

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



Análise de Robots Redundantes

Fernando Baltazar Moreira Duarte

Dissertação submetida à Universidade do Porto com vista à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica e de Computadores. Este trabalho foi realizado sob a orientação do Professor Doutor J. A. Tenreiro Machado.

Setembro de 2002

Resumo

No presente trabalho é feita uma análise do planeamento de trajectórias de robots redundantes.

Os manipuladores robóticos são sistemas mecânicos passíveis de uma modelização matemática, contudo, ocorrem sérias dificuldades no processo de obtenção e cálculo do respectivo modelo, devido não apenas à sua extensão mas também à complexidade dos fenómenos envolvidos.

Nesta ordem de ideias este trabalho estuda a cinemática e a dinâmica dos manipuladores redundantes. Assim, analisam-se aspectos relacionados com a manipulabilidade e com as singularidades do sistema. Por outro lado, desenvolve-se o Método em Malha Aberta (*MMA*) e compara-se com o algoritmo clássico que recorre à matriz jacobiana. Verifica-se que o método *MMA* evita o comportamento caótico que ocorre com o algoritmo clássico da Pseudoinversa em Malha Fechada (*PMF*).

São realizadas simulações e comparam-se os resultados dos dois algoritmos, *MMA* e *PMF*, adoptando a perspectiva do cálculo diferencial fraccionário e tendo especial atenção aos aspectos caóticos das trajectórias obtidas com o método *PMF*.

Por outro lado, são estudadas as respostas temporal e em frequência do sistema, para os dois métodos, quando o sistema é perturbado por vários tipos de sinais (*doblete*, *ruído branco* e *ruído rosa*). Os resultados obtidos demonstram as vantagens do uso das ferramentas matemáticas providenciadas pelo cálculo integral de ordem fraccionária.

Por último o método *MMA* é generalizado de forma a permitir o planeamento de trajectórias em ambientes com obstáculos.

Palavras Chave: Manipuladores Robóticos, Redundante, Redundância, Modelização Cinemática e Dinâmica, Caos, Cálculo Fraccionário.

Abstract

This work presents the analysis of the trajectory planning for redundant robots.

Robotic manipulators are mechanical systems that can be modelled mathematically. Nevertheless, there are difficulties in the derivation and calculation of the corresponding model. These problems are not only due to model's extension but also to the complexity of the phenomena involved.

In this context, the present work studies the redundant manipulator's kinematics and dynamics. Moreover, aspects related to the system's manipulability and singularities are analyzed. A new method called "Open-Loop Manipulability Optimization" (*OLM*) was also developed. This method is compared with the classical algorithm that uses the Jacobian matrix. It is shown that the *OLM* prevents the chaotic behaviour that occurs with the classic algorithm of "Closed-Loop Pseudoinverse". (*CLP*)

Several simulations compare the results of both algorithms, while adopting the perspective of the fractional calculus. In this line of thought the trajectories' chaotic aspects obtained by the *CLP* method received special attention in the study.

The system temporal and frequency responses are also studied for two types of algorithms for a situation in which the system is perturbed by several kinds of signals (doublet, white noise and pink noise). This analysis reveals the advantages in the adoption of the fractional calculus as a mathematical tool.

Finally, the *OLM* method is generalized in a manner that allows trajectories planning in the presence of obstacles in the environments.

Keywords: Robotic Manipulators, Redundant, Redundancy, Kinematic and Dynamic Modelling, Chaos, Fractional Calculus.

Résumé

Ce travail présente l'analyse de la planification de trajectoires pour robots redondants.

Les manipulateurs robotiques sont des systèmes mécaniques passibles de modélisation mathématique. Cependant, une série de difficultés apparaissent dans le processus d'obtention et de calcul de ce modèle, à cause non seulement de son extension mais aussi de la complexité des phénomènes impliqués.

La cinématique et la dynamique des manipulateurs redondants sont étudiés. Ainsi, les aspects en rapport avec le manipulabilité et les singularités du système sont analysés. D'un autre côté, la Méthode en Maille Ouverte (*MMO*) a été développée et comparée avec l'algorithme classique qui utilise la matrice jacobienne. On vérifie que la méthode *MMO* prévient le comportement chaotique qui apparaît avec l'algorithme classique de Pseudoinverse en Maille Fermée (*PMF*).

Des simulations ont été faites pour comparer les résultats des deux algorithmes (*MMO* et *PMF*) en adoptant le calcul différentiel fractionnaire et en ayant une attention spéciale aux aspects chaotiques des trajectoires obtenues avec la méthode *PMF*.

En outre, les réponses temporelle et en fréquence ont été étudiées pour deux méthodes de contrôle alors que le système est perturbé par plusieurs signaux (*doublet*, *bruit blanc*, *bruit rose*) pour vérifier les avantages de l'utilisation d'outils mathématiques performants dans le calcul intégral d'ordre fractionnaire.

Finalement, la méthode *MMO* a été généralisée avec planification de trajectoires en environnement avec obstacles.

Mots-Clés : Manipulateurs Robotiques, Redondant, Redondance, Modelisation Cinématique et Dynamique, Chaos, Calcul Fractionnaire.

Agradecimentos

A realização de um trabalho desta natureza apenas é possível devido ao empenhamento, dedicação e apoio de muitas pessoas e o apoio material de instituições. Algumas delas merecem uma menção especial.

O meu orientador científico Prof. J. A. Tenreiro Machado, não só pelo seu apoio, incentivo, entusiasmo e disponibilidade constantemente manifestados, mas também pela confiança em mim depositada guiando-me com o seu saber, experiência e competência profissional, ao longo da realização dos trabalhos de investigação, sempre na direcção correcta. Sem ele, a realização deste trabalho não teria sido possível.

Os colegas do GRIS (*Grupo de Robótica e Sistemas Inteligentes do ISEP*) pelo espírito de colaboração e disponibilidade sempre demonstrada.

Alguns colegas da Escola Superior de Tecnologia de Viseu, em especial alguns do Departamento de Matemática pela compreensão, ajuda, apoio e motivação. Obviamente que a intensidade do envolvimento de cada um foi diferente.

A Escola Superior de Tecnologia de Viseu por todas as facilidades concedidas para a realização deste trabalho, nas pessoas dos elementos da direcção da escola e do conselho científico.

O Instituto Politécnico de Viseu, a Fundação Gulbenkian e a Fundação Luso-Americana pelos apoios financeiros para participação em algumas conferências. O programa PRODEP pela obtenção de uma bolsa que permitiu a dispensa de serviço lectivo durante uma parte do período de realização deste trabalho.

A minha família, o Gonçalo que durante muito tempo soube que havia prioridades e que na parte final foi um companheiro com espírito crítico, e a Rosalina pela compreensão, estímulo e apoio prestado durante as várias fases da realização deste trabalho.

A todos, incluindo os não mencionados e em especial os meus amigos, agradeço a paciência e compreensão pelas muitas ausências.

Índice

Resumo	i
Abstract	iii
Résumé	v
Agradecimentos	vii
Índice	ix
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xxi
1. Introdução	1
1.1. Robótica de Manipulação	1
1.2. Motivação, Objectivos e Contribuições da Tese	3
1.3. Estrutura da Tese	5
2. Matrizes Pseudoinversas e Cálculo Integral Fraccionário	7
2.1. Introdução	7
2.2. Matrizes Pseudoinversas	7
2.2.1. Introdução	7
2.2.2. A inversa de uma matriz não singular	8
2.2.3. A inversa de uma matriz singular ou de uma matriz rectangular	8
2.2.4. Matrizes Inversas Generalizadas	9
2.2.4.1. Definição de inversa de Moore-Penrose	12
2.2.4.2. Provas	14
2.2.4.2.1. Prova da existência de \mathbf{A}^+	14
2.2.4.2.2. Prova de que \mathbf{A}^+ é única	15
2.2.4.3. Algumas propriedades das inversas generalizadas	15

2.2.4.4.	Cálculo das matrizes inversas generalizadas	15
2.2.4.4.1.	A inversa generalizada de Moore-Penrose	15
2.2.4.4.2.	{1, 2, 3}inversas	17
2.2.4.4.3.	Matrizes pseudoinversas	18
2.3.	Aspectos Fundamentais do Cálculo Integral Fraccionário	22
2.3.1.	Introdução	22
2.3.2.	Derivadas e Integrais Fraccionários	23
2.3.3.	Interpretação geométrica e física dos integrais e derivadas fraccionárias	25
2.3.4.	Tabela de Derivadas e Integrais Fraccionários	27
2.3.5.	Propriedades das Derivadas e Integrais Fraccionários	28
2.3.6.	Diferenças de Ordem Fraccionária	29
2.3.7.	Transformada de Laplace de Derivadas Fraccionárias	30
2.3.8.	Transformada de Fourier de Derivadas Fraccionárias	32
2.3.9.	Fractais e Derivadas Fraccionárias	34
2.3.9.1.	Conjunto de Cantor Ternário	35
2.3.9.2.	Curva de Von Koch	36
2.3.9.3.	Modelo Fractal de uma "Interface" Irregular	39
2.3.10.	Computação Numérica de Derivadas Fraccionárias	42
2.3.10.1.	Cálculo Numérico das Derivadas Fraccionárias	42
2.3.10.1.1.	Princípio da Memória Curta	43
2.3.10.1.2.	Ordem de Aproximação	44
2.3.10.1.3.	Cálculo dos Coeficientes	45
2.3.10.2.	Solução Numérica de Equações Diferenciais Fraccionárias	45
2.3.11.	Aplicação ao sistema de controlo	46
2.3.11.1.	Domínio das Frequências	47
2.3.11.2.	Domínio dos Tempos	53
2.3.11.2.1.	Método Analítico	53
2.3.11.2.2.	Método Numérico	54
2.4.	Resumo do capítulo	55
3.	Cinemática e Dinâmica de Robots	57
3.1.	Introdução	57

3.2. Aspectos Fundamentais da Cinemática de Manipuladores	58
3.2.1. Variáveis das juntas e posição do órgão terminal	58
3.2.2. Cinemática Inversa e Jacobiano	63
3.3. Singularidades Cinemáticas	64
3.4. Manipulabilidade de Sistemas Robóticos	79
3.4.1. Elipsóide de Manipulabilidade	79
3.4.2. Manipulabilidade Cinemática	82
3.4.3. Variação do Índice de Manipulabilidade	86
3.5. Dinâmica	86
3.6. Resumo do capítulo	91
4. Planeamento de Trajectórias	93
4.1. Modelização Manipuladores Redundantes	94
4.2. O Método <i>PMF</i>	96
4.2.1. Respostas caóticas do método <i>PMF</i> para o robot $3R$	99
4.2.1.1. Distribuição estatística dos valores obtidos para as juntas do robot $3R$	106
4.2.1.2. Resposta a perturbação com um sinal tipo <i>doblete</i> , para o robot $3R$	108
4.2.1.3. Resposta a perturbação com um sinal tipo <i>ruído branco</i> para o robot $3R$	110
4.2.1.4. Transformada de Fourier para a velocidade das juntas do robot $3R$	110
4.2.1.5. Análise da influência da excitação sobre a função de trans- ferência de ordem fraccionária, para o robot $3R$	112
4.2.2. Respostas caóticas no uso de <i>PMF</i> para o robot $4R$	113
4.2.2.1. Distribuição estatística das juntas para o robot $4R$	120
4.2.2.2. Resposta a perturbação com um sinal tipo <i>doblete</i> para robot o $4R$	123
4.2.2.3. Resposta a perturbação com um sinal tipo <i>ruído branco</i> para o robot $4R$	125

4.2.2.4.	Análise da influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária, para o robot $4R$	125
4.2.3.	Respostas caóticas no uso de PMF para o robot $5R$	128
4.2.3.1.	Distribuição estatística das juntas para o robot $5R$	136
4.2.3.2.	Resposta a perturbação com um sinal tipo <i>doblete</i> para o robot $5R$	136
4.2.3.3.	Resposta a perturbação com um sinal tipo <i>ruído branco</i> para o robot $5R$	139
4.2.3.4.	Análise da influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária, para o robot $5R$	140
4.3.	Métodos de Controlo com Optimização de Índices	144
4.3.1.	Trajectória circular num espaço sem obstáculos	144
4.3.1.1.	O Método de Optimização da Manipulabilidade (MMA)	144
4.3.1.1.1.	Respostas com o método MMA para o robot $3R$	145
4.3.1.1.2.	Respostas com o método MMA para o robot $4R$	146
4.3.1.1.3.	Respostas com o método MMA para o robot $5R$	152
4.3.2.	Trajectória com obstáculos	158
4.4.	Resumo do capítulo	161
5.	Conclusões	163
	Referências	165
A.	Função Gamma de Euler	175
B.	Aproximações de primeira e segunda ordem da Cinemática	179
C.	Determinação dos acréscimos das juntas no método MMA	183

Lista de Figuras

2.1. Construção dos quatro primeiros passos do conjunto de Cantor. As iterações estão designadas por n . A dimensão fractal deste conjunto é $dim = \frac{\ln 2}{\ln 3}$	35
2.2. Gráfico de $\log(L(\eta))$ vs $\log(\eta)$ do conjunto de Cantor.	36
2.3. Construção dos três primeiros passos da curva de Koch. As iterações são designadas por n	37
2.4. Gráfico de $\log(L(\eta))$ vs $\log(\eta)$ na curva de Koch.	37
2.5. Construção do "flocó de neve" de Koch. Dimensão fractal $dim = \frac{\ln 4}{\ln 3}$	38
2.6. Construção do triângulo de Sierpinski. Dimensão fractal $dim = \frac{\ln 3}{\ln 2}$	38
2.7. Barra de cantor (ternária).	40
2.8. Circuito eléctrico recursivo da barra de Cantor.	41
2.9. Fenómeno natural robusto. Representação esquemática de um dique contendo um número infinito de ramos constituído por canais e alvéolos.	48
2.10. Modelo eléctrico equivalente ao ramo i : $U \equiv P$; $U_i \equiv P_i$; $I_i \equiv Q_i$	49
2.11. Circuito eléctrico recursivo equivalente da "interface" água-dique.	50
2.12. Diagrama de bode assintóticos de $Y(j\omega)$: a) Amplitude, b) Fase.	50
2.13. Diagrama de blocos para um sistema elementar de controlo de ordem fraccionária α	51
2.14. Diagrama de Bode, em malha aberta, de amplitudes e fases, para um sistema de ordem fraccionária $1 < \alpha < 2$	52
2.15. Lugar geométrico das raízes para um sistema de controlo de ordem fraccionária $1 < \alpha < 2$	52
2.16. Sistema de controlo de realimentação unitária.	53
3.1. Cinemáticas directa e inversa.	60
3.2. Manipulador planar com dois elos e com juntas rotacionais ($n = 2, m = 2$).	61
3.3. As duas soluções da cinemática inversa, para o robot $2R$	61

3.4. Espaço de trabalho para o robot $2R$, para $-\pi < q_i < \pi$ ($i = 1, 2$) $l_1 = 1.5$ m, $l_2 = 0.7$ m.	62
3.5. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, no espaço das juntas, de ponto singular para robot $2R$, para $r_s = 0$ m. $\psi = 2.97$	68
3.6. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, no espaço das juntas, de ponto singular para robot $2R$, para $r_s = l_1 + l_2$ m. $\psi = 2.26$	68
3.7. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, no espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot $2R$, para $r_s = 1.5\sqrt{2}$ m. $\psi = 7.03$	69
3.8. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $3R$, para $r_s = 0$ m. $\psi = 2.69$	70
3.9. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $3R$, para $r_s = 1$ m. $\psi = 2.29$	71
3.10. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $3R$, para $r_s = 3$ m. $\psi = 3.19$	71
3.11. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot $3R$, para $r_s = 2.635$ m. $\psi = 7.97$	72
3.12. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $4R$, para $r_s = 0$ m. $\psi = 4.40$	72
3.13. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $4R$, para $r_s = 1.5$ m. $\psi = 2.96$	73
3.14. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $4R$, para $r_s = 3$ m. $\psi = 4.18$	73
3.15. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot $4R$, para $r_s = 2.13$ m. $\psi = 7.06$	74
3.16. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 0$ m. $\psi = 2.96$	75
3.17. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 0.6$ m. $\psi = 2.18$	75

3.18. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 1.8 m$. $\psi = 2.89$	76
3.19. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 3 m$. $\psi = 4.98$	76
3.20. Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot $5R$, para $r_s = 2.13 m$. $\psi = 6.15$	77
3.21. Coeficiente de amplificação (ψ) vs radial (r), na projecção de E em A_{xy} , de vizinhanças esféricas de pontos singulares para os robots $2R$, $3R$, $4R$ e $5R$	77
3.22. Solução no plano $\{O, dq_1, dq_{12}\}$ para vizinhança esférica, do espaço $\{O, q_1, q_2\}$ robot $2R$, para $r \in \{0, 1.5\sqrt{2}, 3\} m$ com $(dx, dy) = (-0.5, 0.5)$	79
3.23. Elipsóide de manipulabilidade.	80
3.24. Manipulabilidade para robot $2R$ vs r . A e C pontos singulares. B ponto de manipulabilidade máxima.	81
3.25. Manipulabilidade para robot $3R$ vs r . B e D pontos singulares. C ponto de manipulabilidade máxima.	82
3.26. Manipulabilidade para robot $4R$ vs r . A, B e D pontos singulares. C ponto de manipulabilidade máxima.	82
3.27. Manipulabilidade para robot $5R$ vs r . B, C e E pontos singulares. D ponto de manipulabilidade máxima.	83
3.28. Índice de manipulabilidade μ , para robot $3R$, com $q_2 \in [-\pi, \pi]$ e com $q_3 \in [-\pi, \pi]$	87
3.29. Variação do valor da manipulabilidade μ com os parâmetros l_i , para robots $2R$, $3R$, $4R$ e $5R$	88
4.1. Um manipulador redundante, kR , <i>planar</i>	94
4.2. Diagrama de blocos para o método <i>PMF</i>	97
4.3. O robot redundante <i>PP</i>	97
4.4. Posições das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo <i>PMF</i> para $r = 1 m$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} m$ com $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	100
4.5. Velocidades das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo <i>PMF</i> para $r = 1 m$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} m$ com $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	101

4.6. Acelerações das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF para $r = 1 m$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} m$ com $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	102
4.7. Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF para $r = 1 m$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} m$ com $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	103
4.8. Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF para $r = 1 m$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} m$ com $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	104
4.9. Dimensões do plano de fase de Lyapunov (dim_L) e por "contagem de caixas" (dim_C) vs r , para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF , com $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$ e $\rho = 0.1 m$	106
4.10. Distribuição estatística das posições de juntas, para robot $3R$, vs distância radial r . Raio, $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\}$. Ponto singular para $r_s = 1 m$. . .	107
4.11. Resposta em frequência para o robot $3R$, para $r = 2 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$, e $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\} m$ e perturbação com sinal tipo <i>doblete</i> e sinal tipo <i>ruído branco</i>	109
4.12. Transformada de Fourier para a velocidades das juntas do robot $3R$, para 600 ciclos vs a distância radial r e frequência normalizada ω/ω_0 , para $\rho \in \{0.10, 0.50\} m$ e $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	111
4.13. Ordem fraccionária α vs tempo de excitação τ para um tempo total de 600 seg, perturbação com sinal tipo <i>ruído branco</i> , robot $3R$, $\rho = 0.10 m$. .	113
4.14. Comparação da transformada de Fourier para os sinais de entrada e de saída com perturbações com sinais do tipo <i>ruído branco</i> e <i>ruído rosa</i> , robot $3R$, $\rho = 0.10 m$	114
4.15. Posições das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo PMF para $r = 1 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	115
4.16. Velocidades das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo PMF para $r = 1 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	116
4.17. Acelerações das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo PMF para $r = 1 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	117
4.18. Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $4R$, sob controlo PMF para $r = 1 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$	118

4.19. Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot $4R$, sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	119
4.20. Lyapunov (dim_L) e "box-counting" (dim_C) dimensões do plano de fase <i>vs</i> r , robot $4R$ sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$ e $\rho = 0.1\text{ m}$	121
4.21. Distribuição estatística das posições de juntas para robot $4R$, <i>vs</i> distância radial r . Raio $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\}$. Ponto singular para $r_s = 1.5\text{ m}$	122
4.22. Resposta em frequência para o robot $4R$, para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$, $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\}\text{ m}$ e perturbação com sinal tipo <i>doblete</i> e sinal tipo <i>ruído branco</i>	124
4.23. Transformada de Fourier para a velocidades das juntas do robot $4R$, para 600 ciclos, <i>vs</i> a distância radial r e uma frequência normalizada ω/ω_0 , para $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\}\text{ m}$ e $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	126
4.24. Ordem fraccionária α <i>vs</i> tempo de excitação τ para um tempo total de 600 <i>seg</i> , perturbação com sinal tipo <i>ruído branco</i> , robot $4R$, $\rho = 0.10\text{ m}$	128
4.25. Comparação da transformada de Fourier para os sinais de entrada e de saída com perturbação com sinal tipo <i>ruído branco</i> e <i>ruído rosa</i> para robot $4R$, $\rho = 0.10\text{ m}$	129
4.26. Posições das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	130
4.27. Velocidades das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	131
4.28. Acelerações das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	132
4.29. Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $5R$, sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	133
4.30. Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot $5R$, sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	134
4.31. Lyapunov (dim_L) e "box-counting" (dim_C) dimensões do plano de fase <i>vs</i> r , robot $5R$ sob controlo PMF para $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$ e $\rho = 0.1\text{ m}$	135
4.32. Distribuição estatística das posições de juntas para robot $5R$, <i>vs</i> distância radial r . Raio $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\}$. Ponto singular para $r_s = 0.6\text{ m}$	137

4.33. Resposta em frequência para o robot 5R, para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$, e $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\}\text{ m}$ e perturbação com sinal tipo <i>doblete</i> e sinal tipo <i>ruído branco</i>	138
4.34. Transformada de Fourier para a velocidades das juntas do robot 5R, para 600 ciclos, vs a distância radial r e uma frequência ω/ω_0 , para $\rho \in \{0.10, 0.50\}\text{ m}$ e $\omega_0 = 3\text{ rad/seg}$	141
4.35. Ordem fraccionária α <i>vs</i> tempo de excitação τ para um tempo total de 600 <i>seg</i> , perturbação com sinal tipo <i>ruído branco</i> para o robot 5R.	143
4.36. Comparação da transformada de Fourier para os sinais de entrada e de saída com perturbação com sinal tipo <i>ruído branco</i> e <i>ruído rosa</i> para o robot 5R.	143
4.37. Diagrama de blocos para o método <i>MMA</i>	145
4.38. Posições das juntas na trajectória para o robot 3R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	146
4.39. Velocidades das juntas na trajectória para o robot 3R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	147
4.40. Acelerações nas juntas q_1 , q_2 , q_3 na trajectória para o robot 3R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	147
4.41. Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot 3R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	148
4.42. Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot 3R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	148
4.43. Posições das juntas na trajectória para o robot 4R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	149
4.44. Velocidades das juntas na trajectória para o robot 4R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	150
4.45. Acelerações das juntas na trajectória para o robot 4R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	150
4.46. Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot 4R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	151
4.47. Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot 4R, sob controlo <i>MMA</i> para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	151

4.48. Posições das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	153
4.49. Velocidades das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	154
4.50. Acelerações das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	155
4.51. Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	156
4.52. Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$	157
4.53. Trajectória para o robot $3R$ num espaço sem obstáculos (caso A) e com obstáculos (casos B-D).	158
4.54. Manipulabilidade máxima para o robot $3R$ quando percorre a trajectória num espaço sem obstáculos (caso A) e com obstáculos (casos B-D).	159
4.55. Posição das juntas para o robot $3R$ quando percorre a trajectória num espaço sem obstáculos (caso A) e com obstáculos (casos B-D).	160
A.1. Ilustração da função Gama.	175

Lista de Tabelas

2.1. Definições para as <i>DIFs</i>	24
2.2. Tabela de derivadas e integrais de diversas funções elementares, usando a definição de Weyl.	27
2.3. Tabela de derivadas e integrais de diversas funções elementares, usando a definição de Riemann-Liouville.	27
2.4. Diferenças fracionárias de algumas funções.	30
2.5. Valores do conjunto de Cantor.	36
2.6. Valores do conjunto de Koch.	37
4.1. Parâmetros da função de transferência para o robot $3R$ e uma perturbação do tipo <i>doblete</i> , em x_{ref}	108
4.2. Parâmetros da função de transferência para o robot $3R$ e uma perturbação do tipo ruído branco	110
4.3. Parâmetros da componente contínua para a transformada de Fourier das velocidades das juntas para o robot $3R$	112
4.4. Parâmetros da função de transferência para o robot $4R$ e uma perturbação do tipo <i>doblete</i>	123
4.5. Parâmetros da função de transferência para o robot $4R$ e uma perturbação do tipo <i>ruído branco</i>	125
4.6. Parâmetros da componente <i>DC</i> para a transformada de Fourier das velocidades das juntas para o robot $4R$	127
4.7. Parâmetros da função de transferência para o robot $5R$ e uma perturbação do tipo <i>doblete</i>	139
4.8. Parâmetros da função de transferência para o robot $5R$ e uma perturbação do tipo <i>ruído branco</i>	140
4.9. Parâmetros da componente <i>DC</i> para a transformada de Fourier das velocidades das juntas para o robot $5R$	142

A.1. Algumas expressões envolvendo a Função Gama.	177
A.2. Alguns dos valores particulares da função Gama.	177

Capítulo 1

Introdução

1.1. Robótica de Manipulação

Nas últimas décadas têm sido sugeridos vários conceitos para a palavra *robot*. De facto um *robot* pode estar associado a vários níveis de sofisticação tecnológica, desde "simples" ferramenta de manipulação até à avançada máquina antropomórfica dos filmes de ficção científica. Na realidade o conceito de *robot* varia de interesse e interpretação conforme se trata de investigadores, engenheiros ou fabricantes. Contudo, é de aceitação geral que os robots industriais contemporâneos tiveram origem numa ferramenta de manipulação programável desenvolvida por George C. Devol.

