores de $(\alpha; \omega_c)$, conforme se observa através do diagrama de Bode da fase.

De facto, as respostas ao degrau possuem uma sobreelongação quase constante (variando apenas a frequência natural do sistema) independentemente da variação do ganho K_p do processo, em torno da frequência ao ganho unitário ω_c .

Mais uma vez, as observações anteriores levam à conclusão que o controlador PID, sintonizado através do método proposto, é robusto a variações do ganho possuindo uma propriedade de amortecimento constante em torno da frequência ao ganho unitário.

O facto de uma grande parte dos processos apresentarem uma resposta em degrau do tipo monótona crescente (a chamada curva em forma de S) foi observado pela primeira vez por Ziegler and Nichols (Z-N) no início da década de quarenta (Åström, 1995). Esta curva pode ser obtida a partir de dados experimentais ou simplesmente através da simulação do processo.

A forma em S da curva é característico de sistemas de ordem superior e, conseqüentemente, tais funções de transferência do processo, podem ser aproximadas por uma função do tipo:

$$G_p(s) = \frac{K_p e^{-Ls}}{\tau s + 1}, \quad K_p, \tau, L > 0 \quad (5.48)$$

a qual corresponde a um sistema de primeira ordem, com uma constante de tempo τ e um ganho estático K_p , em série com um atraso de transporte puro L . Este tipo de função de transferência é normalmente designado apenas como modelo de primeira ordem com atraso de transporte (FOPDT). É usual a derivação de fórmulas para o projecto de controladores PID a partir do modelo FOPDT, dado que frequentemente fornece uma boa aproximação das funções de transferência de processos, com excepção para os sistemas integrativos ou com pólos ressonantes. Aplica-se, de seguida, o método de sintonia proposto a este tipo de sistemas.

Para tomar em consideração o tempo de atraso do modelo FOPDT, o sistema de referência fraccionário $T(s)$ (expressão 5.7) é modificado para a seguinte forma:

$$T(s) = \frac{e^{-Ls}}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha + 1}, \quad \alpha, L > 0 \quad (5.49)$$

Como exemplo, considere-se uma função de transferência de um sistema de ordem oito (supostamente desconhecida):

$$G_{pb}(s) = \frac{1}{(s+1)^8} \quad (5.50)$$

A aproximação ao processo (5.50), a uma função do tipo (5.48), é aqui obtida através da aplicação do método dos mínimos quadrados entre as respostas ao degrau do processo $G_{pb}(s)$ e do modelo FOPDT $G_p(s)$. Os parâmetros obtidos são $K_p = 1$, $\tau = 3,38$ s e $L = 4,95$ s. Assim, a função estimada $\hat{G}_p(s)$ obtida é dada por:

$$\hat{G}_p(s) = \frac{e^{-4,95s}}{3,38s + 1} \quad (5.51)$$

A Figura 5.17 mostra as respostas ao degrau do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado de acordo com o método proposto, para a aproximação do modelo FOPDT $\hat{G}_{pb}(s)$ (5.51). Os parâmetros (K, T_i, T_d) obtidos para o PID encontram-se listados na Tabela 5.3. A Figura 5.17a) ilustra a evolução das respostas ao degrau à medida que se varia a frequência ao ganho unitário $\omega_c = \{0,15; 0,20; 0,25\}$ rad/s para um valor fixo da ordem (ou margem de fase) $\alpha = 3/2$ (ou MF = 45°). Alternativamente, a Figura 5.17b) mostra as respostas ao degrau para MF = $\{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ e $\omega_c = 0,25$ rad/s.

Como seria de esperar, para o primeiro caso, obtêm-se respostas cada vez mais lentas (*i.e.*, maiores tempos de subida) à medida que se diminui a frequência ao ganho unitário ω_c , mas mantendo-se a mesma sobreelongação. Do mesmo modo, para o segundo caso, obtêm-se sobreelongações decrescentes à medida que aumentamos a margem de fase MF (*i.e.*, para valores decrescentes da ordem α), mas com uma velocidade de resposta de saída aproximadamente constante, ou seja, praticamente com o mesmo tempo de subida.

Os resultados atrás referidos revelam que a metodologia proposta produz bons resultados apesar dos parâmetros do controlador PID serem derivados a partir do modelo de aproximação FOPDT $\hat{G}_{pb}(s)$. Deve-se realçar que o método proposto poderia ser aplicado directamente à função de transferência do processo $G_{pb}(s)$ se esta fosse suposta conhecida.

Tabela 5. 3: Parâmetros do controlador PID, (K, T_i, T_d) , para o processo $\hat{G}_{pb}(s)$.

MF ($^\circ$)	K	T_i	T_d	J
$\omega_c = 0,25$ rad/s				
30° ($\alpha = 5/3$)	0,4721	2,5620	0	0,0584
45° ($\alpha = 3/2$)	0,4824	3,0731	0,0349	0,0397
60° ($\alpha = 4/3$)	0,4974	3,4895	0,4419	0,0392
ω_c (rad/s)	K	T_i	T_d	J
MF = 45° ($\alpha = 3/2$)				
0,15	0,1158	0,9407	1,9900	0,1281
0,20	0,3091	2,1457	0,1165	0,0539
0,25	0,4824	3,0731	0,0349	0,0397

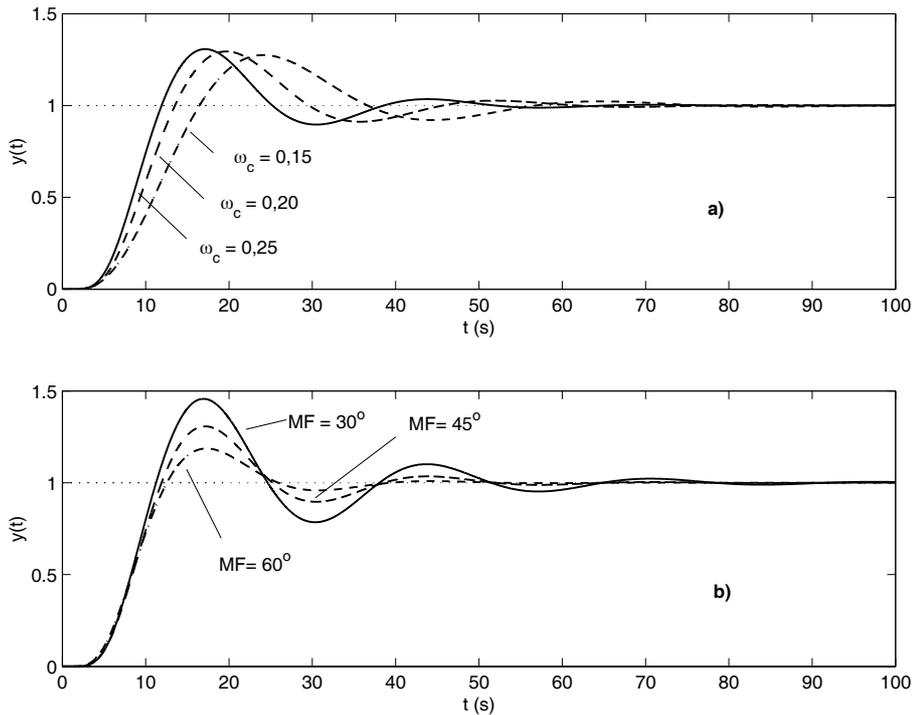


Figura 5. 17 – Respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada com o controlador PID, sintonizado através do método proposto, para $\hat{G}_{pb}(s)$, com as especificações: a) $MF = 45^\circ$ e $\omega_c = \{0,15; 0,20; 0,25\}$ rad/s, b) $\omega_c = 0,25$ rad/s e $MF = \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$.

A seguir faz-se uma comparação entre a metodologia proposta e outros métodos de sintonia óptima de controladores PID. Pretende-se, deste modo, ilustrar a sua eficácia face a outras técnicas já existentes. Para isso, considere-se o sistema de segunda ordem com um atraso de transporte elevado (Zhuang e Atherton, 1993):

$$G_{pc}(s) = \frac{1.2e^{-10s}}{(5s+1)(2.5s+1)} \quad (5.52)$$

Assim, para o processo (5.52), o controlador PID é sintonizado de acordo com três métodos diferentes, nomeadamente através das heurísticas de Z-N (Åström, 1995; Basilio e Matos, 2002), pelo método proposto e pelo método de sintonia óptimo dado por Zhuang e Atherton (1993). Na verdade, estes últimos autores propõem várias fórmulas de sintonia óptima do controlador PID usando diferentes critérios de desempenho baseados na minimização de um integral. De facto, Zhuang e Atherton (1993) consideram a seguinte forma geral dos critérios de desempenho óptimos:

$$J_n(\theta) = \int_0^{\infty} [t^n e(\theta, t)]^2 dt \quad (5.53)$$

em que $e(\theta, t)$ designa o sinal de erro que entra no PID e θ o conjunto dos parâmetros do PID, os quais podem ser determinados minimizando o integral $J_n(\theta)$. São considerados três valores para n , ou seja, $n = 0, 1, 2$, correspondentes a três critérios óptimos diferentes. Assim, para $n = 0$, obtém-se o critério do integral do erro quadrático (ISE); para $n = 1$, o critério do integral quadrático do tempo multiplicado pelo erro (ISTE); e para $n = 2$, o critério do integral quadrático do tempo ao quadrado multiplicado pelo erro (IST²E⁶). Ainda de acordo com a estrutura do sistema ilustrado na Figura 5.10, a sintonia pode ser feita para variações na entrada de referência $r(t)$ ou para variações na entrada de perturbação $p(t)$. Neste exemplo adopta-se o critério de desempenho óptimo ISTE para variações na entrada de referência $r(t)$.

Desta forma, se o processo pode ser representado pelo modelo FOPDT (5.48), os parâmetros do controlador PID, (K, T_i, T_d) , podem ser determinados usando as expressões (Zhuang e Atherton, 1993):

$$K = \frac{a_1}{K_p} \left(\frac{L}{\tau} \right)^{b_1} \quad (5.54)$$

$$T_i = \frac{\tau}{a_2 + b_2 (L/\tau)} \quad (5.55)$$

$$T_d = a_3 \tau \left(\frac{L}{\tau} \right)^{b_3} \quad (5.56)$$

Os coeficientes (a_i, b_i) , $i = 1, 2, 3$, das fórmulas (5.54)–(5.56), estão definidos na Tabela 5.4 para diferentes razões de L/τ .

Tabela 5. 4: Coeficientes (a_i, b_i) , $i = 1, 2, 3$, do critério ISTE, para variações na entrada de referência $r(t)$.

L/τ	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
0,1–1,0	1,042	-0,897	0,987	-0,238	0,385	0,906
1,1–2,0	1,142	-0,579	0,919	-0,172	0,384	0,839

⁶ Integral squared time-squared weighted error

A Figura 5.18 mostra as respostas ao degrau do sistema em malha fechada com $G_{pc}(s)$ e para o PID sintonizado através dos três métodos referidos, ou seja, o método proposto, o método óptimo ISTE e o método de Z-N clássico. Para ilustrar a resposta do sistema a variações na entrada de perturbação $p(t)$, é introduzida uma perturbação em degrau de amplitude $p(t-t_0)=0,5$ para $t_0=100$ s. A Tabela 5.5 lista os parâmetros do PID, (K, T_i, T_d) , para os três métodos (Z-N, ISTE e Proposto), assim como as especificações temporais do tempo de subida T_r , tempo de estabelecimento T_s e sobreelongação percentual $\%OS$ ⁷. A sintonia do controlador PID, para o método proposto, é obtida para as especificações de $(\alpha; \omega_c) \equiv (1,11; 0,25)$, as quais correspondem a uma margem de fase $MF = 80^\circ$.

Tabela 5. 5: Parâmetros do PID, (K, T_i, T_d) , e especificações temporais, $(T_r, T_s, \%OS)$, do sistema compensado com $G_{pc}(s)$.

Método	K	T_i	T_d	T_r	T_s	$\%OS$
Z-N	0,771	16,310	4,077	16,50	91,26	10,58
ISTE	0,655	10,370	4,105	17,69	55,15	8,00
Proposto	0,6214	9,4645	4,3376	17,96	55,44	6,45

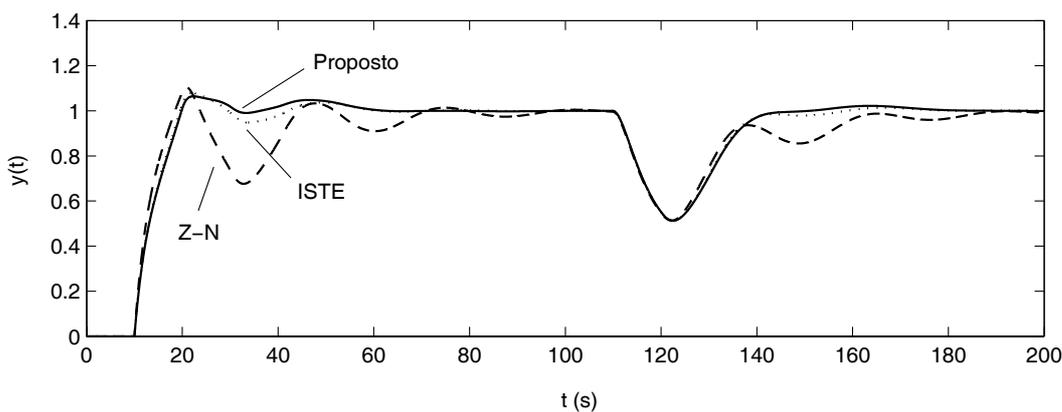


Figura 5. 18 – Respostas ao degrau $r(t)$ e à perturbação $p(t)$ do sistema em malha fechada com o controlador PID sintonizado de acordo com as heurísticas de Z-N, o critério ISTE e o método proposto para $G_{pc}(s)$. As especificações do sistema (para o método proposto) são $MF = 80^\circ$ e

$$\omega_c = 0,25 \text{ rad/s.}$$

⁷ *Overshoot percentual*

Os resultados mostram que as heurísticas de Z-N fornecem sobreelongações relativamente elevadas (e, em particular, subelongações) que podem ser indesejáveis para o sistema. Por outro lado, tanto o método proposto como o critério ISTE fornecem bons resultados, com sobreelongações admissíveis e tempos de estabelecimento pequenos. Isto verifica-se tanto para variações na entrada de referência $r(t)$ como para variações na entrada de perturbação $p(t)$. De notar ainda que a metodologia proposta fornece o sistema menos oscilatório tanto para $r(t)$ como para $p(t)$, isto é, obtém-se um melhor seguimento da referência e uma rejeição maior a perturbações. Mais ainda, com este método é possível sintonizar o PID de forma a obter uma resposta de saída desejada simplesmente através do ajuste dos parâmetros de referência do modelo fraccionário $(\alpha; \omega_c)$.

A comparação entre o método proposto e o de Z-N não é totalmente “honesto”, dado que a nova abordagem requer o conhecimento do modelo do processo e impõe um peso computacional significativo, enquanto que as heurísticas de Z-N não necessitam de nenhuma destas duas coisas. O interesse do Z-N reside exactamente neste facto, pois pode ser aplicado a processos com funções de transferência completamente desconhecidas, sem quaisquer cálculos mais complexos do que aqueles feitos com o uso do papel e lápis. Todavia, as suas desvantagens são óbvias e novos métodos devem ser desenvolvidos para se obterem respostas mais satisfatórias. A sua inclusão nesta comparação justifica-se pelo facto de, actualmente, ainda ser um dos métodos de sintonia mais utilizados na indústria, devido essencialmente à sua simplicidade e à obtenção de resultados satisfatórios para grande parte dos sistemas de controlo de processos.

Resumindo, a estratégia proposta é capaz de produzir resultados idênticos ou superiores relativamente a outras técnicas de sintonia existentes, com a vantagem de produzir uma resposta de saída próxima de um modelo de referência desejado. Mais ainda, os sistemas em malha fechada, sintonizados pelo método proposto, são robustos a variações do ganho exibindo respostas ao degrau com uma propriedade de amortecimento constante.

5.5 Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma nova estratégia para a sintonia de controladores PID. O método proposto é baseado na aplicação de conceitos básicos associados ao controlo de sistemas de ordem fraccionária. Assim, dadas as especificações de um integrador de ordem fraccionário $(\omega_c/s)^\alpha$ (designada de função de transferência ideal de Bode), ou seja, $(\alpha; \omega_c)$ em que ω_c representa a frequência ao ganho unitário e α o declive a essa frequência (*i.e.*, a margem de fase MF desejada), é possível, através da minimização do critério de desempenho do integral do erro quadrático (ISE) entre as respostas ao degrau dos dois sistemas (o sistema de referência e o actual com o controlador PID), assegurar que a fase em torno de ω_c é quase constante. Deste modo, obtêm-se sistemas em malha fechada mais robustos a variações do ganho com respostas ao degrau exibindo uma sobreelongação quase constante, isto é, a propriedade de um amortecimento constante.

São também apresentadas as principais características, nos tempos e nas frequências, do sistema de controlo de ordem fraccionária que é utilizado como sistema de referência para a sintonia do controlador PID. Nesta perspectiva, são derivadas diversas expressões úteis (algumas das quais originais) para caracterizar tanto a resposta nos tempos como a resposta nas frequências do referido sistema de referência. A metodologia proposta é aplicada a vários exemplos ilustrativos que demonstram a sua eficiência e aplicabilidade.