Em 1954 George C. Devol registou, nos Estados Unidos da América, a patente de uma nova máquina para transporte e manipulação de peças. Os robots industriais de Devol tiveram a sua origem em duas tecnologias anteriores: o *controlo numérico* de máquinas-ferramenta e a *tele-manipulação* remota. O controlo numérico é um esquema que permite gerar acções de controlo baseadas em dados gravados. Os dados gravados podem incluir coordenadas dos pontos para os quais a máquina se deverá mover, sinais de *sincronismo* para iniciar e parar operações, e comandos lógicos para a execução de sequências de controlo. A sequência completa das operações e as variações são previstas e gravadas, por forma a que tarefas diferentes possam ser executadas sem requererem alterações no hardware. Outra origem dos actuais robots industriais pode ser encontrada nos *tele-manipuladores*. Um *tele-manipulador* é um sistema que permite executar uma tarefa à distância sob controlo humano. Assim, um *tele-manipulador* pode ser usado em ambientes hostis, tais como manipulação de substâncias radioactivas ou execução de tarefas em meios submersos ou no espaço. O primeiro *tele-manipulador "master-slave"* foi construído em

1948, sendo constituído um braço mecânico equipado com motores eléctricos, instalado no local onde deveria operar, e um "joystick", de geometria similar à do braço mecânico, comandado pelo operador. Os movimentos do operador no "joystick" eram transformados em sinais eléctricos que eram transmitidos aos motores do braço mecânico provocando, assim, uma réplica dos movimentos do "joystick". O "joystick" era o *manipulador padrão*, enquanto o braço mecânico era o *manipulador escravo*.

Os braços robóticos contemporâneos retêm algumas similaridades geométricas com o braço humano e com os *tele-manipuladores*. Os robots são usados pela sua capacidade de *mobilidade* e *manipulabilidade* em relação às máquinas tradicionais, devendo ser capazes de operar em diferentes ambientes de trabalho e executarem múltiplas tarefas. Um robot mecânico é uma estrutura basicamente composta por elos mecânicos interligados por juntas articuladas com actuadores. A geometria deste conjunto de elos em série é descrita por equações não lineares, pelo que são necessários procedimentos analíticos eficazes para a estudar. A geometria da estrutura e a sua configuração é globalmente referido como a *cinemática do manipulador*. Por seu lado o comportamento dinâmico dos robots é consideravelmente mais complexo, e traduz-se por um conjunto de equações diferenciais não lineares e acopladas.

Nesta perspectiva, conclui-se que a complexidade da cinemática e da dinâmica criam problemas ao controlo do sistema que não são resolvidos, de forma eficiente, com as técnicas clássicas de controlo.

Os robots são também diferentes das máquinas tradicionais pois devem ser sistemas *autónomos*. Por exemplo, os manipuladores "master-slave" são sistemas controlados manualmente, onde o operador toma as decisões e aplica as acções de controlo necessárias. O operador interpreta a tarefa a realizar, encontra a estratégia adequada para a executar e planeia a sequência das acções adequadas. O movimento do "escravo" é monitorizado pelo operador que, quando necessário, procede a ajustamentos e a modificações. O operador é, assim, uma parte essencial do ciclo de controlo. Quando o operador é eliminado do ciclo de controlo, todos os comandos de controlo e de planeamento devem ser gerados pelo próprio sistema. O detalhe das operações deve ser definido em avanço e cada passo do movimento deve ser gerado e codificado de modo apropriado, por forma a que o robot o possa interpretar e executar de modo correcto. Então, formas eficientes de guardar

os comandos e os dados são também necessários. Nesta perspectiva a *programação* é também um ponto fundamental em robótica. Por outro lado, de forma a adaptar-se a perturbações ou a mudanças inesperadas no espaço de trabalho, o robot necessita de *sensores*, não só para obter informação acerca do ambiente de trabalho (sensores externos, tais como câmaras e sensores de força/pressão) mas também sobre si próprio (sensores internos, tais como "encoders" ou taquímetros nas juntas). Estratégias eficientes que incorporem a informação dos sensores requerem algoritmos de controlo avançados.

1.2. Motivação, Objectivos e Contribuições da Tese

O principal objectivo definido para este trabalho consiste em estudar e desenvolver instrumentos e metodologias de análise e controlo para aplicação em estruturas manipuladoras redundantes. Em todas as aplicações industriais de robots, para uma que uma tarefa seja realizada, a execução de um determinado movimento é definida para o órgão terminal do robot. O movimento poderá ter de ser feito livremente, se não há interacção física entre o braço e o ambiente que o rodeia ou sujeito a restrições, se houver possibilidades de interacção entre o braço e o ambiente envolvente. A correcta execução do movimento pretendido é providenciada pelo sistema de controlo que comanda as juntas dos actuadores com informação coerente com a trajectória pretendida. O controlo do movimento do órgão terminal requer uma análise apropriada das características mecânicas da estrutura do braço, dos actuadores e dos sensores envolvidos. Esta análise deriva dos modelos matemáticos que descrevem as componentes cinemática e dinâmica do robot e ambiente.

A análise cinemática de um robot consiste na descrição do movimento do robot, em relação a um referencial cartesiano, ignorando as forças e momentos que o movimento induz na estrutura. É importante, neste momento, estabelecer uma diferença entre *cinemática* e *cinemática diferencial*. *Cinemática* descreve a relação analítica entre as posições das juntas e a posição do órgão terminal. *Cinemática diferencial* descreve a relação analítica entre o movimento das juntas e o movimento do órgão terminal, em termos de velocidades.

Consoante as tarefas solicitadas ao manipulador é necessário definir a evolução no tempo, das variáveis mais importantes (*e.g.* posições, velocidades das juntas ou do órgão

terminal). A formulação do movimento pretendido é designada por *planeamento de trajectória*. As trajectórias geradas constituem as entradas de referência para o sistema de controlo do movimento da estrutura. Por seu lado, o algoritmo de controlo dum manipulador procura encontrar um equilíbrio entre as forças e momentos exercidos nas juntas que permitam a execução da trajectória de referência. Assim, o sistema de controlo deve calcular dos desvios entre as entradas de referência e os valores obtidos pelos sensores das saídas correspondentes, ou seja, efectuado com realimentação. Os aspectos relacionados com a natureza quasi-caótica dos sistemas de planeamento de trajectórias e controlo de robots redundantes levaram à utilização de ferramentas, como o cálculo diferencial fraccionário, que não tem sido tomado em consideração no estudo destes fenómenos. O envolvimento destes tópicos permite lançar luz sobre alguns dos aspectos pouco conhecidos e, assim, proporcionar o desenvolvimento de um conhecimento científico capaz de sustentar a aplicação dos sistemas robóticos redundantes. Nesta ordem de ideias, este trabalho apresenta uma proposta de abordagem diferente, complementando certas soluções desenvolvidas nesta área.

As principais contribuições desta tese podem ser definidas nos seguintes pontos:

- Introdução de novas abordagens que permitam uma melhor compreensão dos problemas subjacentes às questões relacionadas com manipuladores redundantes.
- Formulação de metodologia de avaliação do desempenho dessas abordagens englobando os três níveis conceptuais requeridos no controlo: planeamento de trajectórias, cinemática e dinâmica.
- Desenvolvimento de algoritmos de controlo simples que adoptam as abordagens propostas.

Em conclusão, este trabalho introduz novas formas de estudo de manipuladores redundantes e explora, de forma inovadora, algumas das abordagens clássicas propostas pelos investigadores.

1.3. Estrutura da Tese

A tese encontra-se dividida em cinco capítulos que se constituem, na medida do possível, com um carácter autónomo. Os capítulos dois e três formam a base de todo trabalho já que é aqui que se definem os conceitos em que assentam todo o trabalho de investigação realizado.

No capítulo dois apresentam-se os conceitos básicos da teoria da matrizes inversas generalizadas bem como os fundamentos do cálculo integral fraccionário. Com base nessas informações apresenta-se um conjunto de elementos básicos que serão desenvolvidos e discutidos nos capítulos seguintes.

No capítulo três são expostos os aspectos fundamentais da cinemática e da dinâmica de manipuladores.

No capítulo quatro estabelece-se uma comparação entre modelos de planeamento de trajectórias para manipuladores redundantes e formula-se um algoritmo para o cálculo da cinemática inversa para manipuladores redundantes. Apesar da simplicidade de alguns dos modelos eles afiguram-se úteis para uma melhor compreensão dos problemas que envolvem a modelização de manipuladores redundantes. Este capítulo aborda também os aspectos da modelização e da optimização no planeamento de trajectórias para manipuladores redundantes com três, quatro e cinco *graus de liberdade*. A primeira parte do capítulo é dedicada ao planeamento e optimização de trajectórias repetitivas usando os modelos apresentados no capítulo três avaliando o respectivo desempenho. De seguida são apresentados modelos para o planeamento e a optimização de trajectórias em espaços de trabalho com obstáculos. A aplicação dos modelos é demonstrada através de várias experiências bem como da discussão dos aspectos relacionados coma eficácia.

Por último, no capítulo cinco são apresentadas as conclusões finais que decorrem do trabalho desenvolvido e apontam-se algumas direcções de investigação futura.

Capítulo 2

Matrizes Pseudoinversas e Cálculo Integral Fraccionário

2.1. Introdução

Neste capítulo introduzem-se os aspectos matemáticos fundamentais ao desenvolvimento dos estudos seguintes. Nesta ordem de ideias, numa primeira parte são abordados os assuntos relacionados com a generalização de certos aspectos do cálculo matricial. Na segunda parte são introduzidos os conceitos relacionados com a generalização do cálculo diferencial e integral clássico, de ordem inteira, para uma ordem real qualquer.

2.2. Matrizes Pseudoinversas

2.2.1. Introdução

O conceito de matriz inversa generalizada foi referido pela primeira vez em 1903, num artigo de Fredholm, onde era apresentado um caso particular de inversa generalizada (por ele chamada *pseudoinversa*) de um operador integral. A classe das matrizes pseudoinversas foi caracterizada em 1912 por Hurwitz, que usou a dimensão finita dos espaços nulos dos operadores de Fredholm para a sua construção. As inversas generalizadas de operadores diferenciais, já implícitas nas discussões de Hilbert em 1904 sobre a generalização das funções de Green, foram estudadas, desde aí, por inúmeros autores. Inversas generalizadas de operadores diferenciais e integrais são anteriores às inversas generalizadas de matrizes, cuja existência foi apresentada por E.H.Moore, que definiu uma única inversa (que designou de *recíproca geral*) para cada matriz finita (quadrada ou rectangular). Este

assunto foi retomado no início dos anos 50, relativamente às propriedades do método dos mínimos quadrados (não mencionadas por Moore) de determinadas inversas generalizadas. Estas propriedades foram verificadas em 1951 por Bjerhammar, que redescobriu a inversa de Moore e estudou também a relação existente entre as inversas generalizadas e a solução de sistemas lineares. Em 1955 Penrose reforçou e ampliou os resultados de Bjerhammar no estudo dos sistemas lineares e mostrou que a inversa de Moore, para uma dada matriz \mathbf{A} , é a única matriz \mathbf{X} que satisfaz as condições (2.5) a (2.8) apresentadas a seguir.

2.2.2. A inversa de uma matriz não singular

Cada matriz \mathbf{A} , não singular, quadrada e de ordem n , admite uma única matriz inversa, de ordem n , \mathbf{A}^{-1} tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem n . Das muitas propriedades que gozam as matrizes inversas, recordemos algumas:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{A}^T é a transposta de \mathbf{A} . Recorde-se ainda que um número real λ é chamado um valor próprio da matriz quadrada \mathbf{A} e \mathbf{x} é chamado um vector próprio de \mathbf{A} , correspondente a λ , se $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Uma outra propriedade da matriz \mathbf{A}^{-1} é que os seus valores próprios são os inversos dos da matriz \mathbf{A} .

2.2.3. A inversa de uma matriz singular ou de uma matriz rectangular

Por vezes há a necessidade em obter *inversas* de matrizes que são singulares ou que não são quadradas. Assim, por *matriz inversa generalizada* de uma matriz \mathbf{A} considera-se uma matriz \mathbf{A}^+ associada a \mathbf{A} tal que:

- i)* exista para uma classe de matrizes mais ampla que a classe das matrizes não singulares;
- ii)* tenha algumas das propriedades das matrizes inversas "usuais";
- iii)* se reduza à "usual" inversa se \mathbf{A} é não singular.

Como ilustração de *iii)*, relativa à descrição das inversas generalizadas, refira-se uma definição usada por muitos autores para o efeito. *Uma matriz inversa generalizada* de \mathbf{A} é uma matriz, \mathbf{A}^+ que satisfaça $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Se \mathbf{A} é não singular, multiplicando, à direita e à esquerda por \mathbf{A}^{-1} , virá $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

2.2.4. Matrizes Inversas Generalizadas

Para as matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com vista à definição da matriz inversa generalizada \mathbf{A}^+ , da matriz inversa generalizada reflexiva \mathbf{A}^- e da matriz pseudoinversa $\mathbf{A}^\#$ de \mathbf{A} , são usadas as relações:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X} \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{X})^T = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{X}\mathbf{A})^T = \mathbf{X}\mathbf{A} \quad (2.8)$$

As condições (2.5) a (2.8) são chamadas as *condições de Penrose*. Uma matriz inversa generalizada da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^+$ que satisfaz a condição (2.5). Por outro lado, uma matriz inversa generalizada reflexiva da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^-$ que satisfaz as condições (2.5) e (2.6). Por último, uma matriz pseudoinversa da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\#$ que satisfaz todas as condições (2.5) a (2.8). A matriz pseudoinversa é normalmente designada por matriz de *Moore-Penrose*.

Provavelmente uma das utilizações mais familiares das matrizes é na resolução de sistemas de equações lineares. Seja

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.9)$$

onde \mathbf{b} é um vector conhecido e \mathbf{x} é um vector desconhecido. Se \mathbf{A} é não singular e quadrada, há uma única solução de (2.9) dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.10)$$

onde \mathbf{A}^{-1} é a matriz inversa de \mathbf{A} . Contudo, quando \mathbf{A} é uma matriz quadrada singular ou uma matriz rectangular pode ser necessário encontrar a "melhor" solução para (2.9). Nestas situações um procedimento comum é experimentar pares de valores para as variáveis e tentar obter uma função de aproximação para esses n pontos que têm como coordenadas cartesianas (α_i, β_i) ($i = 1, 2, \dots, n$). Uma função conveniente é uma função polinomial, do tipo:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} \quad (2.11)$$

Se $m = n$ e os α_i ($i = 1, 2, \dots, m - 1$) são todos diferentes, então há um único polinómio (2.11) que passa simultaneamente em todos os pontos (polinómio interpolador). De outro modo, se $m < n$, então geralmente nem todos os pontos ficam sobre a curva. O caso mais simples (mas não o menos importante) é fazer $m = 2$ reduzindo a curva a uma recta

$$y = a_0 + a_1x \quad (2.12)$$

Pretende-se, agora, determinar a recta que "melhor" aproxima o conjunto de pontos. Se os α_i ($i = 1, 2, \dots, m - 1$) são todos diferentes, e são conhecidos com exactidão, então o erro e_i em cada ponto é a diferença entre o correspondente valor de y na equação da recta e o valor de β_i , isto é,

$$e_i = a_0 + a_1\alpha_i - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

Devem ser escolhidos valores para a_0 e a_1 , em (2.12) tais que o total desses erros seja o

menor possível. Como os erros e_i podem ser positivos ou negativos, e estamos interessados no erro total, consideram-se os quadrados do erro e_i^2 . O método dos mínimos quadrados permite determinar a_0 e a_1 de modo que

$$S = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1\alpha_i - \beta_i)^2 \quad (2.14)$$

seja mínimo. Se $n = 2$ ambos os pontos ficariam sobre a recta (2.12) e teríamos

$$a_0 + a_1\alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

ou seja, um sistema de duas equações a duas incógnitas. Todavia, se, por exemplo $n > 2$ e (por simplicidade) fazendo $n = 3$ então a equação (2.14) vem

$$S = (a_0 + a_1\alpha_1 - \beta_1)^2 + (a_0 + a_1\alpha_2 - \beta_2)^2 + (a_0 + a_1\alpha_3 - \beta_3)^2 \quad (2.16)$$

Para que S seja mínimo, as derivadas parciais $\frac{\partial S}{\partial a_0}$ e $\frac{\partial S}{\partial a_1}$ devem ser nulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 &= 2(a_0 + a_1\alpha_1 - \beta_1) + 2(a_0 + a_1\alpha_2 - \beta_2) + 2(a_0 + a_1\alpha_3 - \beta_3) \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 &= 2\alpha_1(a_0 + a_1\alpha_1 - \beta_1) + 2\alpha_2(a_0 + a_1\alpha_2 - \beta_2) + 2\alpha_3(a_0 + a_1\alpha_3 - \beta_3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Simplificando (2.17) vem

$$\begin{aligned} 3a_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)a_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)a_0 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)a_1 &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se escrevermos (2.15) na forma

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \beta \quad (2.19)$$

para $n = 3$, com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \\ 1 & \alpha_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, então é fácil verificar que o sistema (2.18) pode ser representado por

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{A}^T \beta \quad (2.20)$$

Como a característica de \mathbf{A} é 2 ($r(\mathbf{A}) = 2$), então vem $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 2$, o que permite concluir que a matriz $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ é não singular. Logo (2.20) tem solução única, dada por

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \beta \quad (2.21)$$

que é solução desejada de (2.19). Este resultado ainda é válido se $n > 3$. Quando o polinómio (2.11) é usado com $m > 2$ e $n > m$, a matriz \mathbf{A} em (2.19) é de dimensão $n \times m$ mas o resultado (2.21) continua válido. A seguir apresenta-se uma generalização do conceito de inversa.

2.2.4.1. Definição de inversa de Moore-Penrose

Se em (2.9) \mathbf{A} é uma matriz $n \times m$, a solução \mathbf{A}^+ poderá, ou não, existir e, no caso de existir, poderá não ser única. Considerando inicialmente o caso de \mathbf{A} ser uma matriz de elementos reais, generalizemos a discussão feita anteriormente para encontrar a solução de (2.9) no "sentido" dos mínimos quadrados. Suponhamos que, quando algum vector \mathbf{x} é substituído no membro esquerdo de (2.9), se obtém um vector $\mathbf{b}' = [b'_1, b'_2, \dots, b'_m]^T$. O objectivo é escolher um dos vectores \mathbf{x} de modo a que a soma dos quadrados das diferenças entre os elementos de \mathbf{b}' e os exigidos no membro direito de (2.9) $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ seja a menor possível. Por outras palavras, pretende-se que a soma dos quadrados dos resíduos, definidos por

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{b}'_i - \mathbf{b}_i)^2 \quad (2.22)$$

seja minimizada. Usando a definição de norma euclidiana, minimizar (2.22) é equivalente a minimizar

$$S = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{Ax} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (2.23)$$

Para determinar o vector \mathbf{x} apropriado (que minimize (2.23)) determinam-se os zeros do vector ∇S (gradiente de S)¹ e as usam-se as propriedades²

$$\nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.24)$$

$$\nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \nabla(\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) \quad (2.25)$$

Usando (2.24) e (2.25) pode-se obter o gradiente de (2.23) como

$$\nabla S = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.26)$$

que igualando a zero dá

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.27)$$

Como $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, no caso particular se $r(\mathbf{A}) = n < m$ a matriz $n \times n$ ($\mathbf{A}^T \mathbf{A}$) é não singular, sendo a única solução de (2.27), no "sentido" dos mínimos quadrados, o valor de

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.28)$$

Quando \mathbf{A} é quadrada e não singular este resultado reduz-se à solução única $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$. Considere-se agora um sistema de equações mais geral

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.29)$$

onde \mathbf{b} é uma matriz $m \times m$, \mathbf{X} é uma matriz $n \times m$ e \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$, podendo ser complexa. Pretende-se determinar a "mínima solução dos mínimos quadrados", isto é, a solução \mathbf{x} , que para além de minimizar a soma dos quadrados $\|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ é também,

¹Seja $\varphi(x) \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função real de n variáveis reais, tendo derivadas parciais (*primeira e segunda*) em relação a todas as variáveis. O vector das *primeiras* derivadas parciais $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right]$ chama-se *gradiente* de φ , e escreve-se $\nabla \varphi$ ou **grad** φ . Mostra-se que φ tem um máximo ou mínimo local em qualquer ponto $x = a$, tal que todas as *primeiras* derivadas parciais sejam nulas, isto é, $\nabla \varphi = 0$.

²Se φ é uma forma quadrática, isto é, $\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, ou $\varphi = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, onde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ e $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ou $\varphi = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ e $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ é uma matriz real simétrica

de dimensão $n \times n$, virá:
$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \dots + 2a_{1n}x_n \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \dots + 2a_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{ou então em forma de vector}$$
 $\nabla \varphi = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$.

ela própria, a de menor norma euclidiana, $\|\mathbf{x}\|$, entre todas as soluções no sentido dos mínimos quadrados. Pode-se mostrar que a solução deste sistema é única e dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (2.30)$$

onde \mathbf{A}^+ é a única $n \times m$ matriz inversa generalizada de Moore-Penrose de \mathbf{A} , definida pelas equações

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \quad (2.32)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \quad (2.33)$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A} \quad (2.34)$$

que são válidas para quaisquer valores de m e n . Em particular, quando $m \geq n$ e \mathbf{A} tem a maior característica possível $r(\mathbf{A}) = n$, então $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ é não singular e \mathbf{A}^+ é dada por

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \quad (2.35)$$

Identicamente, quando $m \leq n$ e $r(\mathbf{A}) = m$, \mathbf{A}^+ é dada por

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (2.36)$$

Quando \mathbf{A} é uma matriz nula, então \mathbf{A}^+ é também definida como a matriz nula. Por outro lado, quando \mathbf{A} é um escalar a , então $a^+ = \frac{1}{a}$, se $a \neq 0$, e $a^+ = 0$, se $a = 0$.

2.2.4.2. Provas

2.2.4.2.1. Prova da existência de \mathbf{A}^+

Seja \mathbf{A} uma matriz de dimensão $m \times n$. Se $\mathbf{A} = 0$ então é obvio que $\mathbf{A}^+ = 0$ satisfaz todas as condições. Se $\mathbf{A} \neq 0$, seja característica de \mathbf{A} , $r(\mathbf{A}) = r$. Então, \mathbf{A} pode ser decomposta como o produto $\mathbf{B}\mathbf{C}$, sendo \mathbf{B} de dimensão $m \times r$ e \mathbf{C} de dimensão $r \times n$. Usando as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} , defina-se uma matriz \mathbf{D} , de dimensão $n \times m$, tal que: $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T$. É fácil provar que $\mathbf{A}^+ = \mathbf{D}$, satisfaz as condições (2.31) a (2.34).

2.2.4.2.2. Prova de que \mathbf{A}^+ é única

Sejam \mathbf{X} e \mathbf{Y} duas matrizes que satisfazem (2.31) a (2.34), então:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{X})^T = (\mathbf{X}\mathbf{X})^T \mathbf{A}^T = \mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{X})^T (\mathbf{A}\mathbf{Y})^T = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}\mathbf{A})^T (\mathbf{Y}\mathbf{A})^T \mathbf{Y} = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}\mathbf{A})^T \mathbf{Y} = \mathbf{Y}\end{aligned}$$

pelo que $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$

2.2.4.3. Algumas propriedades das inversas generalizadas

As propriedades seguintes são análogas às definidas para as matrizes inversas "ordinárias"

$$(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A} \quad (2.37)$$

$$(\mathbf{A}^T)^+ = (\mathbf{A}^+)^T \quad (2.38)$$

$$(k\mathbf{A})^+ = k^+ \mathbf{A}^+, \forall k \in \mathbb{R} \quad (2.39)$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^T)^+ \quad (2.40)$$

É de notar que em (2.40) está expressa a fórmula familiar $(\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$, quando $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$. Contudo, esta fórmula para a inversa de um produto não é geral para as matrizes inversas generalizadas de Moore-Penrose, isto é, $(\mathbf{A}\mathbf{B})^+ \neq \mathbf{B}^+ \mathbf{A}^+$.