De referir que, embora o sistema em malha fechada, com o controlador PID, seja um sistema de ordem inteira, este pode ser manipulado de forma a apresentar uma dinâmica fraccionária (apesar desta se verificar somente para um intervalo limitado nas frequências). Este facto abre um novo ponto de vista sobre a sintonia de controladores PID que, eventualmente, permitirá o desenvolvimento de heurísticas mais robustas, assim como o estabelecimento de um esquema de sintonia comum para os sistemas de ordem inteira e de ordem fraccionária.

As simulações realizadas mostram que a ordem α é mais fácil de seleccionar enquanto que a escolha da frequência ω_c pode-se revelar mais problemática. Para se conseguir um bom desempenho, ω_c deve tomar um valor o mais elevado possível. Contudo, se ω_c for demasiado elevado, torna-se difícil a obtenção dos parâmetros do controlador PID, que tornam o sistema compensado próximo do sistema de referência fraccionário. Portanto, deve-se tentar estabelecer um compromisso entre os parâmetros de referência $(\alpha; \omega_c)$ para a

sintonia do PID. De facto, alguns tipos de processos são dificilmente aproximados pelo sistema de referência com a função de transferência ideal de Bode. Neste caso, não interessa o quanto optimizado está o PID, simplesmente torna-se difícil (senão impossível) aproximá-lo ao sistema de referência. Isto é devido ao facto de o controlador PID possuir uma estrutura fixa que, de certa forma, limita o conjunto de possibilidades de ajuste da função de transferência em malha aberta do sistema compensado (conhecido da terminologia Inglesa como “loop shaping”).

Tomando estas ideias em consideração, a utilização de um controlador PID fraccionário (FrPID) (referido no Capítulo 2), o qual possui mais dois graus de liberdade (*i.e.*, as ordens fraccionárias (λ, μ)) que o PID clássico, pode revelar-se mais interessante e de grande utilidade prática. O uso de tais controladores FrPID pode ser objecto de análise de uma futura investigação, estendendo, deste modo, o estudo realizado neste capítulo. Todavia, outros desenvolvimentos podem ser efectuados, tais como:

- Realizar uma análise mais sistemática do estudo aqui apresentado que, por exemplo, leve ao estabelecimento de expressões analíticas para os ganhos (K, T_i, T_d) do controlador PID em função dos parâmetros de sintonização $(\alpha; \omega_c)$, assim como à definição do seu domínio de aplicabilidade;
- Adoptar a metodologia proposta a outros tipos de processos, incluindo sistemas de fase não mínima.

O objectivo do estudo aqui realizado é o de analisar sistemas de ordem inteira e, em particular, sistemas compensados que utilizem o controlador PID. Assim, adoptou-se uma perspectiva de aplicação da teoria das derivadas e integrais fraccionários ao controlo automático de sistemas inteiros. Todavia, a perspectiva inversa, isto é, a análise de sistemas fraccionários através de sistemas de ordem inteira, é também uma hipótese válida. Neste caso, é interessante verificar que embora o sistema em malha fechada, com o controlador PID, seja um sistema de ordem inteira pode, contudo, ser analisado como sendo de ordem fraccionária (apesar de a dinâmica fraccionária se verificar apenas sobre uma faixa limitada de frequências). Como se demonstra, este facto pode (e deve) ser utilizado com vantagens para a análise e controlo de sistemas.

Conclusões e Perspectivas de Evolução Futura

NESTE capítulo estabelecem-se as principais conclusões, contribuições e perspectivas de evolução futura do trabalho formuladas no âmbito desta dissertação. Nesta perspectiva, a secção 6.1 discute os resultados obtidos e indica as principais conclusões do trabalho realizado. De seguida, a secção 6.2 aponta as principais contribuições da tese para a análise e controlo de sistemas e, por último, a secção 6.3 endereça várias linhas de investigação futura do trabalho.

6.1 Discussão dos Resultados e Conclusões

A discussão dos resultados e as conclusões aqui estabelecidas são relativas aos seguintes três pontos:

- Análise de sistemas com folga dinâmica e do oscilador de Van der Pol fraccionário;
- Desenvolvimento de aproximações digitais racionais aos operadores fraccionários;
- Sintonia de controladores PID robustos.

6.1.1 Análise de Sistemas com Folga Dinâmica e do Oscilador de Van der Pol Fraccionário

Nos anos mais recentes, tem sido dedicada uma atenção especial aos sistemas não lineares e, em particular, aos sistemas caóticos, devido ao facto de estes representarem o comportamento da maioria dos fenómenos complexos naturais.

Assim, no capítulo 3 são analisados dois tipos de sistemas não lineares numa perspectiva da aplicação da teoria do cálculo fraccionário:

1. Sistemas com folga e impactos;
2. Oscilador de Van der Pol fraccionário.

No primeiro ponto analisam-se sistemas com folga e impactos baseado na função descritiva (FD). Para isso, estudou-se um sistema mecânico composto por duas massas que são sujeitas a folga dinâmica (*i.e.*, folga mais fenómeno dos impactos). As experiências realizadas mostraram que os resultados obtidos podem diferir significativamente dos gerados através da adopção do modelo clássico da folga estática (*i.e.*, sem a inclusão do fenómeno dos impactos). Este facto sugere que se deve incluir o efeito dos impactos na análise deste tipo de sistemas, seja para a obtenção de um modelo mais preciso, seja para a realização de um controlo mais eficiente do sistema. Os resultados revelam ainda que estes sistemas podem apresentar fenómenos complexos, tais como a duplicação periódica ou mesmo o caos. Verifica-se que estas características podem ser parametrizadas através dos gráficos da FD do sistema não linear. A aplicabilidade e precisão do método da FD é testado usando controladores PID. Mostrou-se que a precisão da previsão dos ciclos limite, nomeadamente da sua amplitude e frequência, é muito aceitável. Este facto valida a aplicação do método, mesmo na presença de características intrínsecas fortes que, doutro modo, seriam difíceis de analisar aplicando outras abordagens ao problema.

Os resultados obtidos incentivam a continuação do estudo de sistemas não lineares numa perspectiva similar à realizada neste estudo e, conseqüentemente, também à análise da predição de ciclos limite. Os trabalhos podem levar ao desenvolvimento de algoritmos de controlo e a esquemas de compensação capazes de melhorar o desempenho do sistema.

Por outro lado, o estudo dos osciladores não lineares tem desempenhado um papel muito importante no desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos. O oscilador de Van der Pol

(VPO) representa um sistema não linear com um comportamento peculiar e que surge naturalmente em vários domínios.

Deste modo, no segundo ponto propõe-se uma versão generalizada do VPO clássico através da introdução de uma derivada fraccionária nas equações de estado que descrevem a sua dinâmica. O sistema do Van der Pol fraccionário (FrVPO) resultante apresenta características bastante diferentes das geradas pelo VPO clássico, que dependem da ordem α da derivada fraccionária. De facto, com o sistema FrVPO podem-se distinguir diversos comportamentos que vão desde os regimes de oscilador até um comportamento de não oscilador.

Constata-se que a introdução de uma derivada de ordem fraccionária na formulação de espaço de estados do VPO clássico revela algumas características interessantes que são mais “visíveis” no domínio das frequências. Aliás, para uma caracterização global do sistema, verifica-se que se torna essencial a análise através das duas perspectivas (tempos e frequências). Mais ainda, com o sistema FrVPO obtêm-se diferentes regimes da saída (em contraste com o VPO inteiro) que podem ser úteis para uma melhor compreensão e controlo deste tipo de sistemas.

6.1.2 Desenvolvimento de Aproximações Digitais Racionais aos Operadores Fraccionários

Os sistemas de ordem fraccionária são caracterizados por equações integro-diferenciais de ordem não inteira (ou fraccionária), definidas no domínio dos tempos através do operador fraccionário ${}_a D_t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Normalmente, para a análise e projecto de sistemas de controlo adopta-se o domínio das frequências (*i.e.*, na variável s de Laplace). A definição do operador fraccionário neste plano é dada por uma função do tipo s^α , $\alpha \in \mathbb{R}$. Podem-se citar vários exemplos de sistemas (por exemplo, o controlador CRONE e o controlador PID fraccionário) onde o operador s^α é o seu elemento fundamental. Deste modo, a principal questão envolvida na implementação digital de um controlo de ordem fraccionária consiste na discretização da função s^α . Nesta perspectiva, o capítulo 4 propõe uma nova abordagem para a obtenção de funções racionais discretas (filtros IIR) que aproximam os integradores e diferenciadores de ordem fraccionária. A estratégia proposta adopta as técnicas de modelação de sinais

determinísticos aplicadas ao desenvolvimento por PSE dos equivalentes discretos dos operadores fraccionários. Assim, são desenvolvidos os métodos de Padé, de Prony e de Shanks, as quais requerem somente a resolução de um sistema de equações lineares. No entanto, salienta-se que estas técnicas fornecem soluções subóptimas para o problema de modelação do sinal e, conseqüentemente, são diferentes da “verdadeira” solução obtida pela aplicação (directa) do método dos mínimos quadrados (*i.e.*, solução óptima), a qual possui a desvantagem de requerer a resolução de um sistema de equações não lineares.