2.2.4.4. Cálculo das matrizes inversas generalizadas

2.2.4.4.1. A inversa generalizada de Moore-Penrose

Não existe uma fórmula explícita para o cálculo de \mathbf{A}^+ como acontece para o cálculo de \mathbf{A}^{-1} em termos de $\text{Adj}(\mathbf{A})$ e de $\det(\mathbf{A})$. Assim, é possível calcular \mathbf{A}^+ directamente a partir das condições de definição (2.31) a (2.34) quando as dimensões de \mathbf{A} são pequenas. Para outras situações veremos alguns métodos que podem ser usados para a determinação de \mathbf{A}^+ . Para o primeiro destes métodos, é necessário começar por verificar que se \mathbf{A} é uma matriz de dimensão $m \times n$ e $r(\mathbf{A}) = r$. Nesse caso, é possível encontrar matrizes \mathbf{C} ($m \times r$) e \mathbf{D} ($r \times n$), cada tendo característica igual a r , isto é, $r(\mathbf{C}) = r(\mathbf{D}) = r$, tais que

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D} \quad (2.41)$$

Um esquema para obter \mathbf{A}^+ consiste na factorização total de \mathbf{A} , que se passa a descrever. A condição requerida por (2.41) é que tanto as matrizes \mathbf{C} como \mathbf{D} tenham característica maior possível. Por outro lado, as expressões $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ e $\mathbf{C}' = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$, tais que $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{A}\mathbf{C}' = \mathbf{I}$, podem ser usadas para as suas generalizadas inversas, dando

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{D}^T(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T \quad (2.42)$$

Quando $r = 1$, \mathbf{C} e \mathbf{D} são, respectivamente, vector coluna e vector linha, e, tanto $\mathbf{D}\mathbf{D}^T$ como $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ são escalares, reduzindo-se (2.42) a uma fórmula simples

$$\mathbf{A}^+ = \frac{\mathbf{D}^T\mathbf{C}^T}{(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)(\mathbf{C}^T\mathbf{C})} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^T \quad (2.43)$$

onde

$$\alpha = \|\mathbf{A}^2\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \quad (2.44)$$

A fórmula (2.43) é particularmente útil quando \mathbf{A} é uma matriz linha ou matriz coluna. A factorização $\mathbf{C}\mathbf{D}$ de \mathbf{A} em (2.41) pode ser feita usando operações elementares sobre linhas. Para obter a matriz \mathbf{D} faz-se uma redução de \mathbf{A} através da "condensação em escada" de \mathbf{A} , obtendo

$$\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}_{(m-r') \times n}^r \quad (2.45)$$

onde os elementos d_{ij} de \mathbf{D} satisfazem as condições:

- para cada linha i ($i = 1, 2, \dots, r$) há uma coluna j_i tal que $d_{ij} = 1$, e $d_{ij} = 0$, $j < j_i$, com $j_1 < j_2 < \dots < j_r$;
- em cada coluna j_i ($i = 1, 2, \dots, r$) há apenas um elemento não nulo, isto é, $d_{kji} = 0$ quando $k \neq i$

É de notar que (2.45) pode ser vista como uma etapa para a obtenção de \mathbf{A} escrita na forma *normal*. Para obter a forma *normal*, deverão ser feitas operações elementares sobre colunas em (2.45). Uma vez encontrada \mathbf{D} em (2.45), a matriz \mathbf{C} requerida na factorização (2.41) consiste nas colunas j_1, j_2, \dots, j_r de \mathbf{A} .

2.2.4.4.2. {1, 2, 3}inversas

Voltando às equações (2.31) a (2.34), de definição de matriz inversa generalizada de Moore Penrose de uma matriz \mathbf{A} ($m \times n$), estas podem ser re-escritas na forma:

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{A} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X} \quad (2.47)$$

$$(\mathbf{AX})^T = \mathbf{AX} \quad (2.48)$$

$$(\mathbf{XA})^T = \mathbf{XA} \quad (2.49)$$

A solução das equações (2.46) a (2.49) é, obviamente, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^+$, que é única como foi provado. Agora definiremos algumas inversas generalizadas que satisfaçam apenas algumas das quatro condições (2.46) a (2.49). Representaremos por $\mathbf{A}\{i, j, k\}$ o conjunto das matrizes \mathbf{X} , de dimensão ($n \times m$), que satisfaçam à *i*-ésima, *j*-ésima *k*-ésima das condições definidas. Além disso, um elemento de $\mathbf{A}\{i, j, k\}$ designa-se por $\{i, j, k\}$ inversa de \mathbf{A} . Por exemplo, \mathbf{X} é uma $\{1, 2\}$ inversa de \mathbf{A} se satisfaz (2.46) - (2.47), podendo \mathbf{X} não satisfazer às condições (2.48) - (2.49). É de notar que nenhum dos conjuntos $\mathbf{A}\{i, j, k\}$ é vazio já que \mathbf{A}^+ satisfaz a todos eles. Pela definição de $\{i, j, k\}$ inversa, qualquer elemento de $\mathbf{A}\{i, j, k\}$ é elemento de \mathbf{A} . Geralmente é usado o símbolo \mathbf{A}^- para representar $\{1\}$ inversa, isto é,

$$\mathbf{AA}^- \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (2.50)$$

Faremos apenas o estudo da $\{1\}$ inversa. A matriz $\{1\}$ inversa não é única e, geralmente, \mathbf{A}^- é uma matriz particular que satisfaz (2.50), sendo todos os membros de $\mathbf{A}\{1\}$ dados por

$$\mathbf{A}^- + \mathbf{Y} - \mathbf{A}^- \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A} \mathbf{A}^- \quad (2.51)$$

Para um sistema de equações linear

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.52)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, uma condição necessária e suficiente para a existência de solução \mathbf{x} é:

$$r[\mathbf{A} \mid \mathbf{y}] = r[\mathbf{A}] \quad (2.53)$$

onde $r[\mathbf{A}]$ representa a característica da matriz \mathbf{A} . A solução de (2.52) vem:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^- \mathbf{y} \quad (2.54)$$

Para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existe, pelo menos, uma matriz inversa generalizada \mathbf{A}^- tal que $r[\mathbf{A}^-] \geq r[\mathbf{A}]$. Se, $r[\mathbf{A}^-] = r[\mathbf{A}]$ então \mathbf{A}^- coincide com a *inversa generalizada reflexiva* \mathbf{A}_r^- . Geralmente \mathbf{A}^- e \mathbf{A}_r^- não são únicas. Se \mathbf{A} é uma matriz quadrada não singular, então a *matriz inversa generalizada* \mathbf{A}^- e a *matriz inversa generalizada reflexiva* \mathbf{A}_r^- são únicas e verifica-se que $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}_r^- = \mathbf{A}^{-1}$. Além disso, as matrizes $\mathbf{A}\mathbf{A}^-$ e $\mathbf{A}^-\mathbf{A}$ são idempotentes. Considerando uma matriz arbitrária $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e a matriz inversa generalizada \mathbf{A}^- , então todas as inversas generalizadas de \mathbf{A} podem ser representadas pela matriz \mathbf{X} dada por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^- + \mathbf{U} - \mathbf{A}^- \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{A}^- \quad (2.55)$$

que se obtém realizando a manipulação algébrica (onde $\mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^- + \mathbf{U} - \mathbf{A}^- \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{A}^-) \mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} - (\mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A}) \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{A}^- \mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

2.2.4.4.3. Matrizes pseudoinversas

Para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz pseudoinversa $\mathbf{A}^\# \in \mathbb{R}^{n \times m}$ existe e é única, contrariamente ao que ocorre para \mathbf{A}_r^- e para \mathbf{A}^- que não são necessariamente únicas. Assim, a matriz pseudoinversa apresenta as propriedades:

$$i) (\mathbf{A}^\#)^\# = \mathbf{A}$$

$$ii) (\mathbf{A}^T)^\# = (\mathbf{A}^\#)^T$$

$$iii) \mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^\# \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^\#.$$

Para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

i) Se $m < n$ e $r(\mathbf{A}) = m$, então $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ é não singular e é válida a relação:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (2.56)$$

ii) Se $m > n$ e $r(\mathbf{A}) = n$, então $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ é não singular e é válida a relação:

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (2.57)$$

iii) Se $m = n$ e $r(\mathbf{A}) = n$, então:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.58)$$

As matrizes $\mathbf{A}^\# \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \mathbf{A}^\#$, $\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A}$ e $\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^\#$ são idempotentes e simétricas, onde \mathbf{I} representa a matriz identidade de dimensão apropriada. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e idempotente então, para qualquer matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, é válida a condição:

$$\mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{A})^\# = (\mathbf{B} \mathbf{A})^\# \quad (2.59)$$

2.2.4.4.3.1. Cálculo das matrizes pseudoinversas por decomposição em valores singulares

Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ é uma matriz não negativa cujos valores próprios (*i.e.*, as soluções de $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0$) são números reais não negativos. Sejam os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) e faça-se:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \min(m, n) \quad (2.60)$$

Obviamente que resulta $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m, n)} \geq 0$. Agora a matriz \mathbf{A} pode exprimir-se como o produto de três matrizes

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \sum \mathbf{V}^T \quad (2.61)$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m) \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ e } \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.62)$$

onde \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes ortogonais e $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definida por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \end{bmatrix} \text{ se } m \geq n$$

ou

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_n & \vdots \end{bmatrix} \text{ se } m < n$$
(2.63)

Esta decomposição de \mathbf{A} oferece um esquema para o cálculo da pseudoinversa. Quando \mathbf{A} é decomposta em valores singulares, como em (2.61), a sua pseudoinversa $\mathbf{A}^\#$ pode ser representada por:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{V} \Sigma^\# \mathbf{U}^T \quad (2.64)$$

onde $\Sigma^\#$ é a matriz $(m \times n)$ definida por (onde p é o número de valores singulares não nulos):

$$\Sigma^\# = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p^{-1} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.2.4.4.3.2. Pseudoinversas de matrizes com característica máxima

Quando a matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ admite característica máxima, a respectiva pseudoinversa é calculada usando a matriz inversa de uma matriz não singular. A partir de (2.56)- (2.57) a pseudoinversa vem:

i) Se $m < n$ e $r(\mathbf{A}) = m$, então:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (2.66)$$

ii) Se $m > n$ e $r(\mathbf{A}) = n$, então:

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \quad (2.67)$$

A partir de (2.56) $\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^{-1}$ se $m = n$ e $r(A) = m$. Note-se que a partir de (2.67) a pseudoinversa de um vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pode ser calculada por

$$\mathbf{a}^\# = \frac{\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|^2} \quad (2.68)$$

2.3. Aspectos Fundamentais do Cálculo Integral Fraccionário

2.3.1. Introdução

O cálculo integral e diferencial de ordem fraccionária (CF) ou, alternativamente, de ordem não-inteira, é uma extensão natural do cálculo matemático clássico. De facto, desde o início da teoria do cálculo integral e diferencial, matemáticos como Leibniz, Euler e Liouville investigaram vários aspectos sobre o cálculo de derivadas e integrais de ordem não inteira. Na correspondência de Leibniz com Bernoulli e, posteriormente, com L'Hôpital (1695) a Wallis (1697) encontram-se alguns apontamentos relativamente à derivada de ordem $\alpha = 1/2$. No entanto, deve-se a Euler (1738) o primeiro passo, quando este analisou o cálculo de derivadas fraccionárias (DF 's) para a função potência.

No seguimento deste resultado Laplace (1812), Lacroix (1820) e Fourier (1822) sugeriram, também, algumas ideias relativas ao cálculo de DF 'S.

O verdadeiro início da teoria relativa ao cálculo de derivadas e integrais fraccionários (DIF 's) foi dado com os trabalhos de Abel a Liouville. Abel (1823) investigou certas expressões fora do contexto do cálculo de DIF 's, mas os resultados foram de importância considerável para o desenvolvimento da teoria do cálculo integral fraccionário. Por seu lado, Liouville (1822-1837) estudou, explicitamente, várias questões nomeadamente a definição e o cálculo de DF 's para valores complexos de α , a sua aplicação a certos tipos de equações diferenciais lineares ordinárias, o efeito de uma mudança de variável no cálculo de DIF 's e a definição de uma DF como o limite do quociente $D^\alpha {}_h f / h^\alpha$, onde $D^\alpha {}_h f$ é uma diferença de ordem fraccionária. Riemann (1847), Holmgren (1865-1867) e Letnikov (1868) tiveram, também, papéis de relevo no prosseguimento da teoria. Entre outros resultados, Holmgren considerou, pela primeira vez, a derivação e a integração fraccionárias como operações inversas e generalizou a expressão de $d^\alpha (u \cdot v) / dx^\alpha$. No tocante a Letnikov, este desenvolveu a DF como limite da expressão $\lim_{h \rightarrow 0} D^\alpha {}_h f / h^\alpha$, demonstrou que as expressões propostas por Liouville e Riemann estavam de acordo com esta definição e generalizou a teoria dos DIF 's para valores complexos. Mais próximo dos nossos dias, são de referir numerosas contribuições tais como as de Hadamard (1892), Weyl (1917) e Marchaud (1927), que têm vindo a ampliar o âmbito desta teoria.

Contudo, apesar do trabalho teórico que foi desenvolvido nesta área, durante um largo período a aplicação do CF em aplicações não foi considerada. Nos últimos anos, o avanço no estudo da teoria do caos revelou profundas relações com o CF , motivando um renascer do interesse nesta área científica.

Os aspectos básicos da teoria do CF e o estudo das suas propriedades é discutido nas referências [61, 80, 82, 56] enquanto resultados de investigação podem ser encontrados em [64, 65, 79, 60, 8, 81, 26, 86]. No que respeita a aplicações do CF devem ser mencionadas os estudos sobre viscoelasticidade [5, 78, 6, 33, 71, 34, 4, 47, 24, 14, 25, 48, 22, 37, 29, 55, 1, 67], caos/fractais [27, 70, 63, 21], biologia [59], electrónica [54], processamento de sinal [45, 46, 88], identificação de sistemas [51], difusão e propagação de ondas [50, 53, 52, 68], percolação [66], modelação e identificação [69]. Estes trabalhos estão ainda a dar os primeiros passos e, conseqüentemente, muitos aspectos requerem ainda uma investigação mais detalhada.

2.3.2. Derivadas e Integrais Fraccionários

Nesta sub-secção são desenvolvidas várias representações de derivadas e integrais fraccionários ($DIFs$), isto é, de derivadas e integrais de ordem real arbitrária. Muitas das expressões relativas às $DIFs$ resultam "naturalmente" do cálculo clássico das derivadas e integrais de ordem inteira. Assim, sempre que possível será apresentado em primeiro lugar o resultado de derivadas e integrais múltiplos ordinários e, de seguida, a correspondente expressão para as derivadas e os integrais de ordem arbitrária.

Desde a fundação do cálculo diferencial, a generalização do conceito de derivada e integral para uma ordem α não inteira, tem sido objecto de várias abordagens. Devido a isso há várias definições de DIF (Tabela 2.1) que, na realidade, são equivalentes. Todavia, sob o ponto de vista da aplicação à teoria dos sistemas algumas das definições mostram-se mais atractivas ³.

³A definição e algumas propriedades da função Γ são apresentadas no Apêndice A

Tabela 2.1: Definições para as *DIFs*.

Liouville	$(I_c^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < +\infty$ $(D_c^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad -\infty < x < +\infty$
Riemann-Liouville	$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad a < x$ $(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad a < x$
Hadamard	$(I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t[\ln(t/x)]^{1-\alpha}} dt, \quad x > 0, \quad a > 0$ $(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{t[\ln(x/t)]^{1+\alpha}} dt$
Grünwald-Letnikov	$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{h \rightarrow +0} h^\alpha \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} \frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(j+1)} \varphi(x-jh)$
Caputo	$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & m = \alpha \end{cases}$
Chen	$(I_c^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x \varphi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad x > c$ $(D_c^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_c^x f(t) (x-t)^{-\alpha} dt, \quad x > c$
Weyl	${}_x W_\infty^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad Re(\alpha) < 0, \quad x > 0$
Marchaud	$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt$
Fourier	$F\{I_\pm^\alpha \varphi\} = F\{\varphi\}/(\pm j\omega)^\alpha, \quad 0 < Re(\alpha) < 1$ $F\{D_\pm^\alpha \varphi\} = (\pm j\omega)^\alpha F\{\varphi\}, \quad Re(\alpha) \geq 0$
Laplace	$L\{I_{0+}^\alpha \varphi\} = L\{\varphi\}/s^\alpha, \quad Re(\alpha) > 0$ $L\{D_{0+}^\alpha \varphi\} = s^\alpha L\{\varphi\}, \quad Re(\alpha) \geq 0$

As definições apresentadas mostram que podem existir vários níveis de aplicação para cada uma. Assim, a fórmula de **Riemann-Liouville** (RL) é de aplicabilidade restrita na resolução de equações diferenciais fraccionárias que descrevem sistemas físicos. Isso deve-se ao facto de a derivada de *RL* levar à definição de condições iniciais sem uma

interpretação física associada. Por outro lado, como o integral utilizado na definição de **Weyl** é impróprio, a função $f(t)$ é normalmente sujeita a muitas restrições e o seu uso é bastante limitado. A fórmula de **Grünwald-Letnikov** (GL) induz a ideia da generalização da derivada e do integral de ordem inteira n a valores reais (ou mesmo complexos) arbitrários de ordem α a partir das fórmulas clássicas de ordem inteira..

Em contrapartida, a definição de **Caputo** (C) permite a formulação das convencionais condições iniciais com interpretação física, tais como (considerando o limite inferior $t = a$) $D_y|_{x=a}$, $D_y^2|_{x=a}$, etc. (*i.e.* posição, velocidade, etc.). Considerando que os modelos matemáticos de sistemas físicos levam à formulação de equações diferenciais de ordem fraccionária (o que vem sendo cada vez mais frequente em certos domínios), esta característica torna a definição de Caputo particularmente útil, pois permite a introdução das condições iniciais.

2.3.3. Interpretação geométrica e física dos integrais e derivadas fraccionárias

Os integrais e derivadas de ordem inteira têm um significado físico e geométrico rigoroso o que simplifica a sua aplicação na resolução de problemas em vários campos da ciência. Contudo, no caso dos integrais e derivadas fraccionárias esse significado não é tão compreendido e de fácil aplicação.

Há vários trabalhos no sentido de tentar clarificar a interpretação física e geométrica dos integrais e derivadas de ordem fraccionária, sendo de salientar os estudos de Podlubny, Tatom e Moshwfi-Torbati e Hammond.

Os integrais e derivadas de ordem fraccionária são generalizações das noções dos integrais derivadas de ordem inteira e, conseqüentemente, incluem a ordem n (n é um inteiro) como um caso particular. Por isso, seria ideal haver também uma interpretação física e geométrica de operadores de ordem fraccionária que permitissem, também, uma ligação como as clássicas interpretações dos respectivos operadores de ordem inteira.

A maior parte dos trabalhos publicados estabelecem relações entre os integrais e as derivadas de ordem fraccionária e a geometria fractal na perspectiva do que será apresentado na secção 2.3.9 [Tatom, Moshwfi-Torbati e Hammond]. Uma outra alternativa de interpretação é proposta por Podlubny, que se apresenta de seguida.

Considere-se o integral de ordem α definido por Riemman-Liouville

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.69)$$

e escreva-se na forma:

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad (2.70)$$

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} [t^\alpha - (t - \tau)^\alpha] \quad (2.71)$$

Considere-se agora o integral definido em (2.70) para um determinado valor fixo de t e um referencial com três eixos τ , g e f . No plano horizontal (τ, g) traça-se o gráfico da função $g_t(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq t$. À medida que se traça a curva vai-se obtendo um "muro" de altura variável com $f(\tau)$, sendo a parte superior do "muro" uma linha tridimensional $(\tau, g_t(\tau), f(\tau))$, $0 \leq \tau \leq t$.

Projectando este "muro" nas duas superfícies verticais, conclui-se que:

- a área da projecção sobre o plano (τ, f) corresponde ao valor do integral clássico de ordem inteira:

$${}_0I_1^1(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.72)$$

- a área da projecção sobre o plano (g, f) corresponde ao valor do integral (2.70), ou, o que é o mesmo, ao valor do integral de ordem fraccionária definido em (2.69).

Por outras palavras, o "muro" produziu duas "sombras". A sombra na "parede" (τ, f) , é a bem conhecida *área abaixo da curva* $f(\tau)$, que consiste na usual interpretação geométrica do integral (2.72). A "sombra" na "parede" (g, f) é a interpretação geométrica do integral de ordem fraccionária definido em (2.69) para um valor fixo de t .

Obviamente para $g_t(\tau) = \tau$ ambas as "sombras" são iguais. Isto mostra que, sob um ponto de vista geométrico, o integral definido clássico é um caso particular do integral de ordem fraccionária de Riemman-Liouville .

2.3.4. Tabela de Derivadas e Integrais Fraccionários

Baseada nas definições anteriores é possível calcular as derivadas e os integrais fraccionários de diversas funções elementares.

Tabela 2.2: Tabela de derivadas e integrais de diversas funções elementares, usando a definição de Weyl.

$f(x)$	${}_x W_\infty^{-\alpha}$
e^{-ax}	$a^{-\alpha} e^{-ax}, Re(\alpha) > 0, Re(a) > 0$
$\cos(ax)$	$a^{-\alpha} \cos\left(ax + \frac{1}{2}\pi\alpha\right), 0 < Re(\alpha) < 1, a > 0$
$\sin(ax)$	$a^{-\alpha} \sin\left(ax + \frac{1}{2}\pi\alpha\right), 0 < Re(\alpha) < 1, a > 0$
$x^{-\mu}$	$\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)} x^{\alpha-\mu}, 0 < Re(\alpha) < Re(\mu), x > 0$

Tabela 2.3: Tabela de derivadas e integrais de diversas funções elementares, usando a definição de Riemann-Liouville.

$f(t)$	${}_{-\infty} D_t^\alpha, t > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
$(t-a)^\lambda$	$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} (t-a)^{\lambda-\alpha}, \lambda > -1$
t^λ	$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, \lambda > -1$
$e^{\lambda t}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda t}, \lambda > 0$
$e^{\lambda t + \mu}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda t + \mu}, \lambda > 0$
$\sin(\lambda t)$	$\lambda^\alpha \sin\left(\lambda t + \frac{\pi\alpha}{2}\right), \lambda > 0, \alpha > -1$
$\cos(\lambda t)$	$\lambda^\alpha \cos\left(\lambda t + \frac{\pi\alpha}{2}\right), \lambda > 0, \alpha > -1$
$e^{\lambda t} \sin(\mu t)$	$r^\alpha e^{\lambda t} \sin(\mu t + \alpha\varphi)$ $r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \tan\varphi = \frac{\mu}{\lambda}, \lambda > 0, \mu > 0$
$e^{\lambda t} \cos(\mu t)$	$r^\alpha e^{\lambda t} \cos(\mu t + \alpha\varphi)$ $r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \tan\varphi = \frac{\mu}{\lambda}, \lambda > 0, \mu > 0$

As Tabelas 2.2 e 2.3 apresentam as derivadas e integrais fraccionários de funções elementares usando, respectivamente, as definições de Weyl e de Reimann-Liouville. Para efeitos de simplificação considera-se que todos os valores são reais e que $t > 0$. A ordem α dos operadores fraccionários é considerada arbitrária (positiva, negativa ou zero) excepto indicação explícita do contrário. As constantes a, λ, μ são consideradas sem restrições salvo indicação em contrário.

2.3.5. Propriedades das Derivadas e Integrais Fraccionários

As definições de derivadas e integrais fraccionários apresentadas em 2.3.4 possuem as seguintes propriedades, onde α e β são dois valores arbitrários (positivos, negativos ou zero):

$$\begin{aligned} D^0 f(t) &= f(t) \\ D^\alpha D^{-\alpha} f(t) &= f(t) \\ D^\alpha [D^\beta f(t)] &= D^\beta [D^\alpha f(t)] = D^{\alpha+\beta} f(t) \\ D^n [D^\alpha f(t)] &= D^\alpha [D^n f(t)] = D^{n+\alpha} f(t), n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.73)$$

As propriedades apresentadas nem sempre se verificam para todas as definições. Portanto, deve-se ter em atenção a definição utilizada para a derivada e integral fraccionário. De seguida são apresentadas outras propriedades consideradas importantes para a análise do *CF*, e que resultam (geralmente) na generalização das propriedades do cálculo inteiro (*CI*) a uma ordem fraccionária.

- **Linearidade**

De forma similar à diferenciação de ordem inteira, a diferenciação fraccionária é uma operação linear:

$$D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t) \quad (2.74)$$

onde D^α representa qualquer uma das definições de diferenciação fraccionária dadas neste texto.

- **Regra de Leibniz**

A regra de Leibniz para a derivada de ordem inteira n do produto de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é dada por:

$$D^n [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} f(t) D^k g(t) \quad (2.75)$$

Generalizando a expressão (2.75) para um valor α de ordem arbitrária, a regra de Leibniz para a diferenciação fraccionária toma a forma:

$$D^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^{\alpha-k} f(t) D^k g(t) \quad (2.76)$$

A regra de Leibniz dada por (2.76) é especialmente útil para a determinação de derivadas fraccionárias do produto de uma função que é um polinómio com uma outra função em que a sua derivada fraccionária é conhecida.

2.3.6. Diferenças de Ordem Fraccionária

Existem actualmente várias obras que abordam o cálculo de derivadas fraccionárias [82, 56], onde a ordem α do operador $D^\alpha = \left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha$ é estendida para valores arbitrários (reais ou complexos). No entanto, o mesmo já não se passa com o cálculo de diferenças finitas fraccionárias, $\Delta^\alpha f$, para o qual existem poucas referências [16].

No entanto, sabe-se que existe uma similaridade muito grande entre as fórmulas do cálculo diferencial, envolvendo o operador $D = \frac{d}{dt}$, e as fórmulas do cálculo das diferenças finitas, envolvendo o operador Δ , o qual pode ser definido por $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$.

Consideremos a sequência de diferenças inteira seguinte:

$$\begin{aligned} \Delta f(t) &= f(t+1) - f(t) \\ \Delta^2 f(t) &= f(t+2) - 2f(t+1) + f(t) \\ \Delta^3 f(t) &= f(t+3) - 3f(t+2) + 3f(t+1) - f(t) \\ &\vdots \\ \Delta^n f(t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t+n-k) \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde n é um inteiro positivo ou zero.

A equação (2.77) sugere a generalização do operador às diferenças $\Delta^\alpha f(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t+\alpha-k) \\ \binom{\alpha}{k} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \end{aligned} \quad (2.78)$$

para valores de α arbitrários (racionais, irracionais ou complexos). Na tabela 2.4 estão representadas as diferenças fraccionárias de algumas funções elementares.

Tabela 2.4: Diferenças fraccionárias de algumas funções.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{\Delta^\alpha f(t)}$
1	$0, Re(\alpha) > 0$
a^t	$a^t(a-1)^\alpha, a > 1$
$t^{(p)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-p+1)}$	$\frac{\sin(\pi t)\Gamma(\alpha-p)t^{(p-\alpha)}}{\sin(\pi(t+\alpha))\Gamma(-p)}, Re(\alpha-p) > 0$
$\frac{\Gamma(a-t)}{\Gamma(b-t)}$	$\frac{\Gamma(b-a+\alpha)\Gamma(a-\alpha-t)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b-t)}, Re(b-a+\alpha) > 0$

Expressões similares às estudadas para o cálculo clássico das diferenças finitas, podem ser deduzidas para o caso do cálculo das diferenças fraccionárias. Por exemplo, a regra de Leibniz para a diferença finita do produto de duas funções $f(t)$ e $g(t)$:

$$\Delta^N f(t)g(t) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \Delta^{N-k} f(t) \Delta^k g(t+N-k), N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

pode ser generalizado para a obtenção da regra de Leibniz para as diferenças fraccionárias:

$$\Delta^\alpha f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \Delta^{\alpha-k} f(t) \Delta^k g(t+\alpha-k) \quad (2.80)$$

onde α é um valor arbitrário.

Neste texto, foi apenas dada uma de várias possíveis definições para $\Delta^\alpha f(t)$. Seria interessante, por exemplo, estudar o cálculo fraccionário considerando um incremento arbitrário h , isto é, onde $\Delta f(t) = f(t+h) - f(t)$, e analisar o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha f(t)}{h^\alpha}$ bem como a sua relação com $D^\alpha f(t)$ (ver a definição de derivada fraccionária de Grünwald-Letnikov).

2.3.7. Transformada de Laplace de Derivadas Fraccionárias

A Transformada de Laplace (TL) revela-se uma ferramenta extremamente útil na análise e projecto de sistemas de controlo, devido à transformação de operações como

a integração e a diferenciação (entre outras operações) em t em operações algébricas em s . Nesta perspectiva, a TL é também importante na análise e projecto de sistemas fraccionários.

A TL de $f(t)$, denominada $L\{f(t)\} = F(s)$, é uma função de variável complexa $s = \sigma + j\omega$, onde:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2.81)$$

A função original $f(t)$ pode ser obtida a partir de $F(s)$ através da transformada de Laplace inversa L^{-1} :

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2.82)$$

onde c é um valor seleccionado para a direita de todas as singularidades de $F(s)$ no plano s .

A TL da derivada ou integral de ordem inteira n da função $f(t)$ é dada por:

$$L\{D^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} f(0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.83)$$

De um modo geral podemos generalizar (2.83) a uma ordem α arbitrária do seguinte modo:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0), \forall \alpha \quad (2.84)$$

Contudo, esta expressão sofre ligeiras alterações conforme a definição utilizada para a derivada fraccionária. Assim iremos ver a seguir a TL para as definições de Riemann-Liouville (RL), Caputo (C) e Grünwald-Letnikov (GL).

A TL para a derivada fraccionária de RL de ordem $\alpha > 0$ é:

$$L \{ {}^{RL}D^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(t) |_{t=0}, n-1 < \alpha < n \quad (2.85)$$

Dada a ausência de uma interpretação física dos valores limite das derivadas fraccionárias para $t = 0$, a sua aplicação prática é muito restrita.

A *TL* para a derivada fraccionária de C é dada por:

$$L \{ {}^C D^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), n-1 < \alpha < n \quad (2.86)$$

Como se verifica na expressão (2.84) intervêm os valores da função $f(t)$ para $t = 0$. Isto permite a interpretação das convencionais condições iniciais, expressas em termos de derivadas de ordem inteira: $f(0) = f_0$ (posição inicial), $f'(0) = f_1$ (velocidade inicial), $f''(0) = f_2$ (aceleração inicial), \dots . Esta característica torna esta definição particularmente útil para a resolução de problemas reais caracterizados por equações diferenciais fraccionárias lineares de coeficientes constantes.

A *TL* para a derivada fraccionária de GL é dada por:

$$L \{ {}^{GL}D^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s), 0 < \alpha < 1 \quad (2.87)$$

A *TL* para o integral fraccionário (das definições de RL, C e GL) pode ser obtido omitindo, nas fórmulas anteriores, a segunda parte (somatório) do lado direito das equações de derivadas fraccionárias.

De notar que o operador L permite a passagem do domínio dos tempos para o domínio das frequências (plano s), ou seja realizar neste domínio toda a análise e projecto de sistemas, e de seguida voltar ao domínio dos tempos (operador L^{-1}) para verificar o seu comportamento.

2.3.8. Transformada de Fourier de Derivadas Fraccionárias

Uma ferramenta também muito útil para a análise de sistemas no domínio das frequências é a **Transformada de Fourier** (*TF*), pelo que igualmente se torna importante nos

sistemas fraccionários.

A *TF*, $F(\omega)$, da função contínua $f(t)$, denominada $F\{f(t)\} = F(\omega)$, é definida como sendo a função em frequência:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (2.88)$$

A função $f(t)$ pode ser determinada a partir de $F(\omega)$ aplicando a transformada de Fourier inversa F^{-1} :

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (2.89)$$

A *TF* da derivada ou integral de ordem inteira n da função $f(t)$ é dada por:

$$F\{D^n f(t)\} = (-j\omega)^n F(\omega), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.90)$$

Generalizando a expressão (2.90) para valores de α de ordem arbitrária, obtemos a definição geral:

$$F\{D^\alpha f(t)\} = (-j\omega)^\alpha F(\omega), \quad \forall \alpha \quad (2.91)$$

Assim, a *TF* do integral e da derivada fraccionária será dada por:

$$\begin{aligned} F\{D^{-\alpha} f(t)\} &= (j\omega)^{-\alpha} F(\omega) \\ F\{D^\alpha f(t)\} &= (-j\omega)^\alpha F(\omega) \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde D representa qualquer uma das definições referidas para o caso em que estas coincidem, isto é, ${}^{RL}D^{-\alpha} = {}^C D^{-\alpha} = {}^{GL}D^{-\alpha}$ para $a = -\infty$.

2.3.9. Fractais e Derivadas Fraccionárias

A geometria a que estamos habituados (designada de *geometria Euclidiana*) lida com objectos de dimensões inteiras. Por exemplo, as linhas e as curvas têm dimensão um, as figuras planas (quadrados, círculos, etc.) dimensão dois e os sólidos (cubos, esferas, etc.) têm dimensão três.

No entanto, sabe-se que muitos dos fenómenos naturais são melhor descritos através de uma dimensão não-inteira, a que Mandelbrot designou de *dimensão fractal*. Assim, enquanto uma linha recta tem uma dimensão $dim = 1$, uma curva fractal terá, por exemplo, uma dimensão $1 < dim < 2$.

B. Mandelbrot (1975) desenvolveu uma nova geometria para modelizar características irregulares de fenómenos (naturais) físicos – a ***geometria fractal***. Estas formas fractais possuem a propriedade da *auto-similaridade*, isto é: à medida que examinamos partes cada vez mais pequenas da forma fractal (por ampliação), a forma resultante é sempre similar à original. Isto não acontece com as formas Euclidianas convencionais.

A teoria dos fractais desenvolvida por Mandelbrot terá conhecido o seu início 1965, quando este investigava o comprimento da costa Inglesa. Todavia, foi Richardson (1953) que a partir do estudo da variação do comprimento aproximado $L(\eta)$, de diferentes costas e fronteiras terrestres em função de um passo de medida η , enunciou a fórmula, que ficou chamada pela lei de Richardson:

$$L(\eta) = L_0^{dim} \eta^{1-dim} \quad (2.93)$$

em que L_0 é o comprimento inicial (*i.e.* quando $\eta = L_0$) e dim a dimensão fractal.

Aplicando o logaritmo decimal à equação (2.93), obtemos a expressão geral da dimensão fractal dim :

$$dim = \frac{\log L(\eta) - \log(L_0)}{\log \eta - \log(L_0)} \quad (2.94)$$

Para o caso particular de um comprimento unitário $L_0 = 1$, vem:

$$dim = 1 - \frac{\log L(\eta)}{\log(\eta)} \tag{2.95}$$

Todavia, a expressão mais usual para a **dimensão fractal (dim)** é escrita na forma:

$$dim = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} \tag{2.96}$$

em que N designa o número de segmentos idênticos e r o seu comprimento. A dimensão fractal dim quantifica a auto-similaridade do fractal.

De seguida são mostrados dois exemplos típicos de estruturas fractais em que podemos confirmar a propriedade da auto-similaridade: o conjunto de Cantor e a curva de Koch.

2.3.9.1. Conjunto de Cantor Ternário

Um método muito simples de construir um fractal com dimensão $0 < dim < 1$ está ilustrado na Fig. 2.1. Esta estrutura é designada de conjunto de Cantor ternário.

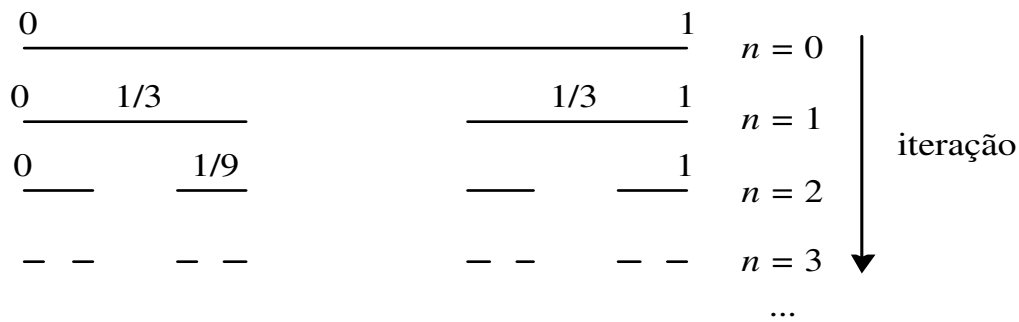
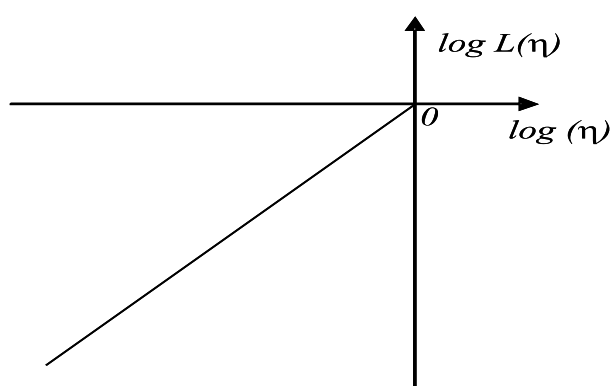


Figura 2.1: Construção dos quatro primeiros passos do conjunto de Cantor. As iterações estão designadas por n . A dimensão fractal deste conjunto é $dim = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

O conjunto de Cantor é construído a partir de um segmento de recta de comprimento $L \in [0, 1]$ (iteração $n = 0$). Divide-se o segmento em três partes iguais e remove-se o $\frac{1}{3}$ do meio ($n = 1$). Para cada um dos dois segmentos resultantes repete-se o processo e assim sucessivamente. Verifica-se que se trata de um *processo recursivo*. As características deste conjunto de Cantor estão ilustradas na tabela 2.5 e na Fig. 2.2.

Tabela 2.5: Valores do conjunto de Cantor.

Iteração n	Passo de medida η	Comprimento $L(\eta)$	Log η	Log $L(\eta)$
0	1	1	0	0
1	1/3	2/3	-0.477	-0.176
2	1/9	4/9	-0.954	-0.352
3	1/27	8/27	-1.431	-0.528

Figura 2.2: Gráfico de $\log(L(\eta))$ vs $\log(\eta)$ do conjunto de Cantor.

O cálculo da dimensão fractal desta simples construção através de (2.97), considerando $\eta = \frac{1}{3}$ resulta:

$$dim = 1 - \frac{\log L(\frac{1}{3})}{\log(\frac{1}{3})} = 0.631 \quad (2.97)$$

2.3.9.2. Curva de Von Koch

Um outro fractal de construção também simples é o chamado de curva de Von Kock e está ilustrado na Fig. 2.3

O conjunto de Koch é construído a partir do intervalo $L \in [0, 1]$ (iteração $n = 0$). Divide-se o intervalo em três partes iguais e remove-se o $\frac{1}{3}$ do meio substituindo-o por um triângulo equilátero ($n = 1$). Para cada um dos segmentos resultantes repete-se o processo e assim sucessivamente. Verifica-se novamente que se trata de um *processo recursivo*. As características da curva de Koch estão ilustradas na tabela 2.6 e na Fig. 2.4.

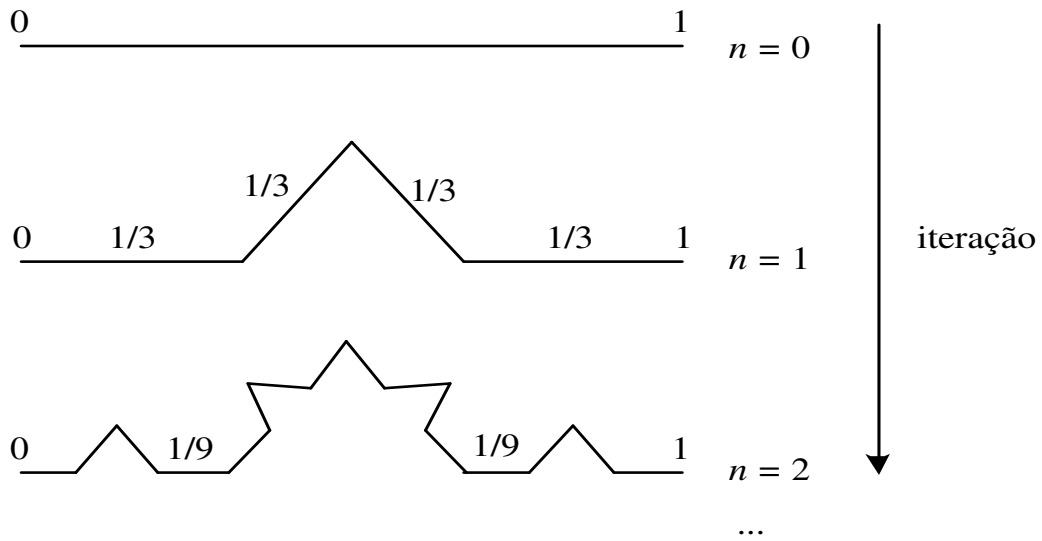


Figura 2.3: Construção dos três primeiros passos da curva de Koch. As iterações são designadas por n .

Tabela 2.6: Valores do conjunto de Koch.

Iteração n	Passo de medida η	Comprimento $L(\eta)$	$\log \eta$	$\log L(\eta)$
0	1	1	0	0
1	1/3	4/3	-0.477	0.125
2	1/9	16/9	-0.954	0.249
3	1/27	64/27	-1.431	0.374

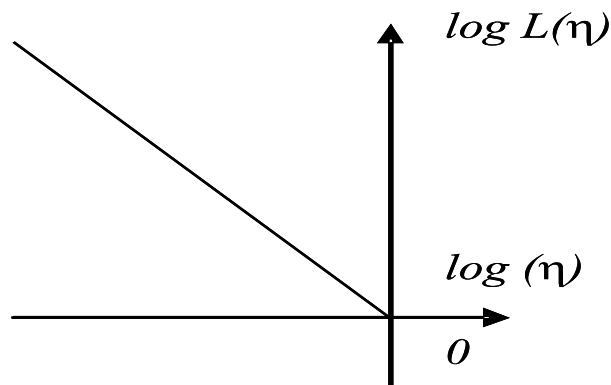


Figura 2.4: Gráfico de $\log(L(\eta))$ vs $\log(\eta)$ na curva de Koch.

O cálculo da dimensão fractal da curva de Koch considerando por exemplo $\eta = \frac{1}{3}$ vem:

$$dim = 1 - \frac{\log L(\frac{1}{3})}{\log(\frac{1}{3})} = 1.262 \quad (2.98)$$

Uma outra variante da construção de Koch, chamada de "flocos de neve" de Koch ou "ilha" de Koch, está ilustrada na Fig. 2.5. Por seu lado, na Fig. 2.6, está representada outra muito conhecida estrutura fractal designada de conjunto "entrançado" de Sierpinski.

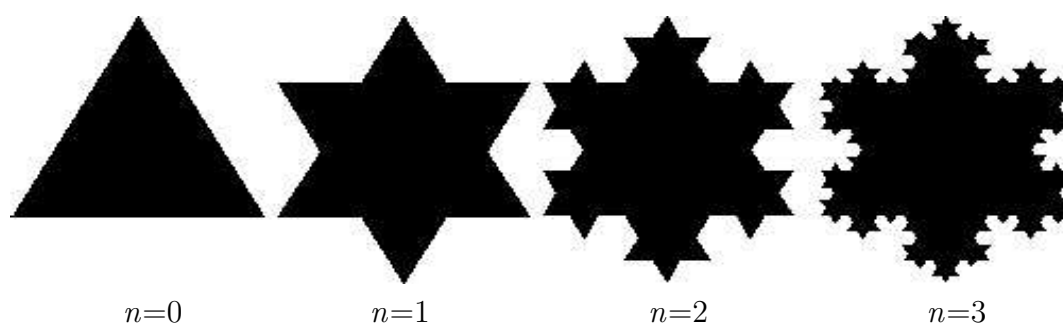


Figura 2.5: Construção do "flocos de neve" de Koch. Dimensão fractal $dim = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

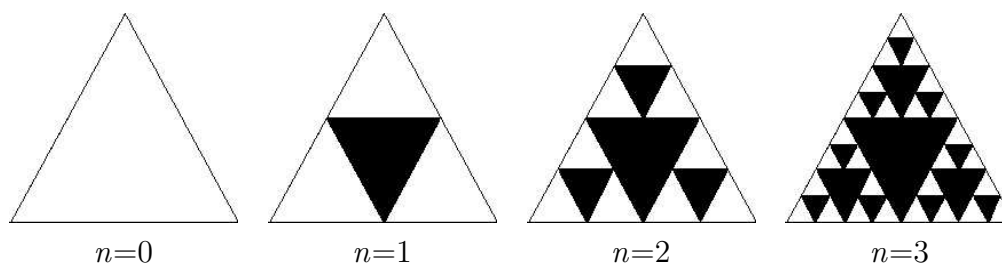


Figura 2.6: Construção do triângulo de Sierpinski. Dimensão fractal $dim = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

A geometria fractal permite a descrição e a modelização matemática de muitas das formas complexas existentes na natureza. Fenómenos naturais como as costas terrestres, as montanhas e as nuvens podem ser quantificados por uma dimensão fractal, resultante da sua auto-similaridade natural. A teoria dos fractais permitiu o desenvolvimento de praticamente todas as áreas científicas, nomeadamente a matemática, a ciência dos computadores, a física, a química, a meteorologia, a cosmologia, a biologia, a economia, as ciências sociais, a mecânica e um número infindável de aplicações.

Sabe-se que existe uma relação entre a fractalidade (*i.e* dimensão associada às estruturas geométricas fractais) e as derivadas fraccionárias. Note-se que a fractalidade

depende da geometria, ao passo que as derivadas fraccionárias dependem da dinâmica do sistema. Todavia, havendo uma correlação entre a geometria e a dinâmica, pode-se relacioná-las, especialmente quando a geometria condiciona um fenómeno físico regido por uma equação diferencial. Nesse caso a geometria fractal conduzirá então a uma equação diferencial de ordem não-inteira. O recíproco, em que a dinâmica condiciona a geometria, é também verdade. Dada a existência desta interdependência, as derivadas fraccionárias são utilizadas para modelizar inúmeros fenómenos físicos. Podemos citar vários exemplos tais como:

- Na "interface" fractal entre um metal e um meio iónico, a corrente é proporcional à derivada não-inteira da tensão (física-química);
- A corrente que atravessa um condensador é proporcional à derivada não-inteira da tensão se, pelo menos, uma das armaduras é rugosa (electricidade);
- Na relaxação da água sobre um dique, o débito é proporcional à derivada não-inteira da pressão dinâmica à "interface" água-dique se a estrutura interna do dique é porosa (mecânica);

Existe pois uma ligação estreita entre estes dois conceitos, especialmente no estabelecimento de uma dimensão fractal a uma ordem de derivação não-inteira.

2.3.9.3. Modelo Fractal de uma "Interface" Irregular

Neste exemplo vamos considerar a transferência de carga eléctrica entre duas substâncias diferentes: um eléctrodo de metal e um electrolítico. A corrente eléctrica, na sua passagem, encontra uma resistência (R) e uma capacidade (C) através da superfície de separação (*interface*) entre os dois meios. Devido ao facto das superfícies de contacto apresentarem uma certa rugosidade, o circuito RC correspondente não dá uma descrição adequada da dinâmica do processo.

A Fig. 2.7 representa um corte da secção do modelo da *interface*. Repare-se que esta estrutura é auto-similar. Aliás, não é mais do que a representação do conjunto de Cantor ternário.

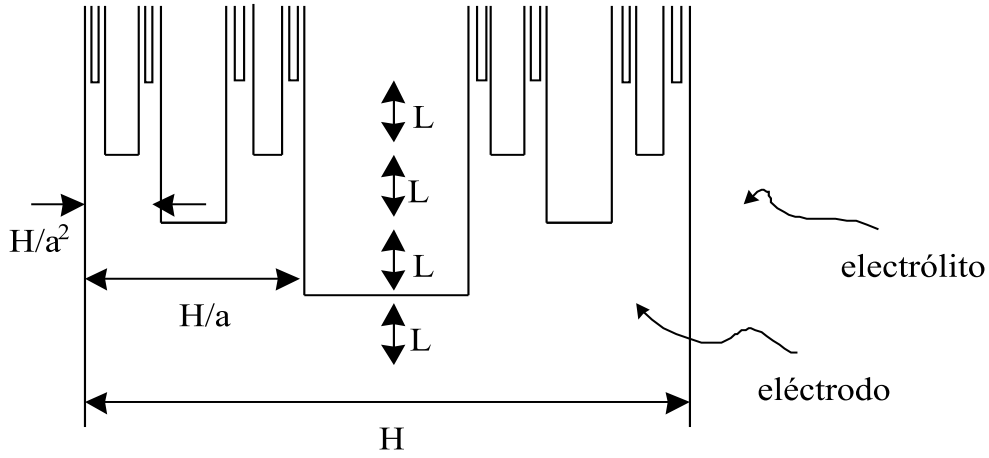


Figura 2.7: Barra de cantor (ternária).

Como $R = \rho \frac{L}{S}$, a resistência de cada segmento, onde k é a altura da barra, vem:

$$R_1 = \rho \frac{L}{kH}; \quad R_2 = \rho \frac{L}{kH/a}; \quad R_3 = \rho \frac{L}{kH/a^2} \dots \quad (2.99)$$

ou seja ($i = 1, 2, \dots$):

$$R_{i+1} = R_i a \quad (2.100)$$

Por outro lado em cada um dos níveis da barra a capacidade C entre o eléctrodo e a terra é constante, pois o comprimento das faces laterais mantém-se constante. Logo resulta:

$$C_{i+1} = C_i \quad (2.101)$$

Assim, a *interface* pode ser modelizada por um circuito eléctrico recursivo equivalente conforme o representado na Fig. 2.8.

A impedância $Z(j\omega)$ do circuito recursivo é dada por:

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{aR + \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{a^2 R + \dots}}}} \quad (2.102)$$

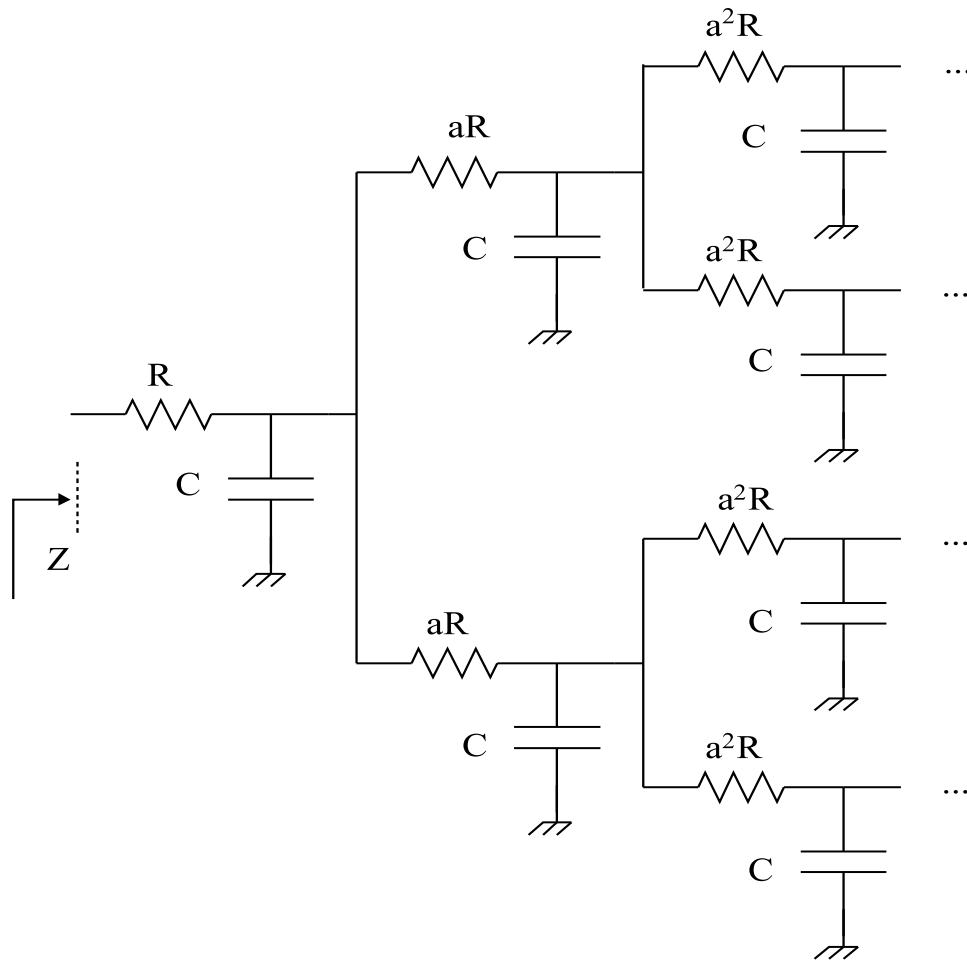


Figura 2.8: Circuito eléctrico recursivo da barra de Cantor.