As técnicas propostas geram funções racionais com um bom desempenho, tanto no domínio das frequências como no domínio dos tempos. Mais ainda, as funções racionais obtidas são causais, estáveis e de fase mínima, o que as torna indicadas para uma análise por transformada dos Z e para implementação digital em tempo real. São apresentados vários exemplos ilustrativos que demonstram a eficácia das técnicas adoptadas e revelam que as aproximações racionais geradas possuem um desempenho idêntico ou superior face a outros métodos actualmente existentes, nomeadamente ao extensivamente usado método de CFE. As aproximações resultantes são testadas no cálculo de diversas funções temporais, e são comparadas com as respectivas expressões analíticas. Os resultados obtidos mostram uma boa concordância entre as curvas analíticas e as aproximadas, abrangendo um intervalo de tempo longo, para o caso de funções não periódicas, e uma precisão elevada (as curvas são praticamente coincidentes) no caso de funções periódicas, mesmo quando se adoptam frequências baixas.

6.1.3 Sintonia de Controladores PID Robustos

O controlador PID é, sem dúvida, a forma de controlo mais utilizada em sistemas de controlo industriais. Assim, o propósito do capítulo 5 foi o de tentar estabelecer técnicas de sintonia melhoradas com vista a alargar o seu campo de aplicação, tanto para o controlo de sistemas de ordem inteira como para o controlo de sistemas de ordem fraccionária. Deste modo, foi proposta uma metodologia de sintonia de controladores PID que fornece respostas temporais do sistema compensado com uma sobreelongação quase constante, definida previamente como uma das especificações do sistema. As especificações são dadas através da frequência ao ganho unitário e do declive, a essa frequência, de um integrador de ordem fraccionário (designado como *função de transferência ideal de Bode*). O método proposto consiste na

minimização do integral do erro quadrático entre as respostas ao degrau de um sistema de referência, com a função de transferência ideal de Bode em malha aberta, e o sistema compensado com o controlador PID. Verifica-se que os sistemas compensados, sintonizados por este método, tornam-se robustos a variações do ganho exibindo respostas ao degrau com uma propriedade de um amortecimento constante.

A estratégia proposta foi aplicada a diversos tipos de processos que demonstram a sua eficácia e aplicabilidade. Mais ainda, a nova estratégia foi comparada com outros métodos, chegando-se à conclusão que ela produz resultados idênticos ou superiores relativamente a outras técnicas de sintonia existentes, com a vantagem de gerar uma resposta temporal de saída próxima de um modelo de referência desejado. De referir que o estudo realizado analisa sistemas de ordem inteira e, em particular, sistemas compensados que utilizam o controlador PID, adoptando a perspectiva de aplicação da teoria do cálculo fraccionário ao controlo automático de sistemas. Neste caso, é interessante verificar que, embora o sistema em malha fechada, com o controlador PID, seja um sistema de ordem inteira pode, contudo, ser manipulado e, conseqüentemente, pode ser analisado, como sendo de ordem fraccionária (apesar de a dinâmica fraccionária se verificar apenas sobre uma faixa limitada de frequências). Assim, demonstra-se que os conceitos básicos associados à teoria do controlo fraccionário podem (e devem) ser utilizados com vantagens para a análise e controlo de sistemas (inteiros ou fraccionários).

6.2 Contribuições da Tese

As principais contribuições desta tese de dissertação podem ser resumidas aos seguintes pontos:

- Fornecimento de uma análise dinâmica de sistemas com folga dinâmica, através da função descritiva;
- Proposta uma nova forma para o oscilador de Van der Pol, introduzindo uma derivada fraccionária na formulação do espaço de estados das equações dinâmicas. O sistema FrVPO apresenta resultados interessantes (diferentes do clássico VPO) que podem ser usados para a definição de um modelo melhor adaptado a certos fenómenos naturais e, assim, para um melhor entendimento e controlo deste tipo de sistemas;

- Utilização dos métodos de modelação de sinal (Padé, Prony e Shanks) para o projecto de integradores e diferenciadores de ordem fraccionária através de funções racionais discretas (filtros IIR) causais, estáveis e de fase mínima, adequadas para uma análise por transformada dos Z e para uma implementação digital. As técnicas adoptadas revelam um bom desempenho, fornecendo aproximações racionais superiores às geradas por outros métodos usualmente utilizados para o mesmo efeito;
- Desenvolvimento de um novo método, que constitui uma alternativa eficiente às técnicas de modelação de sinais determinísticos, baseado no algoritmo de identificação de sistemas pelos mínimos quadrados. Verifica-se que este algoritmo gera as mesmas aproximações que o método de Prony, com a vantagem de se obter, num só passo, a função racional desejada;
- Realização prática de controladores discretos fraccionários com um melhor desempenho usando as técnicas de modelação de sinal propostas;
- Apresentação de uma nova estratégia para a sintonia de controladores PID robustos. O método proposto baseia-se num sistema de referência com a função de transferência ideal de Bode em malha aberta. Assim, através das especificações $(\alpha; \omega_c)$ de um integrador fraccionário e da utilização de um critério de desempenho, é possível obter sistemas compensados mais robustos a variações do ganho, exibindo respostas ao degrau com uma propriedade de amortecimento constante.
- Estabelecimento de diversas expressões úteis (algumas das quais originais), na forma de funções polinomiais ou de funções racionais, para a caracterização, tanto no domínio dos tempos como no domínio das frequências, do sistema de referência com uma função de transferência fraccionária (designada por *função de relaxação-oscilação*), a qual possui um denominador com uma função do tipo $(s^\alpha + K)$, para $1 < \alpha < 2$.

6.3 Perspectivas de Evolução Futura

Após a realização desta tese de dissertação, podem estabelecer-se várias linhas de investigação futura do trabalho, de entre as quais se enumeram as seguintes:

- No capítulo 3 aplicou-se o método da FD a um sistema de controlo não linear usando um controlador PID. Assim, considera-se que a introdução de um controlador PID fraccionário (ver capítulo 2) que, apresentando uma flexibilidade superior à do PID tradicional, pode levar a um melhor desempenho do sistema. Em particular, pode evitar a intersecção das curvas no plano de Nyquist e, deste modo, eliminar a oscilação de saída que, normalmente, não é desejável.
- Também no capítulo 3 verificou-se que o grau de liberdade adicional introduzido pela ordem α no sistema FrVPO tem uma influência significativa na sua dinâmica, a qual merece uma investigação mais aprofundada para clarificar as suas implicações, nomeadamente:
 - Analisar a influência da ordem α para um intervalo mais alargado do parâmetro de controlo β , tanto para o domínio das frequências como para o domínio dos tempos;
 - Estudo do sistema FrVPO para valores da ordem fraccionária $\alpha > 1$;
 - Estender o estudo apresentado para o caso do oscilador de Van der Pol forçado fraccionário, o qual pode revelar resultados mais interessantes.
- O capítulo 4 mostrou que as técnicas de modelação de sinal podem fornecer aproximações racionais com bom desempenho e mesmo aproximações superiores que as geradas por outros métodos, nomeadamente que a técnica de CFE. Deste modo, o estudo realizado nesse capítulo merece uma investigação mais aprofundada e sistemática que leve ao estabelecimento de algoritmos mais eficientes, ou seja:
 - A utilização de outros métodos de conversão de $s \rightarrow z$, e não somente o uso dos equivalentes discretos de Euler, Tustin e de Al-Alaloui.
 - Efectuar um estudo mais detalhado do erro (quadrático) das aproximações geradas;
 - Desenvolver algoritmos eficientes de implementação das técnicas de modelação de sinal propostas.
- Como foi demonstrado no capítulo 5, o sistema compensado com o controlador PID pode ser levado a apresentar uma dinâmica fraccionária (apesar desta se verificar somente para um intervalo de frequências limitado). Este facto abre um novo ponto de

vista sobre a sintonia de controladores PID que, eventualmente, poderá levar ao desenvolvimento de heurísticas mais robustas, assim como ao estabelecimento de um esquema de sintonia comum para os sistemas de ordem inteira e de ordem fraccionária. Nesta perspectiva, propõem-se os seguintes aspectos para futura investigação:

- A utilização de um controlador PID fraccionário (FrPID). Dado que este tipo de controlador possui mais dois “graus de liberdade” que o PID clássico, pode revelar-se de grande utilidade prática, nomeadamente alargando o conjunto de possibilidades de ajuste da função de transferência em malha aberta do sistema compensado (conhecido da terminologia Inglesa como “loop shaping”);
- Realizar uma análise mais sistemática do estudo apresentado que, por exemplo, leve ao estabelecimento de expressões analíticas para os ganhos (K, T_i, T_d) do controlador PID em função dos parâmetros de sintonia $(\alpha; \omega_c)$, assim como à definição do seu domínio de aplicabilidade;
- Alargar o campo de aplicação da estratégia proposta a outros tipos de processos, incluindo sistemas de fase não mínima.