A expressão de $Z(j\omega)$ obedece à fórmula recursiva:

$$Z\left(j\frac{\omega}{a}\right) = \frac{a}{2}Z(j\omega) \quad (2.103)$$

com solução (ψ é um factor de escala):

$$Z(j\omega) = \psi(j\omega)^{-m}, \quad m = 1 - \frac{\ln 2}{\ln a} \quad (2.104)$$

A ordem fraccionária m da resposta em frequência é devida à natureza recursiva do circuito. Note-se a sua relação com a dimensão fractal. Genericamente, para N ramos temos:

$$m = 1 - \frac{\ln N}{\ln a} \quad (2.105)$$

2.3.10. Computação Numérica de Derivadas Fraccionárias

As derivadas de ordem fraccionária podem ser calculadas de um modo simples, através da, já referida, definição de Grünwald-Letnikov (*GL*) (secção 2.2). Esta aproximação é validada pelo facto de que, para uma gama variada de funções, as definições de Riemann-Liouville (*RL*) e de *GL* serem equivalentes [76]. Este facto permite-nos usar a definição de *RL*, durante a formulação do problema, e regressar à definição de *GL*, para obter a solução numérica.

2.3.10.1. Cálculo Numérico das Derivadas Fraccionárias

A aproximação "mais atraente" para o cálculo de derivadas de ordem fraccionária é, sem dúvida, a definição de Grünwald-Letnikov:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_a \Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha} \\ {}_a \Delta_h^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \end{aligned} \quad (2.106)$$

onde $\lfloor x \rfloor$ significa a parte inteira de x .

Deste modo, a derivada (ou o integral) de ordem fraccionária pode ser calculada usando a seguinte aproximação:

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx {}_a \Delta_h^\alpha f(t) \quad (2.107)$$

Esta aproximação leva-nos à seguinte definição para o cálculo numérico da derivada (ou integral) de ordem fraccionária α :

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha f(t) &\approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \\
\binom{\alpha}{k} &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

onde Γ é a função Gama e h o incremento no tempo.

2.3.10.1.1. Princípio da Memória Curta

Da análise da expressão (2.108) verificamos que para $t \gg a$ o número de termos da aproximação da derivada fraccionária se torna muito elevado. Verificamos também com base nos coeficientes da aproximação, que para t elevado, a "história" do comportamento da função $f(t)$, perto do "ponto inicial" $t = a$, pode ser desprezado sob certas condições [76]. Estas observações levaram à formulação por parte de I. Podlubny do chamado **princípio da "memória curta"**, que significa apenas ter em conta o "passado recente" do comportamento de $f(t)$. Isto é, considerar apenas o intervalo $[t - L, t]$, onde L é o "comprimento de memória". Assim, temos:

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx {}_{t-L} D_t^\alpha f(t), \quad t > a + L \tag{2.109}$$

Por outras palavras, e de acordo com o princípio da "memória curta", a derivada fraccionária com o limite inferior a é aproximada pela derivada fraccionária de limite inferior deslocado de $t - L$. Devido a esta aproximação, o número de termos da aproximação (2.108) nunca é superior à parte inteira de $\frac{L}{h}$.

É claro que este tipo de simplificação gera alguma imprecisão no resultado. Se considerarmos $f(t) \leq M$ para $a \leq t \leq b$, o erro $\Delta(t)$ introduzido pelo princípio da "memória curta" pode ser estimado da seguinte forma [76]:

$$\Delta(t) = |{}_a D_t^\alpha f(t) - {}_{t-L} D_t^\alpha f(t)| \leq \frac{ML^\alpha}{|\Gamma(1 - \alpha)|}, \quad a + L \leq t \leq b \tag{2.110}$$

Do mesmo modo, tendo pré-definido um erro máximo ε , o "comprimento de memória" L pode ser determinado por:

$$\Delta(t) \leq \varepsilon, a + L \leq t \leq b \text{ se } L \geq \left(\frac{M}{\varepsilon |\Gamma(1 - \alpha)|} \right)^{1/\alpha} \quad (2.111)$$

A aplicação do princípio da "memória curta" reduz o "custo" da computação e minimiza os efeitos da acumulação dos erros de arredondamento.

2.3.10.1.2. Ordem de Aproximação

As diferenças finitas podem ser usadas para aproximar derivadas de ordem inteira. Por exemplo, para um tempo t fixo e um passo h pequeno, a primeira derivada pode ser aproximada através de $y(t)$ e $y(t - h)$ por:

$$y'(t) \approx \tilde{y}'(t) = \frac{y(t) - y(t - h)}{h} \quad (2.112)$$

que não é mais do que a definição clássica de primeira derivada omitindo a operação $\lim_{h \rightarrow 0}$. A fórmula (2.112) fornece a aproximação de primeira ordem de $y'(t)$.

A aproximação às diferenças finitas fraccionárias de primeira ordem da derivada de ordem α pode ser escrita da forma (com $a = 0$ e $t = nh$):

$${}_0\tilde{D}_t^\alpha f(t) = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^n \zeta_k^{(\alpha)} f(t - kh) \quad (2.113)$$

$$\zeta_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} \quad (2.114)$$

sendo $\zeta_k^{(\alpha)}$ os coeficientes e $k = 0, 1, 2, \dots, n$, com $n = \lfloor \frac{t}{h} \rfloor$.

A aproximação utilizada em (2.113) para a derivada fraccionária fornece, como demonstra Podlubny [76], a aproximação de primeira ordem para a derivada de ordem α . De facto, se uma função $f(t)$ pode ser desenvolvida por um série de potências:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m \quad (2.115)$$

então a aproximação às diferenças fraccionárias (2.113) fornece a aproximação de primeira ordem para a derivada fraccionária de ordem α para qualquer ponto da região de convergência da série de potências [76].

2.3.10.1.3. Cálculo dos Coeficientes

Para a implementação do método das diferenças fraccionárias é necessário o cálculo dos coeficientes $\zeta_k^{(\alpha)}$ da derivada fraccionária:

$$\zeta_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.116)$$

onde α é a ordem da diferenciação fraccionária.

Os coeficientes $\zeta_k^{(\alpha)}$ podem ser calculados de duas formas. A primeira forma é baseada numa das propriedades dos coeficientes do binómio, em que estes seguem as seguintes relações recorrentes:

$$\zeta_0^{(\alpha)} = 1; \quad \zeta_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) \zeta_{k-1}^{(\alpha)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.117)$$

a qual é adequada para um valor de α fixo.

Contudo, quando necessitamos de encontrar um valor apropriado de α (como ocorre na identificação de sistemas), as relações recorrentes dadas por (2.117) não são as mais adequadas. Uma outra forma de determinar os coeficientes $\zeta_k^{(\alpha)}$ pode ser realizada usando a transformada de Fourier [76]:

$$\zeta_0^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} f_\alpha(t) e^{jkt} dt \quad (2.118)$$

$$f_\alpha(t) = (1 - e^{-jt})^\alpha$$

2.3.10.2. Solução Numérica de Equações Diferenciais Fraccionárias

A solução numérica de uma equação diferencial pode obter-se de um modo explícito, substituindo a derivada fraccionária da equação pela definição da aproximação das diferenças

finitas fraccionárias obtida na secção 2.8.1.

Como exemplo consideremos uma equação diferencial de ordem fraccionária definida por:

$${}_0D_t^\alpha y(t) + Ay(t) = f(t), \quad t > 0 \quad (2.119)$$

$$y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2.120)$$

onde $n - 1 < \alpha \leq n$. Para $0 < \alpha \leq 2$ esta equação é designada de *equação da relaxação-oscilação*.

Utilizando a aproximação de primeira ordem definida em (2.113), vem:

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^m \zeta_j^{(\alpha)} y_{m-j} + Ay_m = f_m, \quad y_0 = 0; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.121)$$

$$t_m = mh, \quad y_m = y(t_m), \quad f_m = f(t_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.122)$$

$$\zeta_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.123)$$

Assim, podemos definir o seguinte algoritmo para a solução numérica da equação (2.120):

$$\begin{aligned} y_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \\ y_m &= -Ah^\alpha y_{m-1} - \sum_{j=1}^m \zeta_j^{(\alpha)} y_{m-j} + h^\alpha f_m, \quad m = n, n + 1, \dots \end{aligned} \quad (2.124)$$

o qual é facilmente implementado por um programa de computação numérica.

2.3.11. Aplicação ao sistema de controlo

As aplicações referidas nesta secção dizem respeito somente à utilização das derivadas e integrais fraccionários no domínio do controlo automático de sistemas. Nesta ordem de

ideias, surgem duas abordagens que vêm sendo estudadas nos últimos anos. Uma é a abordagem que adopta o domínio das frequências. Sendo esta a primeira a ser estudada e com resultados práticos, está de certo modo já estabelecida. A outra, mais recente, é a abordagem que adopta o domínio dos tempos. Sendo que está ainda pouco desenvolvida, devido essencialmente à falta de métodos analíticos bem delineados para a sua análise, existem contudo alguns estudos efectuados neste domínio.

2.3.11.1. Domínio das Frequências

A aplicação das derivadas e integrais fraccionários ao controlo de sistemas adoptando o domínio das frequências deve-se ao trabalho pioneiro desenvolvido por Oustaloup. Este investigador utilizou controladores fraccionários, projectados pelos métodos da resposta em frequência, para provar que este tipo de algoritmos fornecem um desempenho superior ao exibido pelos controladores tradicionais (*i.e.* de ordem inteira), nomeadamente a os algoritmos clássicos do tipo *PID*.

Através da observação de um fenómeno natural robusto, Oustaloup [66] considerou a relaxação de uma massa de água M em movimento embatendo num dique poroso. Aplicando a lei fundamental da dinâmica resulta a seguinte equação diferencial:

$$M \frac{dV(t)}{dt} + F(t) = 0 \quad (2.125)$$

onde $V(t)$ é a velocidade e $F(t)$ é a força de reacção do dique.

A quantidade de cavidades de um material poroso permite interpretar o dique como um meio caracterizado por um número infinito de canais e alvéolos de diferentes tamanhos. A Fig. 2.9 mostra uma representação esquemática deste conceito onde as grandezas físicas intervenientes são definidas como:

- Pressão dinâmica sobre a "interface" água-dique: P (onde $P = F/S$) sendo S a área do dique coberta pela água;
- Pressão no alvéolo i : P_i ;
- Perda de pressão no canal i : $P - P_i$;

- Fluxo de água em movimento Q (onde $Q = SV$);
- Fluxo de água no canal i devido à diferença de pressão $P - P_i : Q_i$;
- Lei de conservação da quantidade de água (considerando a incompressibilidade do fluido): $Q = \sum_i Q_i$.

Analisando o sistema, podemos dizer que:

- Cada canal é sede de perdas de energia, designadamente por viscosidade e turbulência;
- Cada alvéolo é, ao nível do ar aprisionado, sede de uma energia potencial devido às forças de elasticidade resultantes da compressão do ar pela água.

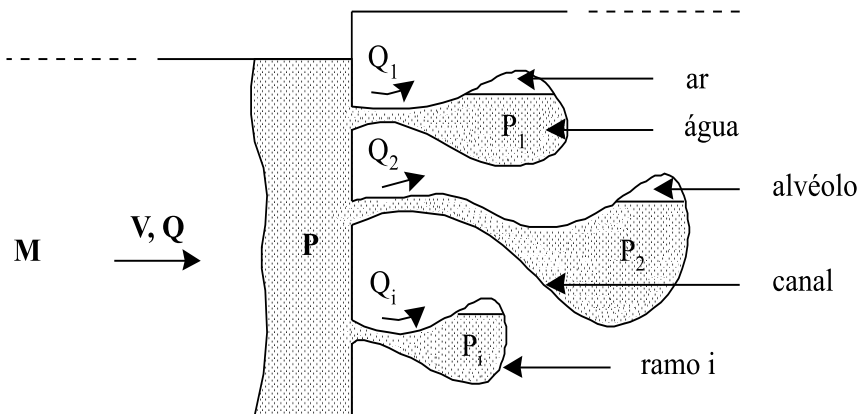


Figura 2.9: Fenómeno natural robusto. Representação esquemática de um dique contendo um número infinito de ramos constituído por canais e alvéolos.

Tendo em conta a equivalência entre a mecânica dos fluidos e os sistemas eléctricos, o modelo eléctrico equivalente ao modelo mecânico do ramo i (Fig. 2.9) é representado por um elemento dissipativo (resistência R_i) em série com um elemento não-dissipativo (condensador C_i), como é mostrado na célula elementar da Fig. 2.10.

Sabendo que a soma dos fluxos:

$$Q = \sum_i Q_i \quad (2.126)$$

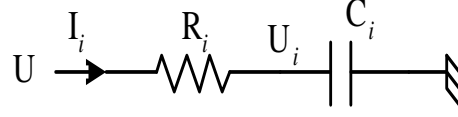


Figura 2.10: Modelo eléctrico equivalente ao ramo i : $U \equiv P$; $U_i \equiv P_i$; $I_i \equiv Q_i$.

tem por equivalente eléctrico a soma das intensidades:

$$I = \sum_i I_i \quad (2.127)$$

o conjunto dos ramos é representado por uma *disposição paralela de células RC em série*.

Dada a *fractalidade da porosidade* e a *recursividade da fractalidade* postas em evidência por B. Mandelbrot [49], pode ser atribuído um carácter recursivo à estrutura interna do dique. Devem ser consideradas duas distribuições distintas

- Uma *distribuição recursiva das perdas de energia* e, logo, das resistências eléctricas equivalentes:

$$R_{i+1} = \frac{R_i}{\beta} \quad (2.128)$$

- Uma *distribuição recursiva das energias potenciais da elasticidade* e, logo, das capacidades eléctricas equivalentes:

$$C_{i+1} = \frac{C_i}{\eta} \quad (2.129)$$

sendo $\beta > 1$, $\eta > 1$ factores recursivos.

Assim, o circuito eléctrico recursivo equivalente da "interface" água-dique corresponde ao representado na Fig. 2.11 (onde I é a corrente devida à tensão aplicada U) e a sua admitância de entrada $Y(j\omega)$ é dada por:

$$I(j\omega) = U(j\omega) \cdot Y(j\omega), \quad Y(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{j\omega C \beta^{i-1}}{j\omega C R + (\beta\eta)^{i-1}} \quad (2.130)$$

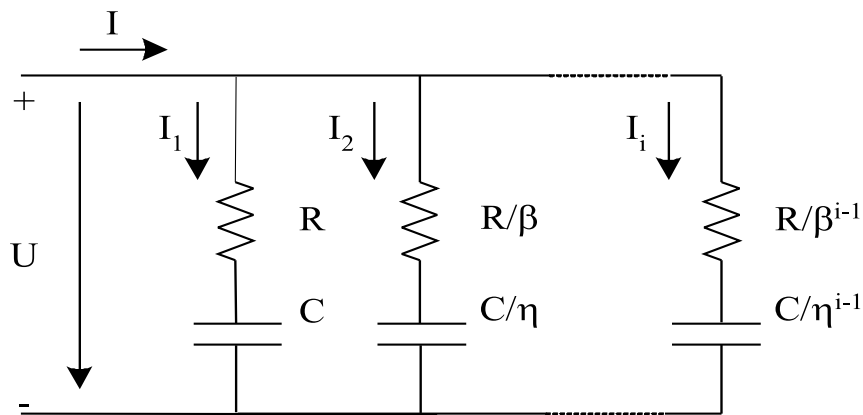


Figura 2.11: Circuito eléctrico recursivo equivalente da "interface" água-dique.

Os diagramas de Bode assintóticos da amplitude e da fase de $Y(j\omega)$ estão ilustrados na Fig. 2.12:

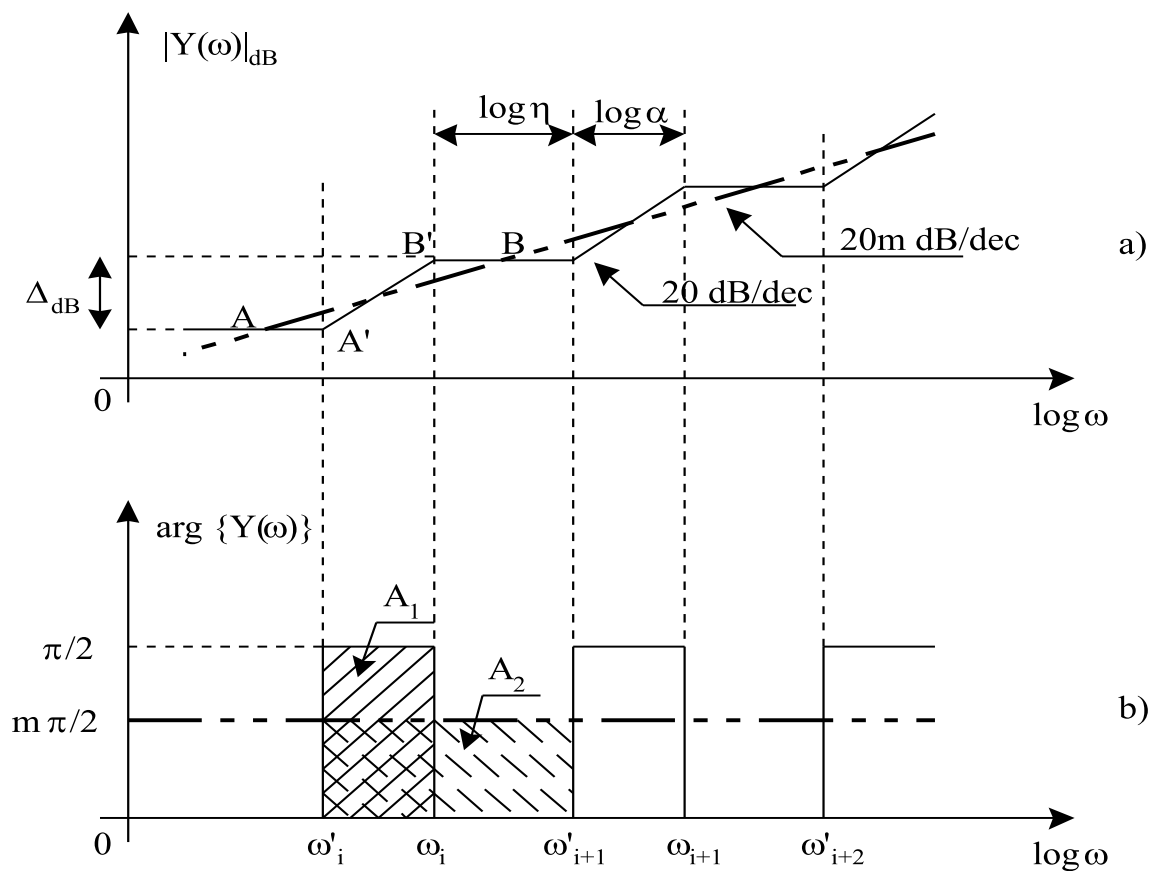


Figura 2.12: Diagrama de bode assintóticos de $Y(j\omega)$: a) Amplitude, b) Fase.

As frequências de corte do pólo ω_i e do zero ω'_i obedecem às seguintes relações recur-

sivas:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} &= \frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \beta\eta \\ \frac{\omega_i}{\omega'_i} &= \beta \\ \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} &= \eta \end{aligned} \quad (2.131)$$

A expressão da ordem não-inteira para m (*i.e.* o declive da recta média da amplitude ou a fase de $Y(j\omega)$) é dada por:

$$m = \frac{1}{1 + \frac{\log \eta}{\log \alpha}} \quad (2.132)$$

A resposta em frequência de ordem fraccionária é devida à natureza recursiva do circuito. De facto, a admitância $Y(j\omega)$ segue a fórmula recursiva:

$$Y\left(\frac{\omega}{\beta\eta}\right) = \frac{1}{\beta}Y(\omega) \quad (2.133)$$

com a solução (ψ é um factor de escala) de acordo com (2.135) [43]:

$$Y(\omega) = \psi(j\omega)^{-m}, \quad m = \frac{1}{1 + \frac{\log \eta}{\log \beta}} \quad (2.134)$$

As Figs. 2.13 e 2.14 mostram o diagrama de blocos deste método bem como o respectivo diagrama de Bode.

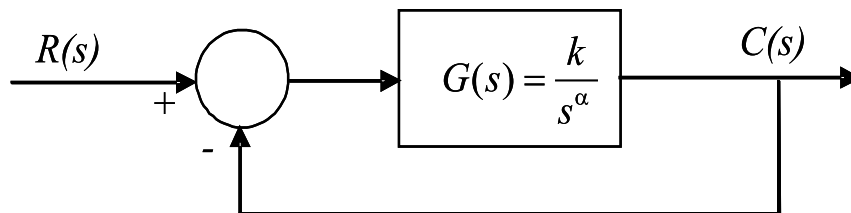


Figura 2.13: Diagrama de blocos para um sistema elementar de controlo de ordem fraccionária α .

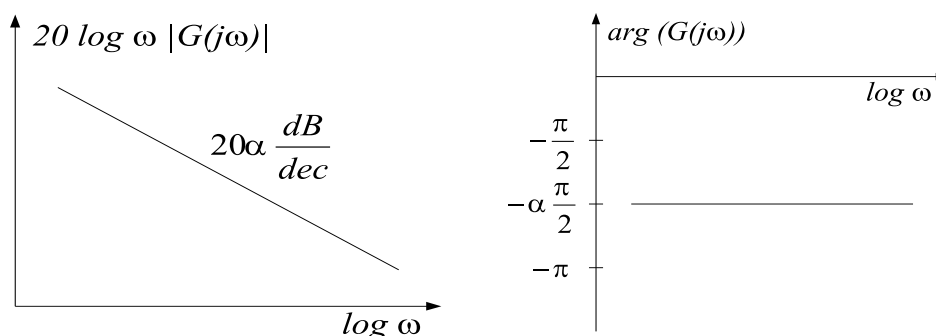


Figura 2.14: Diagrama de Bode, em malha aberta, de amplitudes e fases, para um sistema de ordem fraccionária $1 < \alpha < 2$.

O diagrama de Bode em malha aberta de amplitudes e fases, representado na Fig. 2.2, apresentam, respectivamente, um declive de $-20\alpha \text{ dB/dec}$ e uma fase constante de $-\alpha \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Por outro lado, o sistema em malha fechada tem uma margem de fase constante de $\pi(1 - \frac{\alpha}{2}) \text{ rad}$, que é independente do ganho K do sistema. Esta importante propriedade é também revelada através do *lugar das raízes* da figura Fig. 2.15. Por exemplo, quando $1 < \alpha < 2$ o *lugar geométrico das raízes* segue a relação $\pi - \frac{\pi}{\alpha} = \cos^{-1} \zeta$, onde ζ é o factor de amortecimento, que é independente do ganho K do sistema.

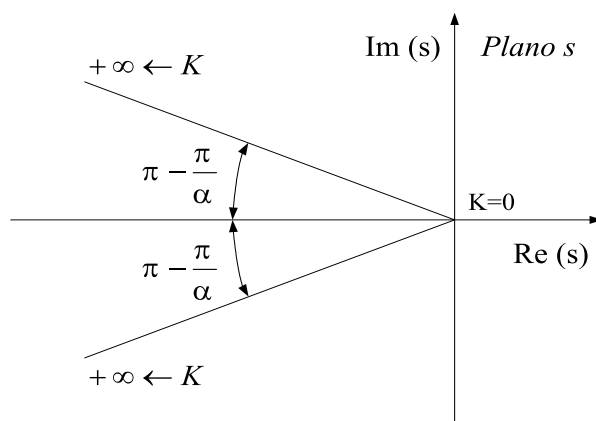


Figura 2.15: *Lugar geométrico das raízes* para um sistema de controlo de ordem fraccionária $1 < \alpha < 2$.

O projecto de um controlador que levasse o sistema a ter este tipo de comportamento definiu a seguinte estrutura da função de transferência $C(j\omega)$ do controlador:

$$C(j\omega) = C_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + j\omega/\omega'_i}{1 + j\omega/\omega_i} \quad (2.135)$$

em que C_0 é o ganho e em que as frequências de corte dos pólos e dos zeros (*i.e.* ω_i e ω'_i) são definidos através de uma *distribuição alternada recursiva* em função dos factores β e η .