No decorrer dos trabalhos desta tese de dissertação, surgiram várias outras ideias de desenvolvimentos futuros, de entre as quais se destacam:

- Estabelecimento de métodos adequados para a análise e controlo de sistemas de ordem fraccionária, tanto para o domínio dos tempos como para o domínio das frequências. Possível utilização dos métodos de análise clássicos do lugar geométrico de raízes, do diagrama de Nyquist e do critério de estabilidade de Routh adaptados para o caso dos operadores fraccionários;
- Definição de métodos de sintonia para o controlador PID fraccionário, possivelmente através da generalização das existentes técnicas de sintonia de controladores PID para o caso das derivadas e integrais fraccionários;
- Desenvolvimento de métodos e de estruturas alternativas às actualmente existentes que realizem de uma forma mais eficiente circuitos analógicos e/ou digitais para implementação de integradores e de diferenciadores fraccionários.

Por último, finaliza-se esta tese de dissertação com a seguinte citação, que expressa de forma clara a importância das derivadas fraccionárias:

“... todos os sistemas necessitam de incorporar uma derivada fraccionária nas equações que os descrevem... os sistemas possuem a memória de todos os eventos passados. É necessário incluir o registo destes eventos passados para prever o futuro...

A conclusão é óbvia e inevitável: *A matéria morta possui memória*. Ou de uma outra forma, pode-se dizer que a Natureza trabalha com derivadas fraccionárias.” – (Westerlund, 1991).

Funções Especiais do Cálculo

Fraccionário

A.1 Função Gama

A função Gama de Euler $\Gamma(z)$ desempenha um papel importante no desenvolvimento da teoria do cálculo fraccionário. Esta função generaliza a noção de factorial $n!$ para valores de n não inteiros e mesmo complexos. A função Gama é definida pelo integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (\text{A.1})$$

Uma outra definição de $\Gamma(z)$ é fornecida por intermédio do limite de Euler:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (\text{A.2})$$

A expressão do limite (A.2) revela uma propriedade importante, isto é, que esta é válida para todo o z excepto para os pólos da função nos pontos $z = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Uma das propriedades mais importante da função Gama é dada pela relação:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.3})$$

Dado que $\Gamma(1) = 1$, e usando a fórmula recorrente (A.3) para valores inteiros positivos de $z = 1, 2, 3, \dots$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!\end{aligned}\tag{A.4}$$

A Tabela A.1 lista algumas relações importantes da função Gama e a Tabela A.2 fornece alguns valores particulares desta função. A Figura A.1 ilustra o gráfico da função Gama $\Gamma(x)$, $-4 < x < 4$.

Tabela A.1: Relações da função Gama.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z)$$

Tabela A.2: Alguns valores particulares da função Gama.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-3)(2n-5) \dots 3 \cdot 1}{2^{n-1}} \sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

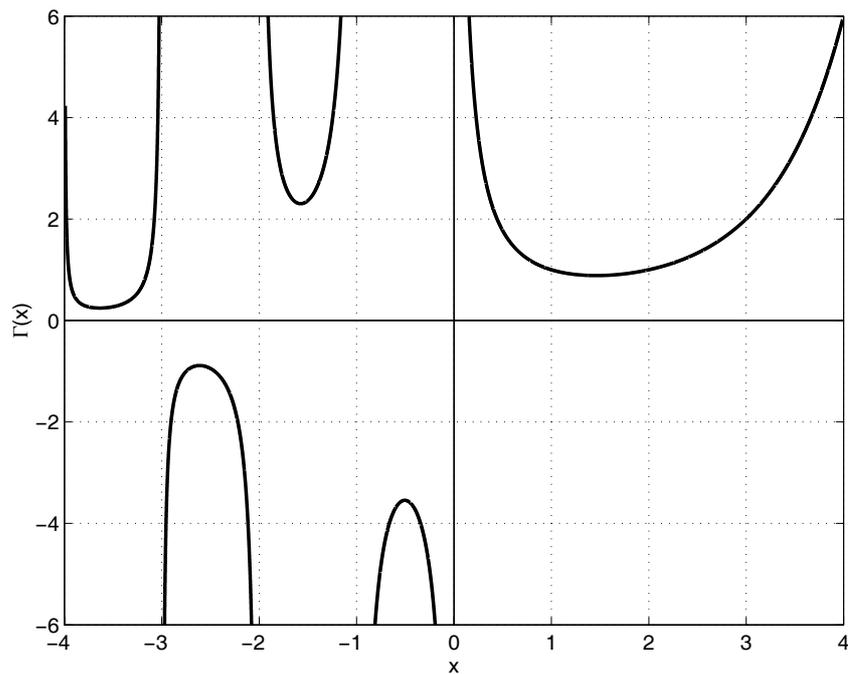


Figura A.1 – Função Gama $\Gamma(x)$, $-4 < x < 4$.

A.2 Função Beta

A função Beta, $B(z, w)$, está intimamente relacionada com a função Gama, sendo definida por:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \operatorname{Re}(w) > 0 \quad (\text{A.5})$$

A função Beta está relacionada com a função Gama da seguinte forma:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\text{A.6})$$

donde se retira as propriedades:

$$B(z, w) = B(w, z) \quad (\text{A.7})$$

$$B(z, w) = B(z+1, w) + B(z, w+1) \quad (\text{A.8})$$

A.3 Função de Mittag-Leffler

As funções de Mittag-Leffler a um e a dois parâmetros, respectivamente $E_\alpha(z)$ e $E_{\alpha,\beta}(z)$, desempenham um papel muito importante na teoria do cálculo fracionário e, em particular, para o desenvolvimento e análise de equações diferenciais fracionárias.

A função de Mittag-Leffler a um parâmetro, $E_\alpha(z)$, é dada pela expansão em série:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (\text{A.9})$$

enquanto que a função de Mittag-Leffler a dois parâmetros, $E_{\alpha,\beta}(z)$, é definida por:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (\text{A.10})$$

Tanto a função (A.9) como a função (A.10) podem ser vistas como uma generalização da função exponencial e^z , pois com $\alpha = \beta = 1$ vem:

$$E_1(z) = E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (\text{A.11})$$

Casos particulares de (A.9) e (A.10) (notar que $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$), que retornam algumas funções elementares conhecidas ($\beta = 1$):

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad E_{2,1}(z^2) = \cosh(z), \quad E_{2,1}(-z^2) = \cos(z) \quad (\text{A.12})$$

e, por exemplo:

$$E_{1/2,1}(\pm z^{1/2}) = e^z \left[1 + \operatorname{erf}(\pm z^{1/2}) \right] = e^z \operatorname{erfc}(\mp z^{1/2}) \quad (\text{A.13})$$

onde erf e erfc representam, respectivamente, as funções erro e erro complementar, definidas como:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du, \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (\text{A.14})$$

Ou, para $\beta \neq 1$:

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad E_{1/2,2}(z) = \frac{\sinh(z^{1/2})}{z}, \quad E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(z^{1/2})}{z^{1/2}} \quad (\text{A.15})$$

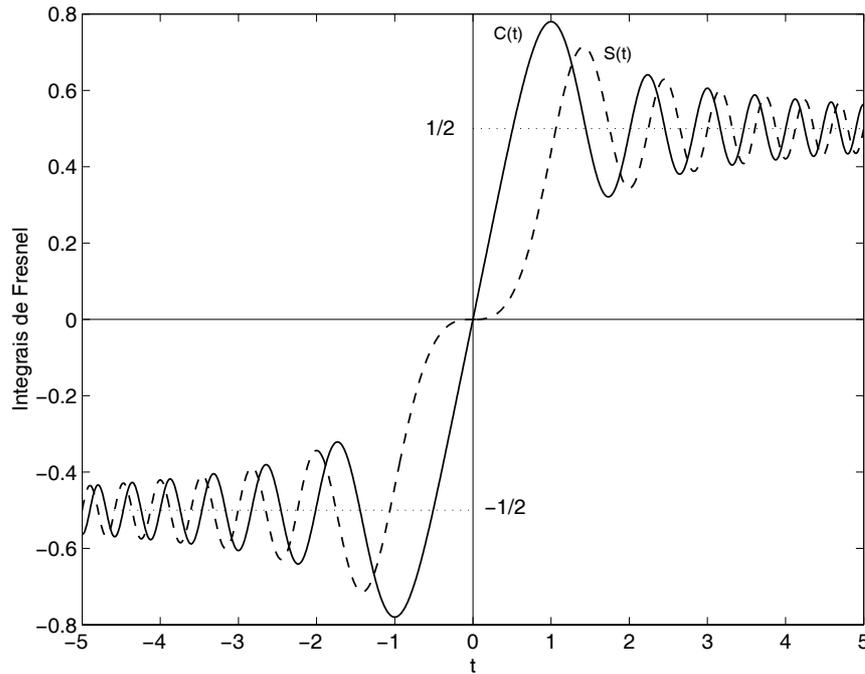


Figura A.2 – Integrais de Fresnel.

A.4 Integrais de Fresnel

O integral coseno de Fresnel $C(z)$ e o integral seno de Fresnel $S(z)$ são definidos respectivamente por:

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad (\text{A.16})$$

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad (\text{A.17})$$

As funções (A.16) e (A.17) possuem os seguintes valores particulares:

$$C(0) = S(0) = 0, \quad C(-\infty) = S(-\infty) = -\frac{1}{2}, \quad C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2} \quad (\text{A.18})$$

Assim, verificam-se as relações de simetria:

$$C(-z) = -C(z), \quad S(-z) = -S(z) \quad (\text{A.19})$$

A Figura A.2 ilustra os integrais coseno e seno de Fresnel, respectivamente $C(t)$ e $S(t)$, para $-5 < t < 5$.

É conveniente definir as chamadas funções auxiliares de Fresnel, $f(z)$ e $g(z)$, as quais são dadas através das expressões:

$$f(z) = \left[\frac{1}{2} - S(z) \right] \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) - \left[\frac{1}{2} - C(z) \right] \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) \quad (\text{A.20})$$

$$g(z) = \left[\frac{1}{2} - C(z) \right] \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) + \left[\frac{1}{2} - S(z) \right] \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) \quad (\text{A.21})$$



Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M., I. A. Stegun (1974). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications. New York.
- Adda, F. B. (1997), Geometric interpretation of the fractional derivative. *Journal of Fractional Calculus* **11**, 21–52.
- Adda, F. B. (1998), Interprétation géométrique de la différentiabilité et du gradient d'ordre réel, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I*, 931–934.
- Al-Alaoui, M. A. (1992). Novel approach to designing digital differentiators. *Electronics Letters* **28**(15), 1376–1378.
- Al-Alaoui, M. A. (1993). Novel digital integrator and differentiator. *Electronics Letters* **29**(4), 376–378.
- Al-Alaoui, M. A. (1995). A class of second-order integrators and low-pass differentiators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* **42**(4), 220–223.
- Al-Alaoui, M. A. (1997). Filling the gap between the bilinear and the backward-difference transforms: An interactive design approach. *Int. J. Elect. Enging. Educ.* **34**, 331–337.
- Al-Alaoui, M. A. (2001). Novel stable higher order s-to-z transforms. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* **48**(11), 1326–1329.

- Anastasio, T. J. (1994). The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons. *Biological Cybernetics* **72**, 69–79.
- Arena, P., R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto (1997). Chaos in a fractional order duffing system. In: *Proceedings of the 1997 European Conference on Circuit Theory and Design*. Budapest, pp. 1259–1262.
- Arena, P., R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto (2000). *Nonlinear Noninteger Order Circuits and Systems-An Introduction*. World Scientific, Singapore.
- Åström, K., T. Hägglund (1995). *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, North Carolina.
- Åström, K. J. (2000). Limitations on control system performance. *European Journal of Control* **6**, 2–20.
- Axtell, M., M. E. Bise (1990). Fractional calculus applications in control systems. In: *Proceedings of the IEEE 1990 National Aerospace and Electronics Conference*. New York, pp. 563–566.
- Azenha, A., J. A. Tenreiro Machado (1998). On the describing function method and the prediction of limit cycles in nonlinear dynamical systems. *SAMS Journal of Systems Analysis, Modelling and Simulation* **33**, 307–320.
- Bagley, R. L., P. J. Torvik (1983). Fractional calculus-A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal* **21**(5), 741–748.
- Barbosa, Ramiro S., J. A. Tenreiro Machado (2002a). Fractional describing function analysis of systems with backlash and impact phenomena. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES 2002)*. Opatija, pp. 521–526.
- Barbosa, R. S., J. A. Tenreiro Machado (2002b). Describing function analysis of systems with impacts and backlash. *Nonlinear Dynamics* **29**(1-4), 235–250.
- Barbosa, Ramiro S., J. A. Tenreiro Machado, Isabel M. Ferreira (2003a). Describing function analysis of mechanical systems with nonlinear friction and backlash phenomena. In:

Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control. Seville, pp. 299–304.

Barbosa, R. S., J. A. T. Machado, I. M. Ferreira (2003b). A Fractional calculus perspective of PID tuning. In: *Proceedings of the ASME International 19th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise (VIB'03)*. Chicago, CD-ROM.

Barbosa, R. S., J. A. Tenreiro Machado, I. M. Ferreira (2004a). Least-squares design of digital fractional-order operators. In: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA'04)*. Bordeaux, pp. 434–439.

Barbosa, R. S., J. A. Tenreiro Machado, I. M. Ferreira, J. K. Tar (2004b). Dynamics of the fractional-order Van der Pol oscillator. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Cybernetics (ICCC 2004)*. Vienna, pp. 373–378.

Barbosa, R. S., J. A. Tenreiro Machado, I. M. Ferreira (2004c). PID controller tuning using fractional calculus concepts. *FCAA Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis* 7(2), 119–134.

Barbosa, R. S., J. A. Tenreiro Machado, I. M. Ferreira (2004d). Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function. *Nonlinear Dynamics* 38, 305–321.

Barbosa, R. S., J. A. Tenreiro Machado, I. M. Ferreira (2005). Pole-zero approximations of digital fractional-order integrators and differentiators using signal modeling techniques. *Aceite para o 16th IFAC World Congress*. Praga, República Checa.

Basilio, J. C., S. R. Matos (2002). Design of PI and PID controllers with transient performance specification. *IEEE Transactions on Education* 45(4), 364–370.

Blank, L. (1996). Numerical treatment of differential equations of fractional order. *MCCM Numerical Analysis Report No. 287*. The University of Manchester, Manchester.

Bode, H. W. (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York.

Burden, R. L., J. D. Faires (2001). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 7th ed., Pacific Grove, CA.

- Caponetto, R., L. Fortuna, D. Porto (2004). A new tuning strategy for a non integer order PID controller. In: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA '04)*. Bordeaux, pp. 168–173.
- Carlson, G. E., C. A. Halijak (1961). Simulation of the fractional derivative operator \sqrt{s} and the fractional integral operator $\sqrt{1/s}$. *Proceedings of the Central States Simulation Council Meeting, Kansas State University Bulletin* **45**(7), 1–22.
- Carlson, G. E., C. A. Halijak (1963). Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular newton process. In: *Proceedings of the Sixth Midwest Symposium on Circuit Theory*. Madison, Wisconsin: The University of Wisconsin, pp. L1–L16.
- Carpinteri, A., F. Mainardi (1997). *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. CISM Courses and Lectures No. 378, International Centre for Mechanical Sciences. Springer Verlag, Wien-New York.
- Charef, A., H. H. Sun, Y. Y. Tsao, B. Onaral (1992). Fractal system represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(9), 1465–1470.
- Chen, Y. Q., K. L. Moore (2002). Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications* **49**(3), 363–367.
- Chen Y. Q., B. M. Vinagre (2003). A new IIR-type digital fractional order differentiator. *Signal Processing* **83**(11), 2359–2365.
- Chen Y. Q., B. M. Vinagre, I. Podlubny (2003a). A new discretization method for fractional order differentiators via continued fraction expansion. In: *Proceedings of the ASME International 19th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise (VIB'03)*. Chicago, CD-ROM.
- Chen Y. Q., C. H. Hu, K. L. Moore (2003c). Relay feedback tuning of robust PID controllers with iso-damping property. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Hawaii, pp. 2180–2185.