2.3.11.2. Domínio dos Tempos

2.3.11.2.1. Método Analítico

Um método analítico usado para o controlo de sistemas, que se encontra ainda na fase inicial de desenvolvimento foi proposto por Podluny [76]. Este método adopta a análise no domínio dos tempos de sistemas de ordem fraccionária, permitindo deste modo obter a solução analítica explícita da resposta $y(t)$ do sistema (Fig. 2.16).

Consideremos o sistema de controlo de realimentação unitária da Fig. 2.16, onde $G(s)$ é a função de transferência do sistema controlado, $C(s)$ é a função de transferência do controlador, $R(s)$ é a entrada de referência, $E(s)$ é o erro, $U(s)$ é a saída do controlador e $Y(s)$ a saída do sistema.

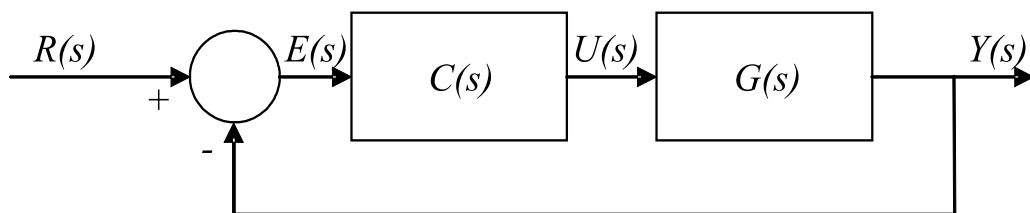


Figura 2.16: Sistema de controlo de realimentação unitária.

Contrariamente à aproximação clássica vamos considerar que as funções de transferência do sistema da Fig. 2.16, são descritas por funções de transferência de ordem arbitrária, isto é, utilizando derivadas e integrais de ordem não-inteira. Estes sistemas, designados de *sistemas de ordem fraccionária*, incluem também o caso particular dos sistemas de ordem inteira.

Assim, as funções de transferência de ordem fraccionária (*FTOF*) são dadas por uma expressão do tipo:

$$G_n(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\beta_1} + a_0 s^{\beta_0}}$$

onde

$$\beta_k, k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ é um número real arbitrário} \quad (2.136)$$

$$\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0 > 0$$

$$a_k, k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ é uma constante arbitrária}$$

No domínio dos tempos a *FTOF* (2.136) corresponde a uma equação diferencial de ordem fraccionária (*EDOF*) de n termos:

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = u(t) \quad (2.137)$$

onde $D^\alpha = {}_0 D_t^\alpha$ é a derivada fraccionária de Caputo de ordem α com respeito à variável t e com o ponto de início $t = 0$.

A escolha da derivada fraccionária de Caputo, em detrimento de outras definições bem mais conhecidas, como é o caso da *RL*, resulta da consideração por parte desta das condições iniciais $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \text{ etc}$ mais facilmente interpretáveis. Além disso, a derivada de Caputo de uma constante é zero. Por estas razões, a utilização da definição de Caputo parece ser a mais "adequada".

2.3.11.2.2. Método Numérico

Uma outra aproximação das derivadas fraccionárias no controlo de sistemas que adopta o domínio dos tempos é baseada directamente da definição de Grünwald-Letnikov (*GL*). Este método foi desenvolvido por Tenreiro [44] e resulta do facto de a definição de *GL* para a derivada de ordem fraccionária poder ser obtida através da sua expansão em série. Assim, para um algoritmo de controlo discreto no tempo de período de amostragem T , a fórmula pode ser aproximada por uma série truncada de n termos, resultando as seguintes equações nos domínios do tempo e z :

$$D^\alpha x(t) \approx \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kT)$$

$$Z \{D^\alpha x(t)\} \approx \left\{ \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha - k + 1)} z^{-k} \right\} X(z) \quad (2.138)$$

De maneira a termos uma boa aproximação, o número de termos n deve ser elevado e o tempo de amostragem T pequeno.

O algoritmo de controlo fraccionário é obtido por uma truncatura da série definida por (2.138) em n termos, e que pode ser obtido através da sua expansão em série de Taylor [41]:

$$D^\alpha(z^{-1}) \approx \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha \left[1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^{-2} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^{-n} \right] \quad (2.139)$$

O algoritmo de controlo pode implementar uma acção derivativa D ou integral I considerando respectivamente um valor positivo ou negativo de α .

Tenreiro demonstrou [40] que os controladores fraccionários revelam um melhor desempenho no controlo de sistemas que os tradicionais controladores PID (Proporcional, Integral e Diferencial). Demonstrou também que à medida que a série (2.139) contém mais termos tanto melhor é o desempenho do sistema. Estes resultados são ainda mais promissores quando o sistema está na presença de fenómenos não-lineares.

Este método é particularmente adequado para uma análise por transformada z e para uma implementação digital. Contudo, falta analisar certas questões, tal como a estabilidade do método, como o sistema de controlo se comporta na presença de sistemas definidos por equações diferenciais de ordem fraccionária (sistemas fraccionários) e a escolha de uma ordem α adequada para o desempenho desejado do sistema [15].

2.4. Resumo do capítulo

Neste capítulo foram formulados alguns conceitos matemáticos que serão usados nos capítulos seguintes. Assim, foram apresentados os aspectos fundamentais do cálculo de matrizes inversas generalizadas e do cálculo integral de ordem fraccionária, perspectivando-se a sua aplicação às ciências da engenharia.

Capítulo 3

Cinemática e Dinâmica de Robots

3.1. Introdução

A indústria contemporânea usa, cada vez mais, os robots em tarefas de grande complexidade, por forma a executarem o trabalho com um mínimo de assistência e intervenção humana.

Para se aumentar o desempenho dos sistemas robóticos, torna-se importante estudar e interpretar correctamente todos os conceitos envolvidos nas interacções com o ambiente e na manipulação de objectos.

Com o objectivo de construir braços eficientes e desenvolver algoritmos de controlo adequados, é necessário determinar as formas como uma tarefa pode ser executada e, para cada caso, que tipo de movimentos o robot deve ser capaz de realizar. Nesta perspectiva, não só as questões práticas ou tecnológicas mas também os aspectos científicos da manipulação representam partes importante da investigação nesta área da robótica.

Nesta ordem de ideias, o presente capítulo apresenta os fundamentos da cinemática para manipuladores planares, analisando com algum detalhe os aspectos relacionados com as singularidades e a manipulabilidade. Na secção 3.2 serão abordados os temas relacionados com as cinemáticas directa e inversa estabelecendo as relações entre o espaço das juntas e o espaço operacional. Na secção 3.3 discute-se o problema das singularidades cinemáticas e apresenta-se um método de análise da sua natureza. A secção 3.4 estuda a "manipulabilidade" dos braços robóticos apresentando algumas das expressões que permitem determinar o "índice de manipulabilidade" para um determinado ponto do espaço operacional. Na secção 3.5 é apresentada a formulação de Lagrange para a

obtenção das equações da dinâmica de um manipulador. A partir da formulação básica foi desenvolvido um modelo recursivo que permite a obtenção das equações dinâmicas para qualquer manipulador planar do tipo kR ($k \in \mathbb{N}$).

3.2. Aspectos Fundamentais da Cinemática de Manipuladores

Nesta secção serão apresentados os fundamentos da análise cinemática da estrutura de um manipulador que permite descrever o movimento do órgão terminal relativamente a um referencial cartesiano. A cinemática representa o nível básico de modelização de uma estrutura manipuladora, abordando essencialmente as relações geométricas, pelo que não toma em atenção as forças e fenómenos dinâmicos, normalmente induzidos pelo movimento.

3.2.1. Variáveis das juntas e posição do órgão terminal

Começa-se por analisar a relação geométrica entre o movimento das juntas e a posição do órgão terminal para um manipulador com n graus de liberdade (gdl).

Considera-se um manipulador com n gdl , sendo as juntas numeradas consecutivamente $i = 1, 2, \dots, n$ a partir da base do manipulador. O movimento da junta i é representado por q_i e referido como *variável de junta*. O vector

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (3.1)$$

designa-se por *vector das variáveis nas juntas*. A posição do órgão terminal é representada por um outro vector, designado por *vector de posição*

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T \quad (3.2)$$

onde m é a dimensão do espaço de trabalho. Geralmente verifica-se $m \leq n$.

O presente trabalho tem como base os manipuladores planares, pelo que resulta $m = 2$.

A relação geométrica entre \mathbf{r} e \mathbf{q} , determinada pelo mecanismo e pela estrutura do manipulador, é muitas vezes uma relação não-linear da forma:

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{q}) \quad (3.3)$$

Esta relação é designada por *cinemática directa* do manipulador. Quando o vector das juntas, \mathbf{q} , é dado, o correspondente vector \mathbf{r} é determinado de forma unívoca. Contudo, muitas tarefas obrigam a que o órgão terminal ocupe uma determinada posição ou percorra uma trajectória, previamente definida ao longo do tempo, no espaço operacional. Nestas situações tem que se determinar o vector $\mathbf{q}(t)$ que permita o órgão terminal alcançar a posição pretendida $\mathbf{r}(t)$. Por outras palavras, é necessário determinar $\mathbf{q}(t)$ que satisfaça (3.3), sendo conhecido $\mathbf{r}(t)$ ([7], [35], [3]). Essa solução pode ser escrita formalmente como:

$$\mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

Contudo, neste caso, $\mathbf{q}(t)$ pode não existir ou, se existir, pode não ser único.

O problema da obtenção $\mathbf{q}(t)$ sabendo $\mathbf{r}(t)$ é designado como *cinemática inversa*.

Assim, no caso presente em que se consideram robots planares e, conseqüentemente, $\mathbf{r}(t) = [r_1(t), r_2(t)]^T = [x(t), y(t)]^T$ colocam-se dois problemas:

Cinemática Directa: Dado o vector dos ângulos das juntas $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$ (e sabendo os comprimentos dos elos (l_1, l_2, \dots, l_n)), onde n é o número de *gdl*, qual será a correspondente posição $\mathbf{r}(t) = [r_x, r_y]^T$ do órgão terminal do manipulador com referência ao referencial coordenado?

Cinemática Inversa: Dada uma determinada posição $\mathbf{r}(t) = [r_x, r_y]^T$ do órgão terminal referente ao referencial coordenado, poderá o manipulador atingir essa posição? E se pode, quais e quantas configurações diferentes, $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$ satisfazem essa condição?

Um diagrama de blocos simples, que mostra as relações entre estes dois tipos de problemas (cinemática directa e cinemática inversa), é apresentado na Fig. 3.1.

Para determinar a posição do órgão terminal no espaço cartesiano, pode-se definir um vector de posição, \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, \dots, m$, para cada um dos eixos:

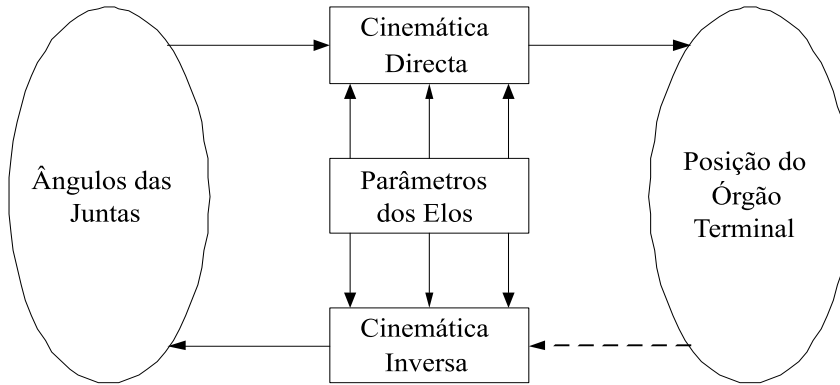


Figura 3.1: Cinemáticas directa e inversa.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= [l_1 C_1, l_1 S_1]^T \\
 \mathbf{r}_2 &= [l_2 C_{12}, l_2 S_{12}]^T \\
 &\dots\dots\dots \\
 \mathbf{r}_n &= [l_n C_{12\dots n}, l_n S_{12\dots n}]^T
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $C_1 = \cos(q_1)$, $C_{12} = \cos(q_1 + q_2)$, \dots , $C_{kp} = \cos(q_k + q_{k+1} + \dots + q_p)$, $S_1 = \sin(q_1)$, $S_{12} = \sin(q_1 + q_2)$, \dots , $S_{kp} = \sin(q_k + q_{k+1} + \dots + q_p)$.

A adição vectorial de (3.5) gera as coordenadas (r_x, r_y) do órgão terminal no espaço cartesiano:

$$\begin{aligned}
 r_x &= \sum_{i=1}^n l_i C_{1\dots i} \\
 r_y &= \sum_{i=1}^n l_i S_{1\dots i}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por exemplo, se considerarmos o caso elementar de um manipulador com dois eixos rotacionais representado na Fig. 3.2, (robot 2R) e considerando que queremos estudar a *cinemática directa* então, de acordo com (3.6), será:

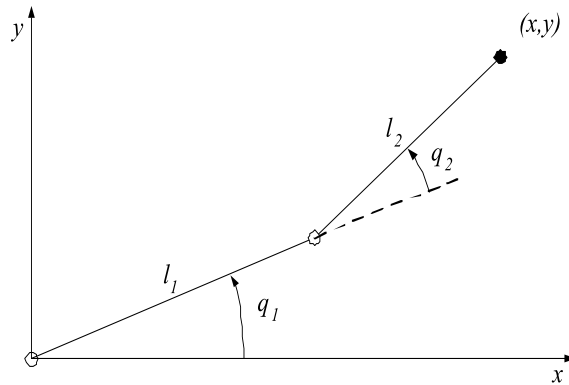


Figura 3.2: Manipulador planar com dois elos e com juntas rotacionais ($n = 2$, $m = 2$).

$$\begin{aligned}
 r_x &= \sum_{i=1}^2 l_i C_{1\dots i} \\
 r_y &= \sum_{i=1}^2 l_i S_{1\dots i}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Caso se pretenda obter a *cinemática inversa* do braço representado na Fig. 3.2, existem *a priori* as duas configurações (*i.e.*, dois conjuntos de valores para os ângulos das juntas $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ que permitem obter a mesma posição do órgão terminal, conforme ilustrado na Fig. 3.3.

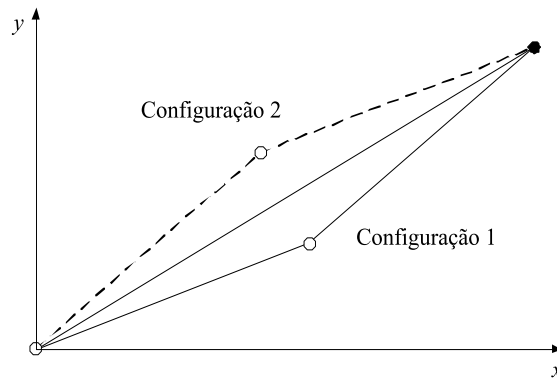


Figura 3.3: As duas soluções da cinemática inversa, para o robot $2R$.

Nesta perspectiva torna-se necessário desenvolver uma estratégia para seleccionar a configuração apropriada [28]. Assim, deverá ser escolhida uma configuração que determina

se o ângulo da segunda junta (q_2) deve ser positivo (*configuração "lower elbow"*) ou se, pelo contrário, esse ângulo deverá ser negativo (*configuração "upper elbow"*) [90].

Supondo, por exemplo, que estamos interessados em $q_2 > 0$ de (3.7) virá:

$$C_2 = \frac{r_x^2 + r_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \arctan \frac{r_y(l_1 + l_2C_2) - r_x l_2S_2}{r_x(l_1 + l_2C_2) + r_y l_2S_2} \\ q_2 &= \arccos \frac{r_x^2 + r_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Conhecidos os comprimentos (l_1, l_2), podem-se calcular, através de (3.9), os ângulos das juntas requeridos para colocar o órgão terminal numa posição (r_x, r_y) no espaço cartesiano.

É de notar que nem todos os pontos (r_x, r_y) podem ser acedidos pelo órgão terminal. Designa-se por *espaço de trabalho* do robot o conjunto de pontos (r_x, r_y) aos quais o órgão terminal pode aceder (Fig. 3.4).

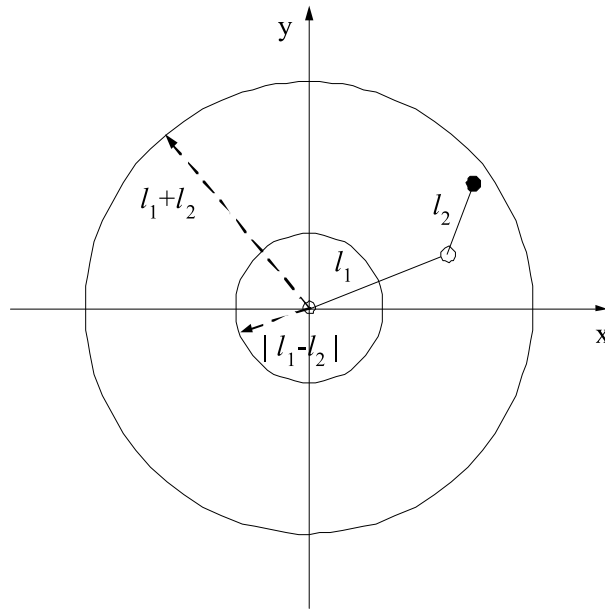


Figura 3.4: Espaço de trabalho para o robot 2R, para $-\pi < q_i < \pi$ ($i = 1, 2$)
 $l_1 = 1.5 \text{ m}$, $l_2 = 0.7 \text{ m}$.

Para o caso de manipuladores com 2 *gdl* é relativamente fácil a solução tanto da cinemática directa como da cinemática inversa. Contudo, os cálculos aumentam de complexidade com o do número de *gdl*, em particular no caso da cinemática inversa [2], [74].

3.2.2. Cinemática Inversa e Jacobiano

Considere-se agora o problema mais geral do cálculo da cinemática inversa para um manipulador com n *gdl*. Como a estrutura da maioria dos tipos dos manipuladores tem geometrias complexas, esta tarefa pode revelar-se difícil do ponto de vista analítico, para além de, eventualmente, levantar alguns problemas computacionais. Uma abordagem alternativa consiste em encontrar uma solução numérica através de um algoritmo de aproximações sucessivas [74], [83], [73], [72].

Como definido em (3.3) a função f estabelece uma relação entre o *vector das juntas*, \mathbf{q} ($n \times 1$), e o *vector de posição*, \mathbf{r} ($m \times 1$), para um manipulador ($m \leq n$). Então, a matriz \mathbf{J} ($m \times n$) definida por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial r_2}{\partial q_1} & \frac{\partial r_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \frac{\partial r_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} \quad (3.10)$$

é designada matriz Jacobiana de \mathbf{r} em relação a \mathbf{q} . Como \mathbf{q} e \mathbf{r} são funções do tempo, derivando a equação (3.3), obtém-se

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.11)$$

A equação (3.11) descreve a relação entre a velocidade do órgão terminal e as velocidades das juntas do manipulador e designa-se por cinemática diferencial directa (de primeira ordem).

No caso particular da equação (3.6) para um robot planar com n *gdl*, a matriz Jaco-

biana ($2 \times n$) vem:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - \cdots - l_n S_{12\dots n} & -l_2 S_{12} - \cdots - l_n S_{12\dots n} & \cdots & -l_n S_{12\dots n} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + \cdots + l_n C_{12\dots n} & l_2 C_{12} + \cdots + l_n C_{12\dots n} & \cdots & l_n C_{12\dots n} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Por outro lado, os manipuladores redundantes podem também apresentar desvantagens. Como têm mais juntas e actuadores, a sua estrutura é mais complexa, requerendo modelos matemáticos mais sofisticados e algoritmos de controlo mais complexos, para se tirar partido do número extra de *gdl* [30], [58].

Ao adoptarmos as equações (3.4) e (3.14) para o cálculo da cinemática inversa de um manipulador redundante encontram-se dificuldades já que, contrariamente ao verificado para o manipulador $2R$, a matriz Jacobiana não é uma matriz quadrada, inviabilizando o cálculo de \mathbf{J}^{-1} da forma tradicional [10].

Uma solução consiste em usar a matriz pseudoinversa $\mathbf{J}^\#$, [38] sendo então possível a expressão:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\#(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} \quad (3.13)$$

Desta forma, conclui-se que adoptando a pseudoinversa da matriz jacobiana se torna possível o cálculo da cinemática inversa para um manipulador onde $m \neq n$.

3.3. Singularidades Cinemáticas

Considere-se agora o problema do cálculo das velocidades nas juntas, $\dot{\mathbf{q}}$, necessárias para obter uma determinada velocidade do órgão terminal, $\dot{\mathbf{r}}$ (*i.e.* a cinemática diferencial inversa). A partir da equação (3.11), se a matriz \mathbf{J} admitir inversa, resulta:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} \quad (3.14)$$

Se a matriz \mathbf{J} for quadrada, isto é, se a dimensão do espaço de trabalho é a mesma da do espaço das juntas ($m = n$) e, além disso, para uma determinada configuração do

manipulador \mathbf{J} é não singular, então \mathbf{J}^{-1} existe e é única. Como a matriz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ é dependente de \mathbf{q} é possível que seja uma matriz singular para certas configurações. Nesses casos $\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}$ não existe e a relação (3.14) não é válida. As configurações correspondentes a estas situações são classificadas como uma *configurações singulares*. Para uma configuração singular, a correspondente matriz \mathbf{J} apresenta uma característica inferior ao valor máximo ($R(\mathbf{J}) < m$). Portanto, os vectores coluna são linearmente dependentes, e não existe a possibilidade de operar sobre a totalidade vector $\dot{\mathbf{r}}$ do espaço m -dimensional, havendo direcções nas quais o órgão terminal não tem a capacidade de se movimentar [12], [77]. Encontrar os pontos singulares de um manipulador é de grande interesse já que:

- nestes pontos a mobilidade da estrutura é reduzida, *i.e.* não é possível impor certos movimentos do órgão terminal;
- nessas situações podem existir múltiplas soluções para o problema da cinemática inversa;
- na vizinhança desses pontos baixas velocidades no espaço operacional podem requerer altas velocidades no espaço das juntas.

Dada a origem diversa da ocorrência de singularidades será natural pensar que as correspondentes configurações terão natureza também distinta.

Nesse sentido, de seguida serão apresentados vários exemplos de singularidades para os manipuladores $2R$, $3R$, $4R$ e $5R$. Com o objectivo de analisar a natureza topológica intrínseca a cada tipo de configuração singular fez-se o mapeamento de uma esfera \mathbf{E} no espaço das juntas, com centro na posição do órgão terminal $\mathbf{q}_0 = (q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})$ e raio $\rho = 0.001$, para o espaço operacional. Para fazer um estudo das eventuais diferenças da natureza topológica dos pontos associados à vizinhança de cada um das configurações, o mapeamento através da cinemática directa, foi analisado, através de vários níveis de aproximação das funções trigonométricas relativamente aos acréscimos dos valores das juntas, ou seja, relativamente ao mapeamento $\mathbf{q}_0 + d\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}$, $d\mathbf{q} \in \mathbf{E}$.

Para robot $2R$ a matriz Jacobiana, de acordo com (3.12), vem:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

e a respectiva matriz inversa \mathbf{J}^{-1} é:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{bmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 + l_2 C_{12} & -l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Resolvendo a equação (3.14) e fazendo $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$ e $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{r}_x, \dot{r}_y]^T$, vem:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Por integração numérica, a partir de $\dot{\mathbf{q}}$ é possível obter o vector \mathbf{q} , que é uma solução de (3.14).

As singularidades ocorrem quando $\det(\mathbf{J}) = 0$. A partir de (3.15) obtém-se:

$$\det(\mathbf{J}) = l_1 l_2 S_2 \quad (3.18)$$

Portanto, as configurações singulares ocorrem para $q_2 = 0$ ou $q_2 = \pm\pi$, isto é, quando $r^2 = r_x^2 + r_y^2 = (l_1 - l_2)^2$ ou $r^2 = r_x^2 + r_y^2 = (l_1 + l_2)^2$

Como já se referiu o mapeamento adopta a cinemática directa $\mathbf{r} = f(\mathbf{q}_{0_i} + \mathbf{dq})$ onde \mathbf{q}_0 é ângulo das juntas para a configuração em estudo e \mathbf{dq} é o vector dos acréscimos infinitésimos por forma a construir a esfera \mathbf{E} de raio ρ .

Para se ter uma noção mais precisa das eventuais diferenças da natureza topológicas destas vizinhanças, para o mapeamento referido, foram adoptadas três aproximações diferentes.

A primeira consiste, simplesmente, na cinemática directa, isto é,

$$\begin{aligned} x + dx &= l_1 \cos(q_1 + dq_1) + l_2 \cos(q_1 + dq_1 + q_2 + dq_2) \\ y + dy &= l_1 \sin(q_1 + dq_1) + l_2 \sin(q_1 + dq_1 + q_2 + dq_2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Na segunda aproximação usou-se o desenvolvimento de primeira ordem em série de MacLaurin. Deste desenvolvimento verificou-se que a aproximação é da forma:

$$\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{J}(\mathbf{q}_0)d\mathbf{q} \quad (3.20)$$

Para a terceira experiência foi feita uma aproximação de segunda ordem da série de MacLaurin obtendo-se uma aproximação forma:

$$\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{J}(\mathbf{q}_0)d\mathbf{q} + \mathbf{H}(\mathbf{q}_0)d\mathbf{q}^2 \quad (3.21)$$

A descrição completa dos elementos constituintes das matrizes $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é feita no Apêndice B.