- Chen Y. Q., K. L. Moore, B. M. Vinagre, I. Podlubny (2004). Robust PID controller autotuning with a phase shaper. In: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA '04)*. Bordeaux, pp. 162–167.
- Choi, Y. S., S. T. Noah (1989). Periodic response of a link coupling with clearance. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* **111**(2), 253–259.
- Clerc, J. P., A. M. S. Tremblay, G. Albinet, C. D. Mitescu (1984). A. C. response of fractal networks. *Le Journal de Physique-Lettres* **45**(19), L.913–L.924.
- Constantinou, M. C., M. D. Symans (1993). Experimental study of seismic response of buildings with supplemental fluid dampers. *The Structural Design of Tall Buildings* **2**, 93–132.
- Cox, C. S. (1987). Algorithms for limit cycle prediction: A tutorial paper (for undergraduates). *International Journal of Electrical Engineering Education* **24**(2), 165–182.
- Davis, H. D. (1936). *The Theory of Linear Operators*. Principia Press, Bloomington.
- Diethelm, K. (1997). An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electronic Transactions on Numerical Analysis* **5**, 1–6.
- Diethelm, K., M. Weilbeer (2004). A numerical approach for joulin's model of a point source initiated flame. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **7**(2), 191–212.
- Dubois, D., J.-P. Brienne, L. Pony, H. Baussart (1996). Study of a System Described by An Implicit Derivative Transmittance of Non Integer Order With or Without Delay Time. In: *IEEE-SMC/IMACS Symposium on Control, Optimization and Supervision*. Lille, pp. 826–830.
- Dubowsky, S., J. F. Deck, H. Costello (1987). The dynamic modelling of flexible spatial machine systems with clearance connections. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design* **109**(1), 87–94.
- Engheta, N. (1996). On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **44**(4), 554–566.

- Engheta, N. (1997). On the role of fractional calculus in electromagnetic theory. *IEEE Antennas and Propagation Magazine* **39**(4), 35–46.
- Engheta, N. (2000). Fractional paradigm in electromagnetic theory. In: *Frontiers in Electromagnetics* (D. H. Werner, R. Mittra, eds.), pp. 523–552. IEEE Press, chapter 12.
- Fenander, Åsa (1996). Modal synthesis when modeling damping by use of fractional derivatives. *AIAA Journal* **34**(5), 1051–1058.
- Franklin, G. F., J. D. Powell, M. L. Workman (1990). *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 2nd ed. Reading, MA.
- Gaul, L., C. M. Chen (1993). Modeling of viscoelastic elastomer mounts in multibody systems. *Advanced Multibody System Dynamics* (W. Schiehlen, ed.), pp. 257–276. Kluwer Academic Publishers.
- Gaul, L., M. Schanz (1994). Dynamics of viscoelastic solids treated by boundary element approaches in time domain. *European Journal of Mechanics, A/Solids* **13**(4)–suppl., 43–59.
- Gemant, A. (1936). A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics* **7**, 311–317.
- Golub, G. H., C. F. Van Loan (1996). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3rd ed., Baltimore and London.
- Gorenflo, R., F. Mainardi (1996). Fractional oscillations and Mittag-Leffler functions. *Serie A Mathematik, Preprint No. A-14/96*. Free University of Berlin, Berlin, pp.1–22.
- Gorenflo, R., F. Mainardi (1997). Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (A. Carpinteri, F. Mainardi, eds.), pp. 223–276. Springer Verlag, Wien e New York.
- Gorenflo, R. (1998). Afterthoughts on interpretation of fractional derivatives and integrals. In: *Transform Methods and Special Functions Varna'96* (P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova, eds.), pp. 589–591. Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia.

- Gorenflo, R., F. Mainardi (1998). Random walks models for space-fractional diffusion processes. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **1**(2), 167–191.
- Hayes, Monson H. (1996). *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley & Sons, New York.
- Hartley, T. T., C. F. Lorenzo, H. K. Qammer (1995). Chaos in a fractional order chua's system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* **42**(8), 485–490.
- Hartley, T. T., C. F. Lorenzo (1998). A Solution to the fundamental linear fractional order differential equation. *NASA/TP-1998-208693*.
- Hilfer, R. (2000). *Application of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore.
- Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika* **68**(1), 165–176.
- Hwang, C., J. F. Leu, S. Y. Tsay (2002). A note on time-domain simulation of feedback fractional-order systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(4), 625–631.
- Kaplan T., L. J. Gray, S. H. Liu (1987). Self-Affine fractal model for a metal-electrolyte interface. *Physical Review B* **35**(10), 5379–5381.
- Kiryakova, V. (1994). *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics # 301, Longman, Harlow.
- Kiryakova V. (1998). A long standing conjecture failes?. In: *Transform Methods and Special Functions, Varna'96* (P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova, eds.), pp. 579–588. Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia.
- Koeller, R. C. (1984). Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *ASME Journal of Applied Mechanics* **51**, 299–307.
- Koeller, R. C. (1986). Polynomial operators, stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics. *Acta Mechanica* **58**, 251–264.
- Koh, C. G., J. M. Kelly (1990). Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **19**, 229–241.

- Lanusse, P., V. Pommier, A. Oustaloup (2000). Fractional control system design for a hydraulic actuator. In: *Proceedings of the 1st IFAC Conference on Mechatronics Systems, Mechatronic 2000*. Darmstadt.
- Liebst, B. S., P. J. Torvik (1996). Asymptotic approximations for systems incorporating fractional derivative damping. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **18**, 572–579.
- Liu, S. H. (1985). Fractal model for the ac response of a rough interface. *Physical Review Letters* **55**(5), 529–532.
- Lorenzo, C. F., T. T. Hartley (1998). Initialization, conceptualization, and application in the generalized fractional calculus. *NASA/TP-1998-208415*.
- Lorentzen, L., H. Waadeland (1992). *Continued Fractions with Applications*. North-Holland, Amsterdam.
- Lubich, Ch. (1986). Discretized Fractional Calculus. *SIAM J. Math. Anal.* **17**(3), 704–719.
- Luh, J. Y. S., W. D. Fisher, R. P. C. Paul (1983). Joint torque control by a direct feedback for industrial robots. *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**(2), 153–161.
- Machado, J. A. Tenreiro (1996). Variable structure control of manipulators with joints having flexibility and backlash. *SAMS Journal of Systems Analysis, Modelling and Simulation* **23**, 93–101.
- Machado, J. A. Tenreiro (1997). Analysis and design of fractional-order digital control systems. *SAMS Journal of Systems Analysis, Modelling and Simulation* **27**, 107–122.
- Machado, J. A. Tenreiro (2001). Discrete-time fractional-order controllers. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **4**(1), 47–66.
- Machado, J. A. Tenreiro, R. S. Barbosa, N. M. Ferreira (2002). Commande d'Ordre Fractionnaire Position/Force d'un Manipulateur Mécanique. In: *Proceedings of the Deuxième Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2002)*. Nantes, pp. 641–646.

- Machado, J. A. Tenreiro (2003). A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **6**(1), 73–80.
- Mahmoud, G. M., A. M. Farghaly (2004). Chaos control of chaotic limit cycles of real and complex Van der Pol oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals* **21**, 915–924.
- Mainardi, F. (1994). Fractional relaxation in anelastic solids. *Journal of Alloys and Compounds* **211/212**, 534–538.
- Mainardi, F. (1996). Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Chaos, Solitons & Fractals* **7**(9), 1461–1477.
- Mainardi, F. (1998). Considerations on fractional calculus: interpretations and applications. In: *Transform Methods and Special Functions, Varna'96* (P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova, eds.), pp. 594–597. Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia.
- Makris N., M. C. Constantinou (1991). Fractional-derivative maxwell model for viscous dampers. *Journal of Structural Engineering* **117**(9), 2708–2724.
- Makris N., M. C. Constantinou, G. F. Dargush (1993). Analytical model of viscoelastic fluid dampers. *Journal of Structural Engineering* **119**(11), 3310–3325.
- Makris, Nicos, G. F. Dargush, M. C. Constantinou (1995). Dynamic analysis of viscoelastic-fluid dampers. *Journal of Engineering Mechanics* **121**(10), 1114–1121.
- Manabe, S. (1961). The non-integer integral and its application to control systems. *ETJ of Japan* **6**(3/4), 83–87.
- Manabe, S. (1963). The system design by the use of a model consisting of a saturation and non-integer integrals. *ETJ of Japan* **8**(3/4), 147–150.
- Martins de Carvalho, J. L. (2000). *Sistemas de Controle Automático*. LTC-Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.
- Mathieu, B., L. Le Lay, A. Oustaloup (1996). Identification of Non Integer Order Systems in the Time Domain. In: *IEEE-SMC/IMACS Symposium on Control, Optimization and Supervision*. Lille, pp. 952-956.