Por outro lado para testar as diferenças na natureza topológica das configurações correspondentes a pontos singulares e a pontos não singulares fez-se um estudo idêntico para o ponto correspondente à configuração de manipulabilidade¹ máxima.

As Figs. 3.5 e 3.6 apresentam o mapeamento de vizinhanças de pontos singulares no espaço das juntas, para $r = l_1 - l_2$ e $r = l_1 + l_2$, para pontos do espaço operacional. A Fig. 3.7 apresenta o mesmo mapeamento mas para uma configuração "notável", nomeadamente a configuração correspondente ao ponto de manipulabilidade máxima $(q_1, q_2) = (0, \frac{\pi}{2})$ rad. Verifica-se facilmente que os três pontos apresentam características topológicas diferentes. De facto, designando por A_{xy} a área correspondente ao mapeamento de \mathbf{E} no espaço operacional, verifica-se que $A_{xy} = \psi\rho^2$ ou $A_{xy} = \psi\rho^3$, respectivamente para os pontos não singulares e singulares, onde ψ é um coeficiente de amplificação característico de cada ponto.

Considere-se agora um manipulador com $n > 2$ gdl (*i.e.* um manipulador redundante).

Embora apresentem vantagens em relação aos manipuladores não redundantes no que concerne às configurações singulares, estes robots apresentam um maior número de situações em que a estrutura pode apresentar configurações singulares. Por outro lado, uma vez que não é possível o cálculo de $\det(\mathbf{J})$ (pois \mathbf{J} é uma matriz não quadrada), consideram-se configurações singulares aquelas para as quais ocorre $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0$.

¹Manipulabilidade é a capacidade de movimentar o órgão terminal em qualquer direcção no espaço operacional. Este conceito será estudado em secções seguintes.

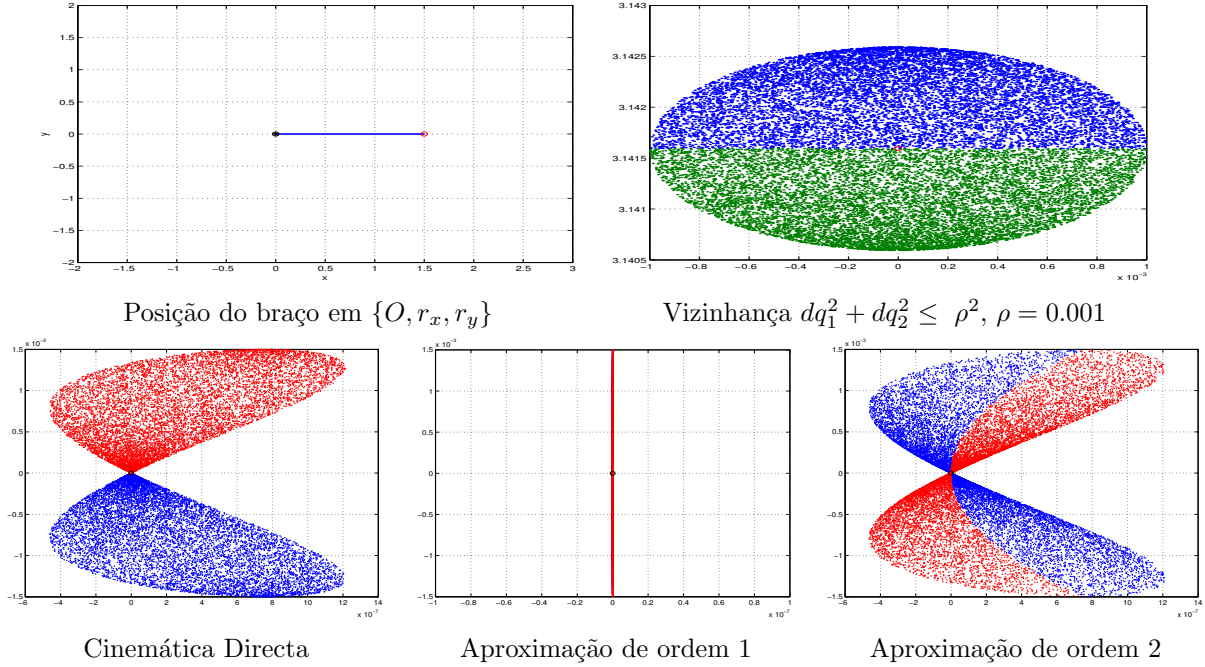


Figura 3.5: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, no espaço das juntas, de ponto singular para robot $2R$, para $r_s = 0$ m. $\psi = 2.97$.

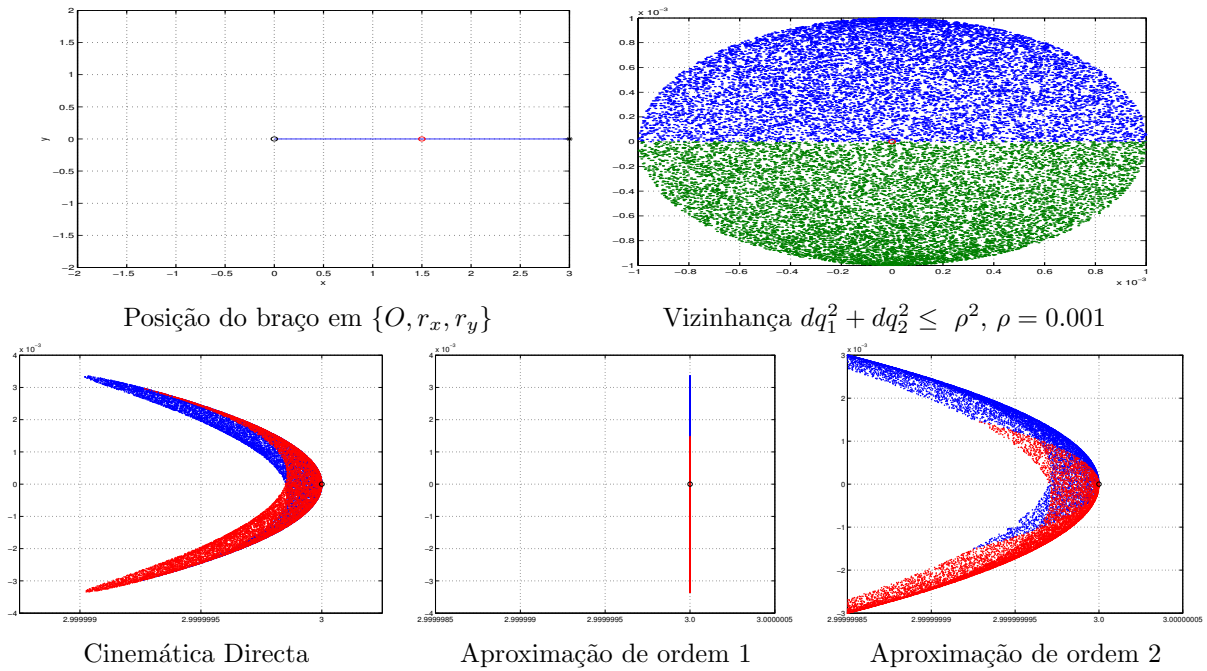


Figura 3.6: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, no espaço das juntas, de ponto singular para robot $2R$, para $r_s = l_1 + l_2$ m. $\psi = 2.26$.

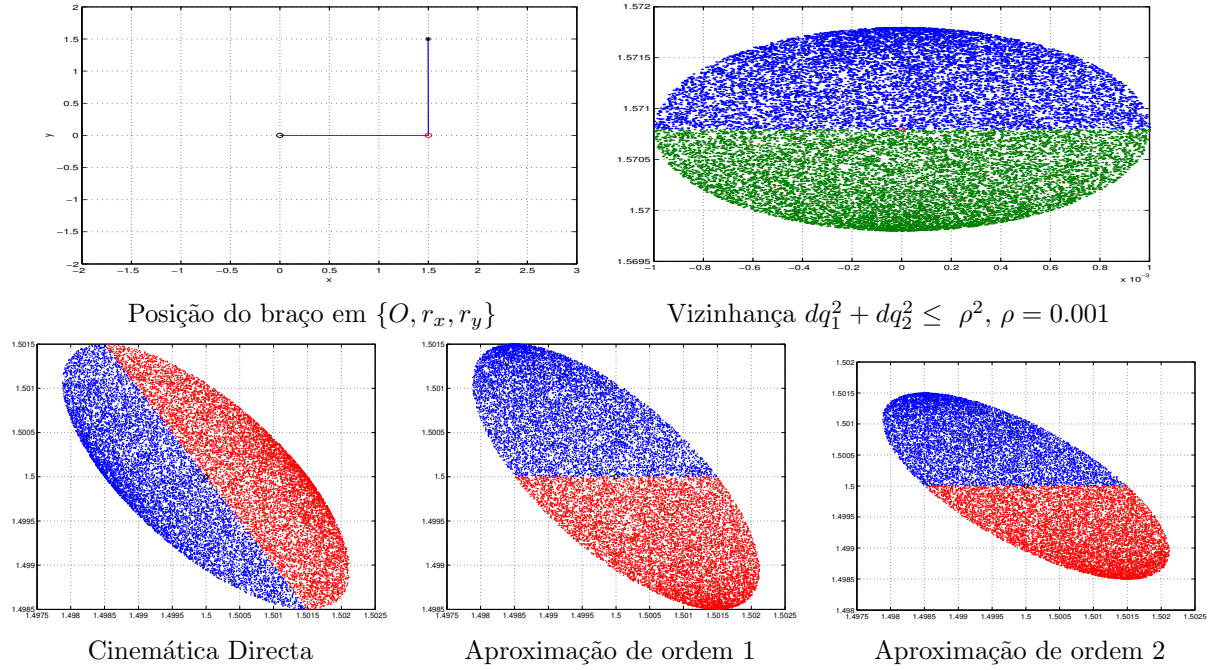


Figura 3.7: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, no espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot $2R$, para $r_s = 1.5\sqrt{2} m$. $\psi = 7.03$.

Na mesma ordem de ideias, podem também analisar-se os robots hiper-redundantes.

Assim, tanto para o robot $3R$ como para os robots $4R$ e $5R$, foi feito um estudo semelhante ao realizado para o robot $2R$, tendo-se obtido aproximações similares às descritas nas equações (3.19), (3.20) e (3.22). A descrição completa das correspondentes matrizes $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, encontra-se no Apêndice B.

No caso do robot $3R$, para $l_1 = l_2 = l_3$, são configurações singulares as correspondentes a posições das juntas $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, \pi) rad$, a que corresponde a uma distância radial $r = 1 m$, e a $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0) rad$, a que corresponde a distância radial $r = l_1 + l_2 + l_3 = 3 m$. Por outro lado, o ponto correspondente à configuração $(q_1, q_2, q_3) = (-\pi, 2.09, 2.09) rad$, para a qual o órgão terminal coincide com a origem ($r = 0 m$), não é um ponto singular uma vez que para essa configuração se tem $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \neq 0$.

As Figs. 3.8- Fig. 3.10 apresentam o mapeamento dessa vizinhanças o espaço operacional. A Fig. 3.11 apresenta o mesmo mapeamento mas para uma configuração "notável", a configuração correspondente ao ponto de manipulabilidade máxima $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{\pi}{3}, -0.796, -1.134) rad$.

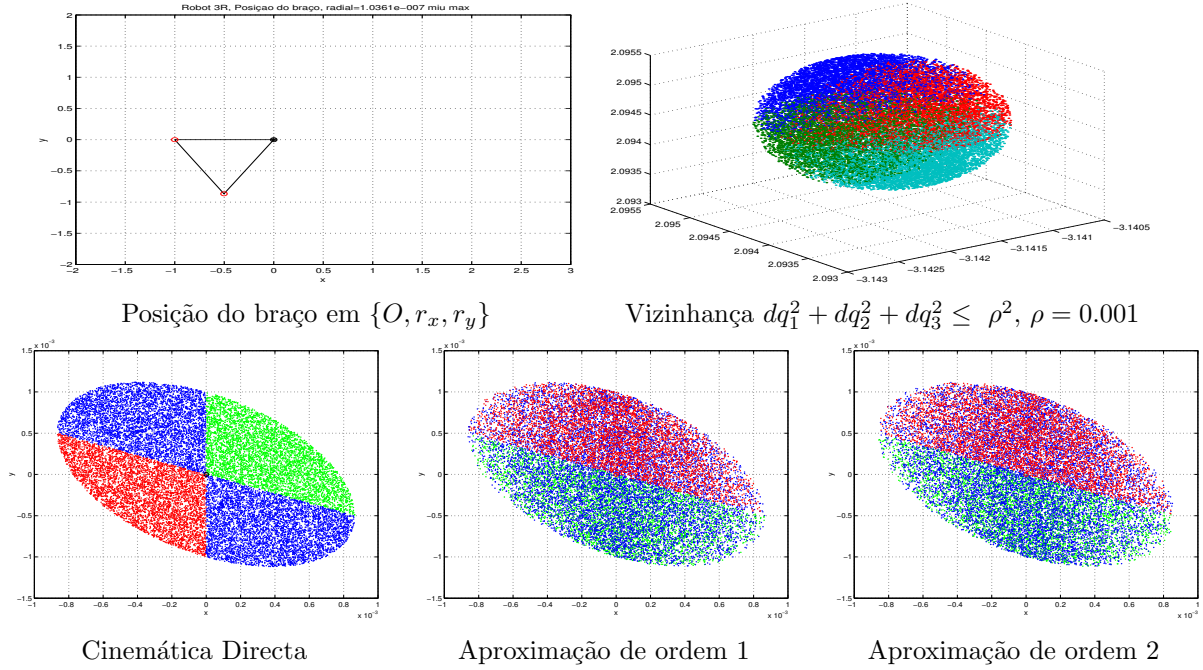


Figura 3.8: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot 3R, para $r_s = 0$ m. $\psi = 2.69$.

No caso do robot 4R, são configurações singulares as correspondentes a posições das juntas $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, -\pi, -\pi, -\pi)$ rad e $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, 0, -\pi, 0)$ rad, a que correspondem a distância radial $r = 0$ m, as configurações $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, 0, -\pi, -\pi)$ rad e $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, -\pi, -\pi, 0)$ rad, a que correspondem a distância radial $r = 1.5$ m e a configuração $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, 0, 0, 0)$ rad, a que corresponde a distância radial $r = 3$ m.

As Figs 3.12 - Fig. 3.14 apresentam os gráficos do mapeamento dessa vizinhança no espaço operacional.

A Fig. 3.15 apresenta o mesmo mapeamento mas para uma configuração "notável", a configuração correspondente ao ponto de manipulabilidade máxima $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (\frac{\pi}{3}, 0, 0, -1.87)$ rad.

No caso do robot 5R, as posições das juntas: $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (0, 0, \pi, 0, \pi)$ rad, a que corresponde a distância radial $r = 0.6$ m, $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (0, 0, 0, 0, -\pi)$ rad, a que corresponde a distância radial $r = 1.8$ m e $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ rad, a que corresponde a distância radial $r = 3$ m, são configurações singulares. O ponto

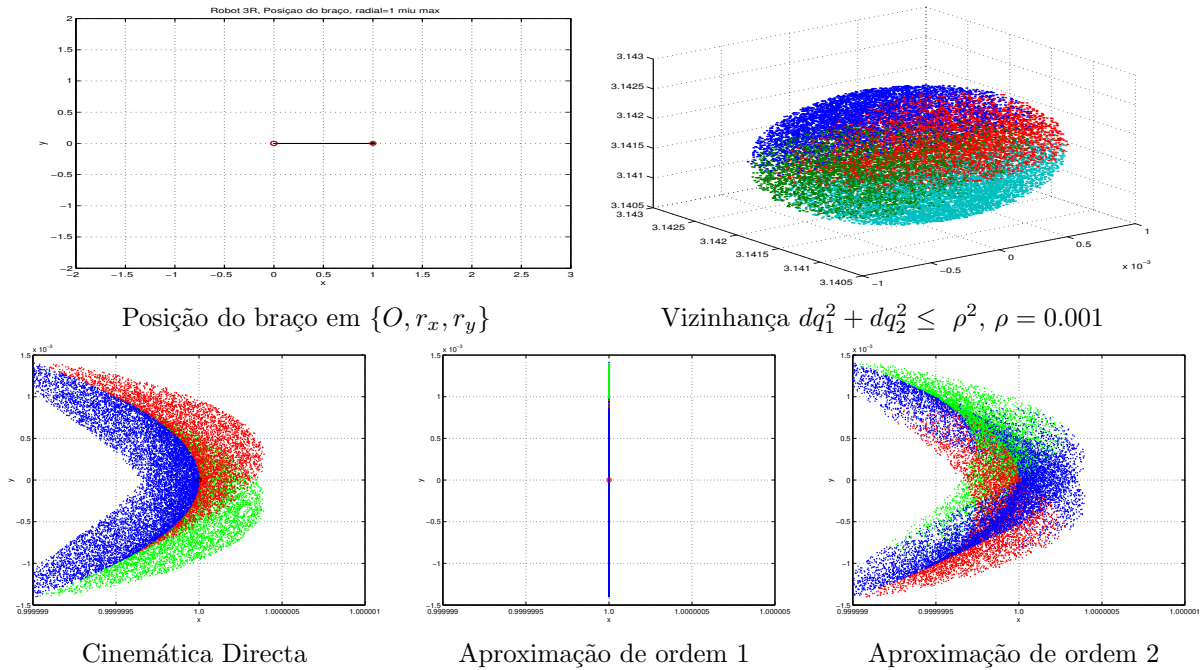


Figura 3.9: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot 3R, para $r_s = 1 m$. $\psi = 2.29$.

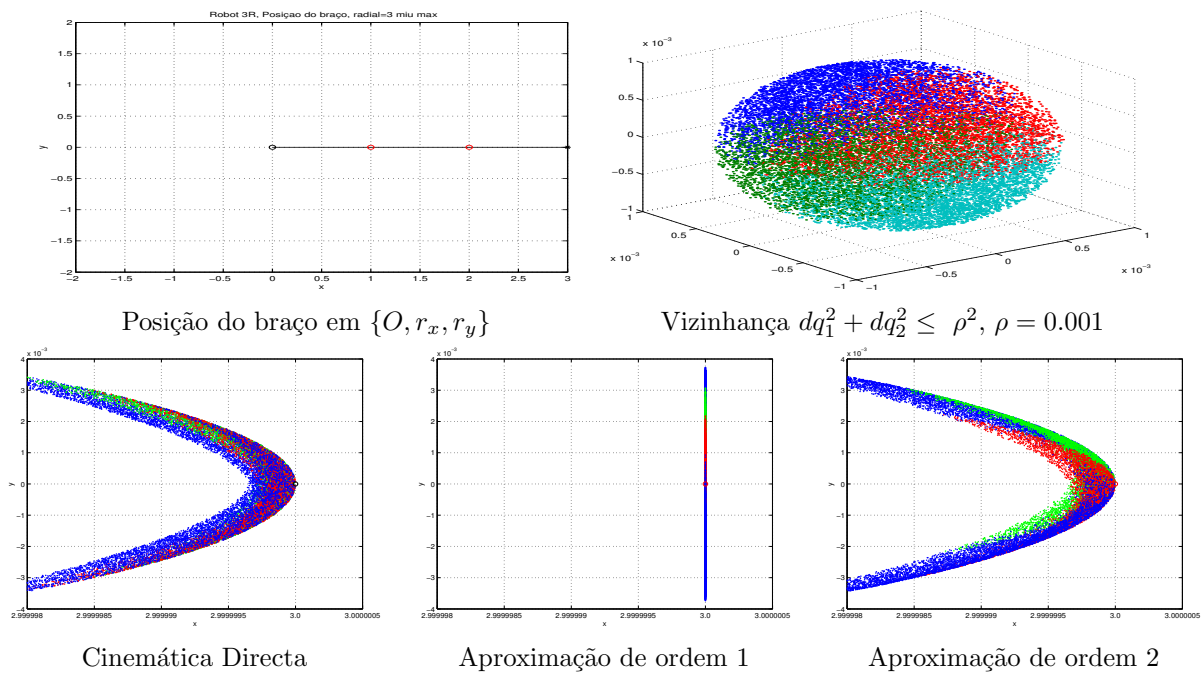


Figura 3.10: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot 3R, para $r_s = 3 m$. $\psi = 3.19$.

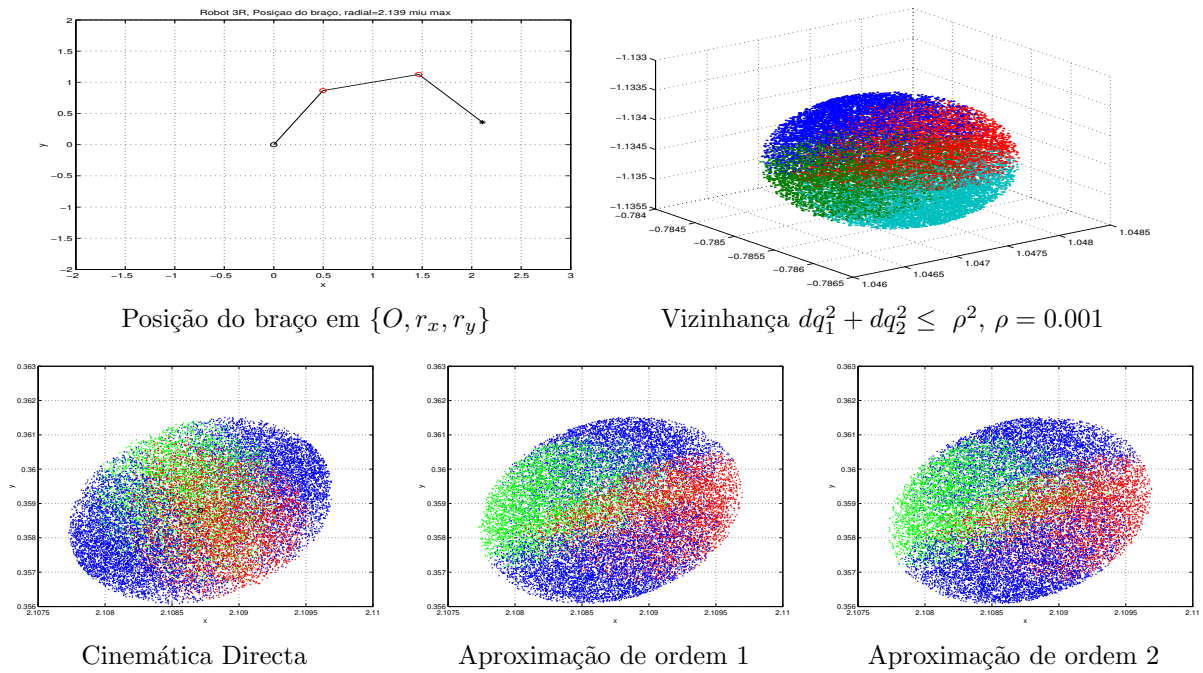


Figura 3.11: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança esférica, do espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot 3R, para $r_s = 2.635 \text{ m}$. $\psi = 7.97$.

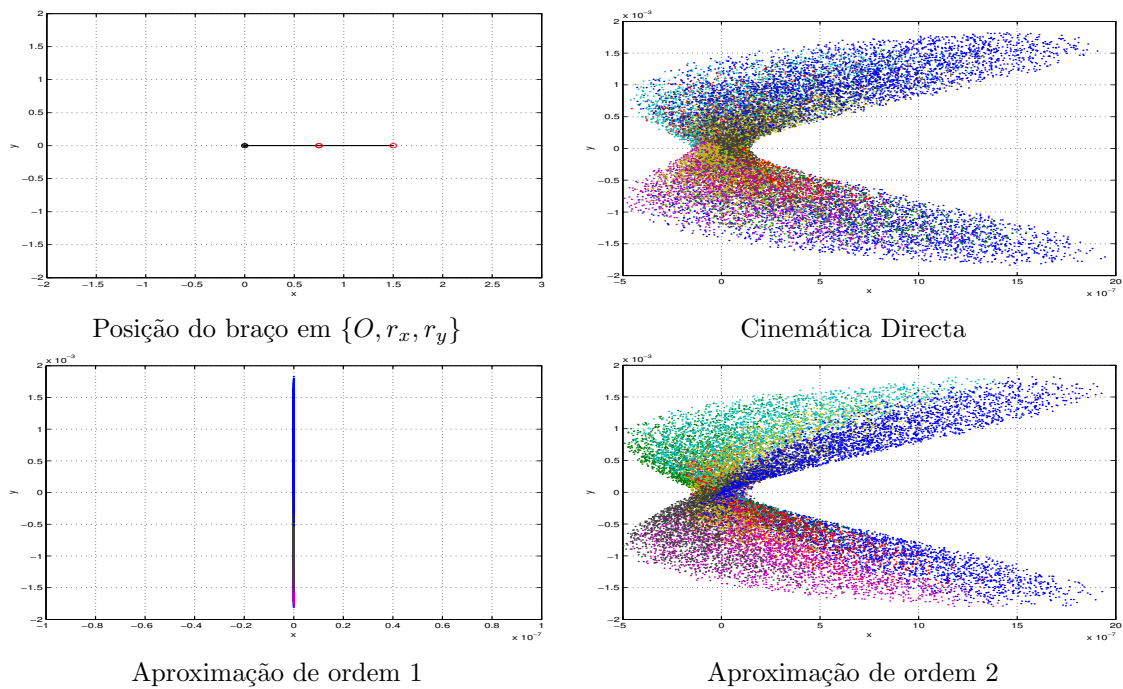


Figura 3.12: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot 4R, para $r_s = 0 \text{ m}$. $\psi = 4.40$.