- Matignon, D., B. d'Anréa-Novel (1996). Some Results on Controllability and Observability of Finite-Dimensional Fractional Differential Systems. In: *IEEE-SMC/IMACS Symposium on Control, Optimization and Supervision*. Lille, pp. 952–956.
- Méhauté, A. (1984). Transfer processes in fractal media. *Journal of Statistical Physics* **36**(5/6), 665–676.
- Méhauté, A. (1990). From dissipative and to non-dissipative processes in fractal geometry: The janals. *New Journal of Chemistry* **14**(3), 207–215.
- Méhauté, A. (1991). *Fractal Geometries: Theory and Applications*. Penton Press.
- Méhauté, A., F. Héliodore, D. Cottevieille, F. Latreille (1993). Introduction to wave phenomena and uncertainty in a fractal space. *Chaos, Solitons & Fractals* **3**(5).
- Miller, K. S., B. Ross (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley & Sons, New York.
- Moltz, F. J., G. J. Fix, S. Lu (2002). A physical interpretation for the fractional derivative in Levy diffusion. *Applied Mathematics Letters* **15**, 907–911.
- Nigmatullin, R. R. (1986). The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. *Phys. stat. sol. (b)* **133**, 425–430.
- Nigmatullin, R. R. (1992). A fractional integral and its physical interpretation. *Theoret. and Math. Phys.* **90**(3), 242–251.
- Nordin, M., P. Gutman (2002). Controlling mechanical systems with backlash – A survey. *Automatica* **38**, 1633–1639.
- Ogata, K. (1982). *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ.
- Ogata, K. (1987). *Discrete-Time Control Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Oldham, K. B., J. Spanier (1974). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New York e London.

- Ortigueira, M. D. (2000a). Introduction to fractional linear systems. Part 1: Continuous-time case. *IEE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing* **147**(1), 62–70.
- Ortigueira, M. D. (2000b). Introduction to fractional linear systems. Part 2: Discrete-time case”, *IEE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing* **147**(1), 71–78.
- Oustaloup, A. (1981). Fractional Order Sinusoidal Oscillators: Optimization and Their Use in Highly Linear FM Modulation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-28**(10), 1007–1009.
- Oustaloup, A. (1991). *La Commande CRONE: Commande Robuste d’Ordre Non Entier*. Éditions Hermès. Paris.
- Oustaloup, A., B. Mathieu, P. Lanusse (1995a). The CRONE control of resonant plants: Application to a flexible transmission. *European Journal of Control* **1**(2), 113–121.
- Oustaloup, A. (1995b). *La Dérivation Non Entière: Théorie, Synthèse et Applications*. Éditions Hermès, Paris.
- Oustaloup, A., X. Moreau and M. Nouillant (1996). The crone suspension. *Control Engineering Practice* **4**(8), 1101–1108.
- Oustaloup, A., J. Sabatier, P. Lanusse (1999). From fractal robustness to the crone control. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **2**(1), 1–30.
- Oustaloup, A., F. Levron, B. Mathieu and F. M. Nanot (2000). Frequency-band complexnoninteger di_erentiator: Characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* **47**(1), 25–39.
- Ozaktas, H. M., O. Arikan, M. A. Kutay, G. Bozdagi (1996). Digital computation of the fractional fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing* **44**(9), 2141–2150.
- Padovan, J. (1987). Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. *Computational Mechanics* **2**(4), 271–287.
- Patra, K. C., Y. P. Singh (1996). Graphical method of prediction of limit cycle for multivariable nonlinear systems. *IEE Proceedings of Control Theory and Applications* **143**(5), 423–428.

- Phillips, C. L., R. D. Harbor (1991). *Feedback Control Systems*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Podlubny, I. (1997). Numerical solutions of ordinary fractional differential equations by the fractional difference method. In: S. Elaydi, I. Györi, G. Ladas (eds.), *Advances in Difference Equations*. Gordon and Breach Science, Amsterdam, pp. 507–515.
- Podlubny, I. (1999a). Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ -controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(1), 208–214.
- Podlubny, I. (1999b). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego.
- Podlubny, I. (2000). Matrix approach to discrete fractional calculus. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **3**(4), 359–386.
- Podlubny, I. (2002). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **5**(4), 367–386.
- Poularikas, A. D. (1999). *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*. CRC Press.
- Rogers, L. (1983). Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations. *Journal of Rheology* **27**(4), 351–372.
- Rutman, R. S. (1994). On the paper by R. R. Nigmatullin “Fractional integral and its physical interpretation”. *Theoret. and Math. Phys.* **100**(3), 1154–1156.
- Rutman, R. S. (1995). On physical interpretations of fractional integration and differentiation. *Theoret. and Math. Phys.* **105**(3), 393–404.
- Samko, S. G., A. A. Kilbas, O. I. Marichev (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science, Amsterdam.
- Schilling, R. J., S. L. Harris (2000). *Applied Numerical Methods for Engineers Using Matlab and C*. Brooks/Cole, Pacific Grove, CA.
- Silva M. F., J. A. Tenreiro Machado, A. M. Lopes (2003). Comparison of fractional and integer order control of an hexapod robot. In: *Proceedings of the ASME International*

19th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise (VIB'03). Chicago, CD-ROM.

Silva, M. F., J. A. Tenreiro Machado, A. M. Lopes (2004). Fractional order control of a hexapod robot. *Nonlinear Dynamics* **38**, 417–433.

Slotine, J. J. E. and W. Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey.

Smith, J. M. (1987). *Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists*. Wiley & Sons, 2nd ed., New York.

Stepanenko, Y., T. S. Sankar (1986). Vibro-impact analysis of control systems with mechanical clearance and its application to robotic actuators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* **108**(1), 9–16.

Stiassnie, M. (1979). On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models. *Applied Math. Modelling* **3**, 300–302.

Tao, G., P. V. Kokotovic (1993). Adaptive control of systems with backlash. *Automatica* **29**(2), 323–335.

Tao, G., P. V. Kokotovic (1995). Adaptive control of systems with unknown output backlash. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(2), 326–330.

Tatom, F. B. (1995). The relationship between fractional calculus and fractals. *Fractals* **3**(1), 217–229.

Torbati, M. M., J. K. Hammond (1998). Physical and geometrical interpretation of fractional operators. *J. Franklin Inst.* **335B**(6), 1077–1086.

Torvik, P. J., R. L. Bagley (1984). On the appearance of the fractional derivative in the behaviour of real materials. *ASME Journal of Applied Mechanics* **51**, 294–298.

Torvik, P. J., R. L. Bagley (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic behaviour. *Journal of Rheology* **30**(1), 133–155.

Torvik, P. J., R. L. Bagley (1991). Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *ASME Journal of Guidance* **14**(2), 304–311.

- Tustin, A., J. T. Allanson, J. M. Layton, R. J. Jakeways (1958). Position Control of Massive Objects. *The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers* **105**(1)–suppl., part C, 1–57.
- Tseng, C. C. (2001). Design of Fractional Order Digital FIR Differentiators. *IEEE Signal Processing Letters* **8**(3), 77–79.
- Valério, D., J. Sá da Costa (2002). Time-domain implementations of non-integer order controllers. In: *Proceedings of the 5th Portuguese Conference on Automatic Control (CONTROLO 2002)*. Aveiro, pp. 353–358.
- Valério, D., J. Sá da Costa (2003). Digital implementation of non-integer control and its application to a two-link robotic arm. In: *European Control Conference (ECC'03)*. Cambridge, CD-ROM.
- Vinagre, B. M., I. Podlubny, A. Hernández, V. Feliu (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *FCAA Fractional Calculus & Applied Analysis* **3**(3), 231–248.
- Vinagre, B. M. (2001). Modelado y control de sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones íntegro-diferenciales de orden fraccional. Tese de doutoramento. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, UNED.
- Vinagre, B. M., Y. Q. Chen, I. Petráš (2003). Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator. *Journal of the Franklin Institute* **340**, 349–362.
- Vinagre, B. M., C. A. Monje, A. J. Calderón, Y. Q. Chen, V. Feliu (2004). The fractional integrator as a reference function. In: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA'04)*. Bordeaux, pp. 150–155.
- Webman, I. (1984). Propagation and trapping of excitations on percolation clusters. *Journal of Statistical Physics* **6**(5/6), 603–614.
- Westerlund, S. (1991). Dead matter has memory!. *Physica Scripta* **43**, 174–179.
- Westerlund, S. (2002). *Dead Matter Has Memory!*. Causal Consulting, Kalmar, Sweden.

- Yu, Z. G., F. Y. Ren, J. Zhou (1997). Fractional integral to generalized cookie-cutter set and its physical interpretation. *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 5569–5577.
- Zhuang, M. and D. P. Atherton (1993). Automatic tuning of optimum PID controllers. *IEE Proceedings-D: Control Theory and Applications* **140**(3), 216–224.