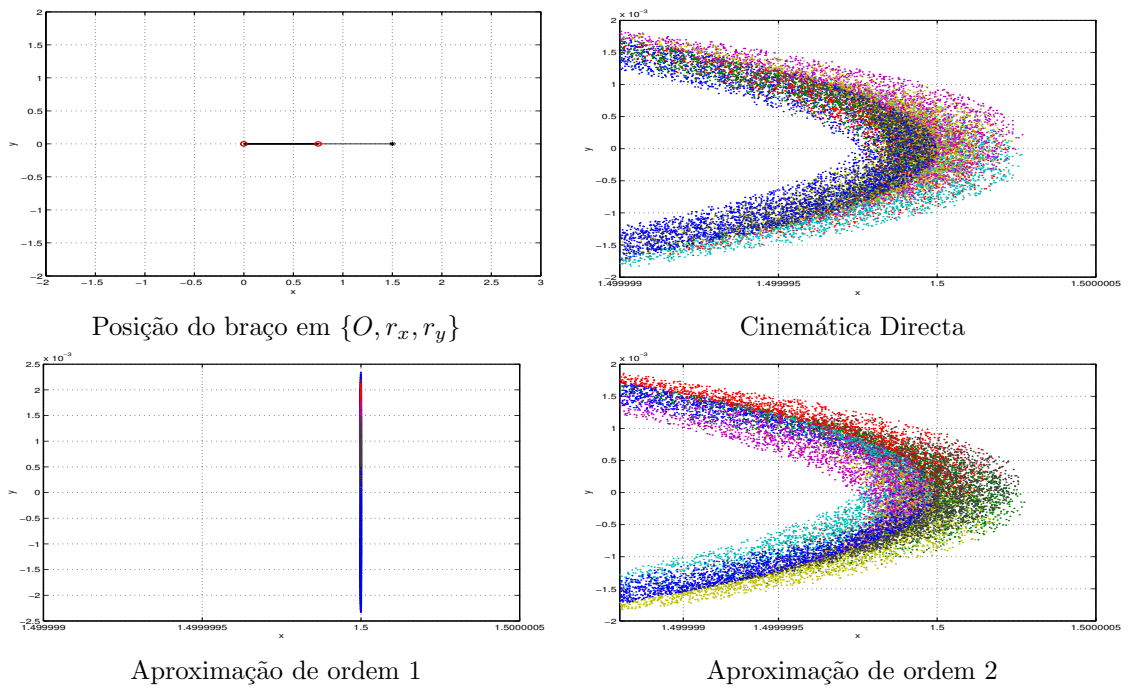


Figura 3.13: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot 4R, para $r_s = 1.5 m$. $\psi = 2.96$.

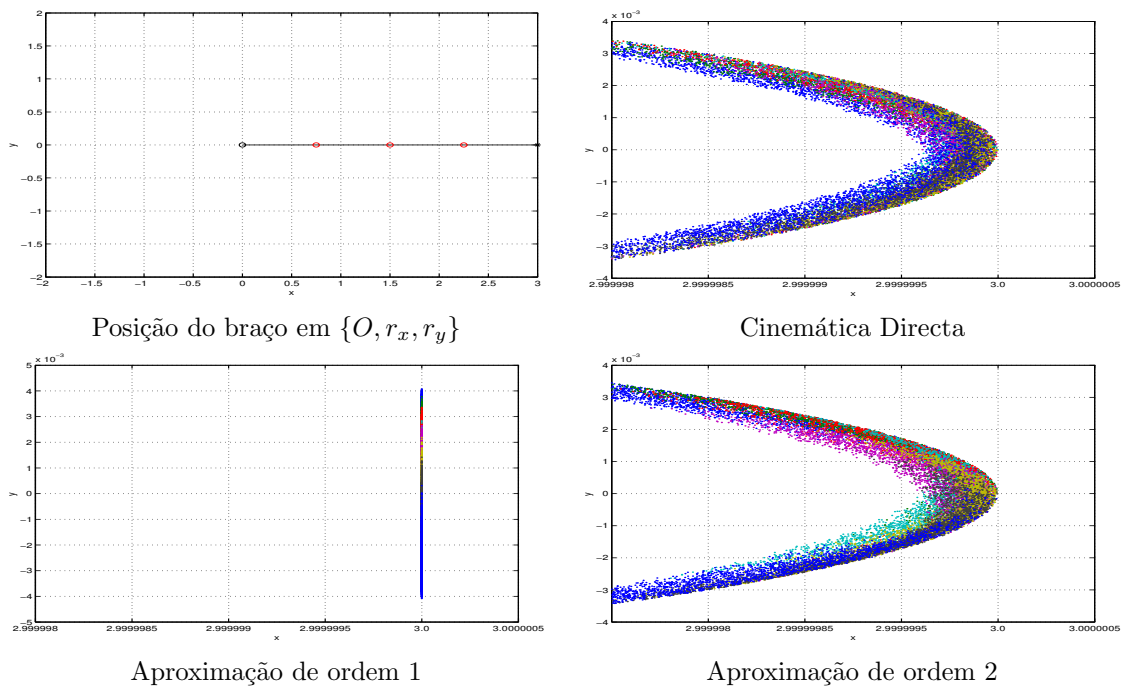


Figura 3.14: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot 4R, para $r_s = 3 m$. $\psi = 4.18$.

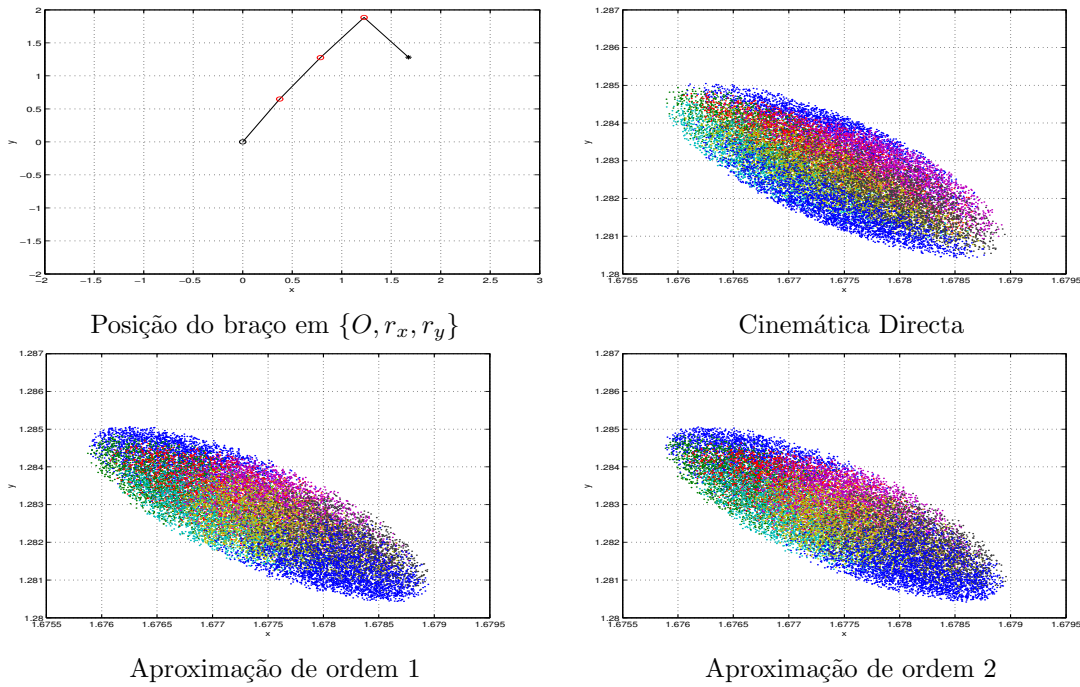


Figura 3.15: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot $4R$, para $r_s = 2.13 \text{ m}$. $\psi = 7.06$.

correspondente à configuração $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (2.36, 0, -2.06, -1.12, -0.98) \text{ rad}$, para a qual o órgão terminal coincide com a origem ($r = 0 \text{ m}$), não é um ponto singular uma vez que para essa configuração se tem $\det(\mathbf{JJ}^T) \neq 0$.

As Figs. 3.16 - Fig. 3.19 apresentam os gráficos do mapeamento dessas vizinhanças no espaço operacional. A Fig. 3.20 apresenta o mesmo mapeamento para uma configuração "notável", a configuração correspondente ao ponto de manipulabilidade máxima $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (\frac{\pi}{3}, 0, 0, -0.14, -2.06) \text{ rad}$.

A Fig. 3.21 mostra os valores de ψ para os diferentes pontos singulares para os robots em estudo.

Embora o estudo dos pontos singulares não seja o objectivo principal deste trabalho, quisemos ter um conhecimento um pouco mais aprofundado das suas características e da relação que é possível estabelecer, em seu torno, entre o espaço das juntas e o espaço operacional. Assim, adoptou-se a aproximação de segunda ordem para robot $2R$. A

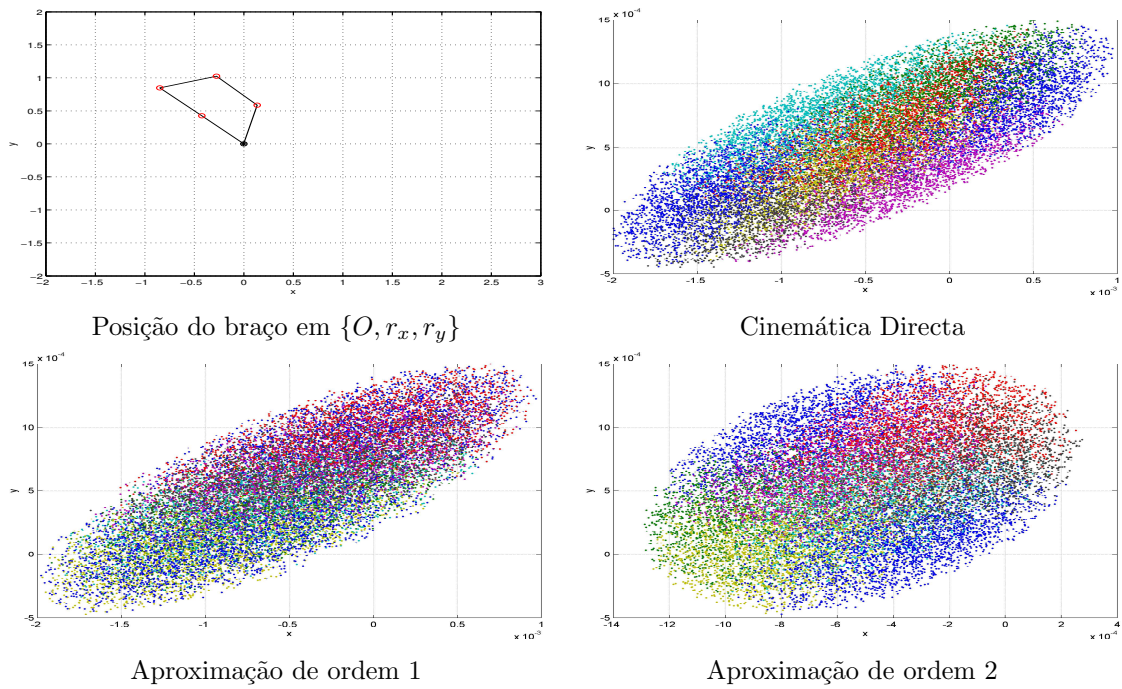


Figura 3.16: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 0 m$. $\psi = 2.96$.

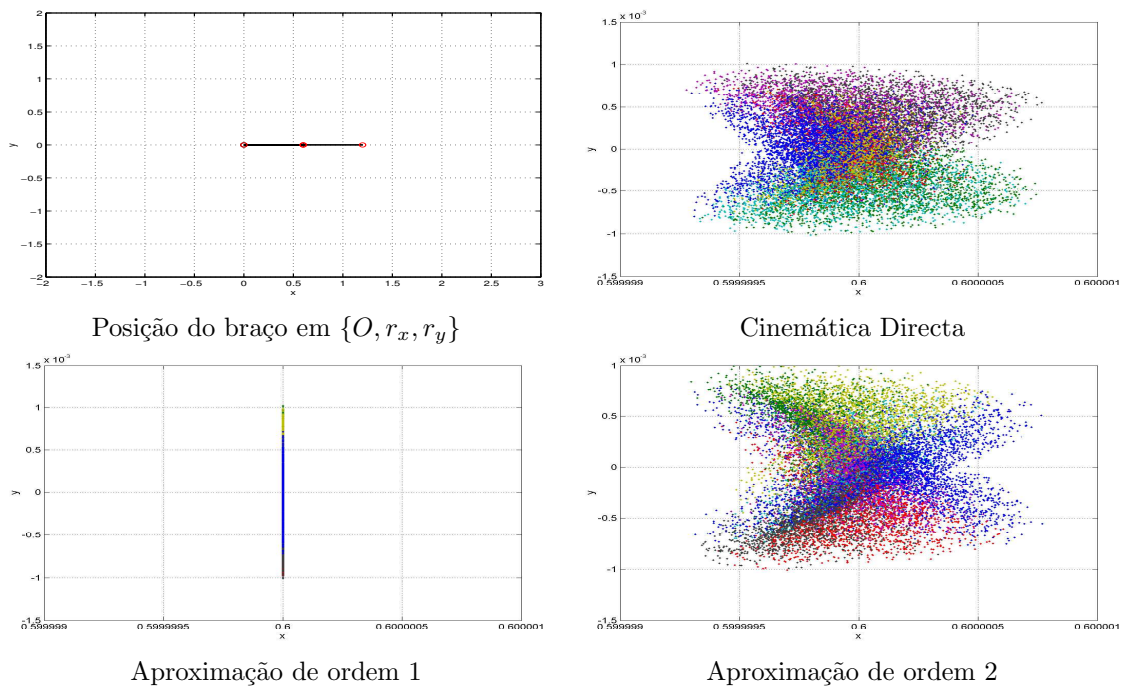


Figura 3.17: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 0.6 m$. $\psi = 2.18$.

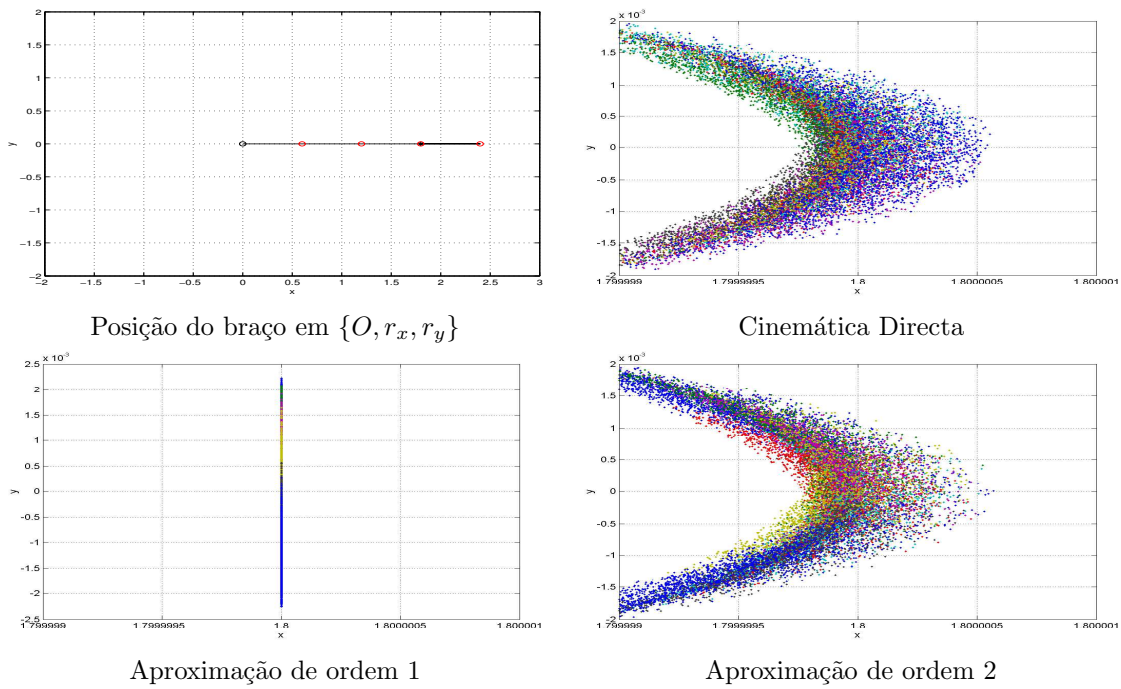


Figura 3.18: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 1.8$ m. $\psi = 2.89$.

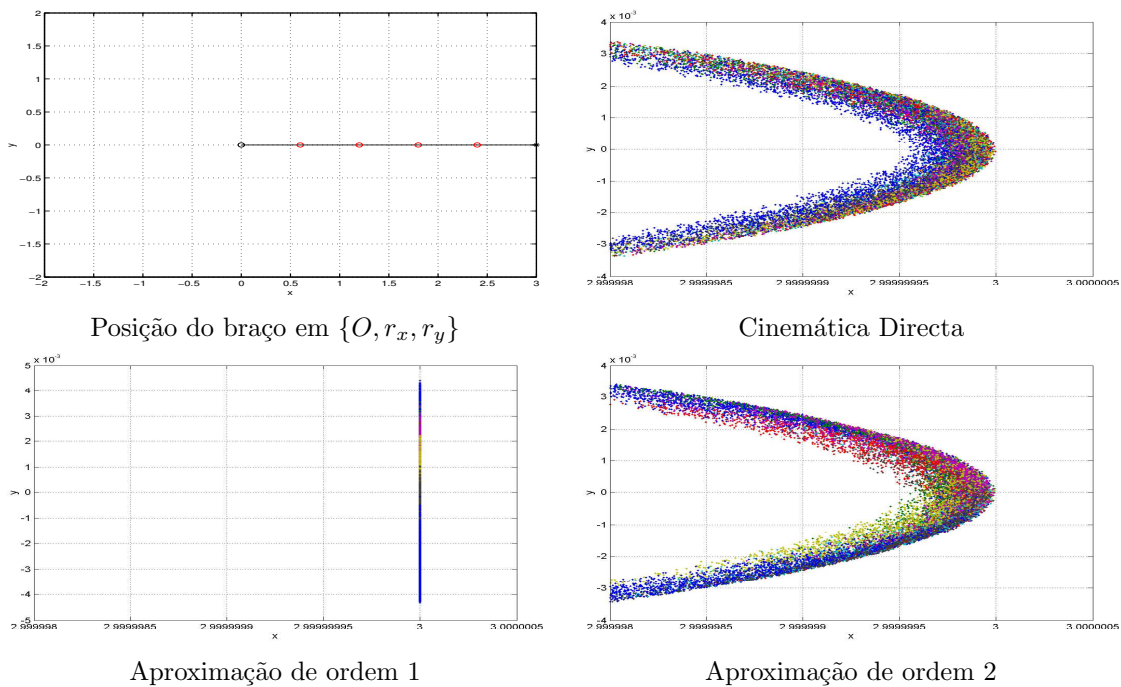


Figura 3.19: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto singular para robot $5R$, para $r_s = 3$ m. $\psi = 4.98$.

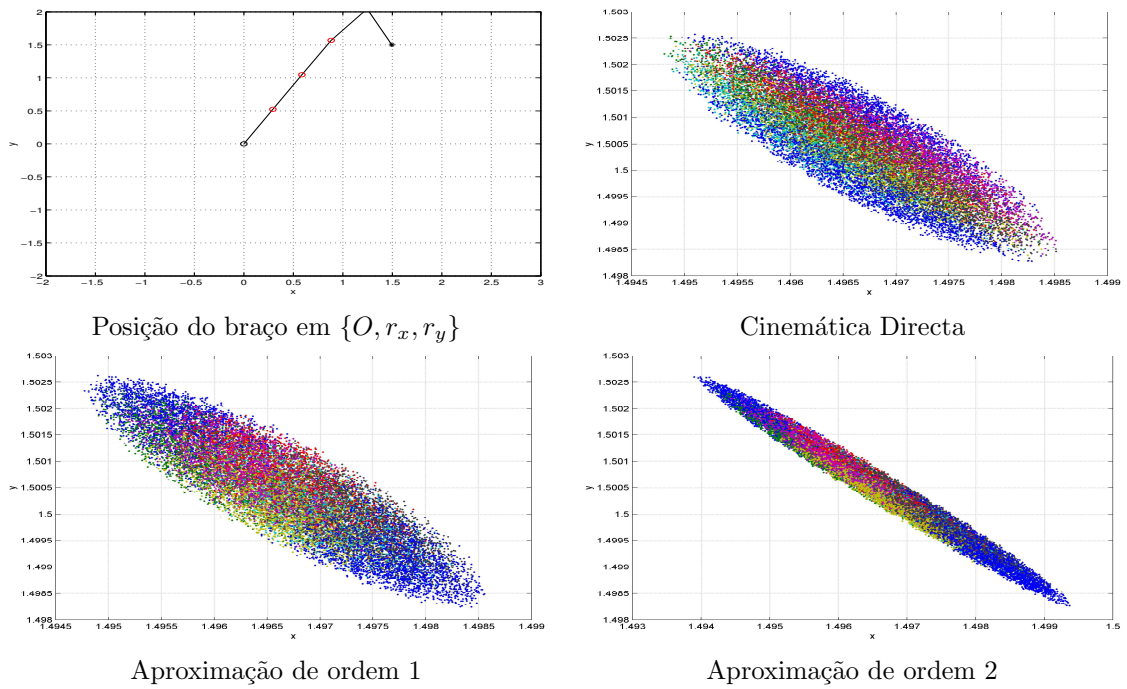


Figura 3.20: Mapeamento, no plano operacional, da vizinhança hiper-esférica, do espaço das juntas, de ponto de manipulabilidade máxima para robot 5R, para $r_s = 2.13 \text{ m}$. $\psi = 6.15$.

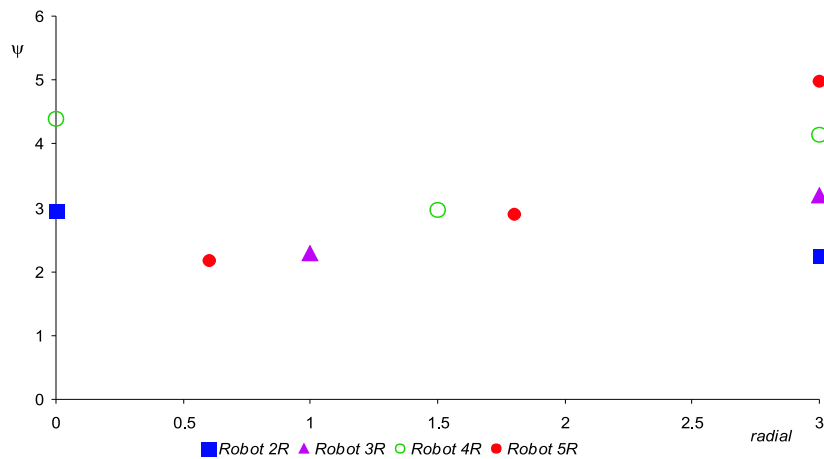


Figura 3.21: Coeficiente de amplificação (ψ) vs radial (r), na projecção de E em A_{xy} , de vizinhanças esféricas de pontos singulares para os robots 2R, 3R, 4R e 5R.

relação entre os acréscimos infinitesimais do espaço das juntas, $[dq_1, dq_2]^T$ e os respectivos acréscimo no espaço operacional, $[dx, dy]^T$ é dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 l_i C_{1i0} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 l_i S_{1i0} \\ -\frac{1}{2} l_2 C_{120} & -\frac{1}{2} l_2 S_{120} \\ -l_2 C_{120} & -l_2 S_{120} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1^2 \\ dq_2^2 \\ dq_1 dq_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^2 l_i S_{1i0} & \sum_{i=1}^2 l_i C_{1i0} \\ -l_2 S_{120} & l_2 C_{120} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde (q_{10}, q_{20}) é o centro, em $\{O, x, y\}$, da vizinhança em estudo.

Por exemplo, desenvolvendo a expressão (3.22) para o ponto singular que corresponde à distância radial $r = 0$, com $(q_{10}, q_{20}) = (0, \pi)$ rad, obtém-se:

$$\begin{aligned} dq_{12} &= \frac{l_1}{l_2} dq_1 - \frac{dy}{l_2} \\ \frac{dq_{12}^2}{2dx} \frac{l_2}{l_2} - \frac{dq_1^2}{2dx} \frac{l_1}{l_1} &= 1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

A solução desta condição são, no plano $\{O, dq_1, dq_{12}\}$, ($dq_{12} = dq_1 + dq_2$) os pontos de intersecção de uma recta com uma hipérbole. Como é fácil verificar esta condição poderá não ter solução, o que mostra que há trajectórias que ao passarem por pontos singulares, podem tornar-se impossíveis de serem descritas por um robot.

Se fosse considerado ponto singular correspondente a $r = 3$, $(q_{10}, q_{20}) = (0, 0)$ rad, obtém-se, no mesmo plano:

$$\begin{aligned} dq_{12} &= \frac{-l_1}{l_2} dq_1 + \frac{dy}{l_2} \\ \frac{dq_{12}^2}{-2dx} \frac{l_2}{l_2} + \frac{dq_1^2}{-2dx} \frac{l_1}{l_1} &= 1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

cuja solução são os pontos de intersecção de uma elipse com uma recta. A condição necessária para que a condição possa ter solução é que $dx < 0$, o que prova que por vezes não existe solução.

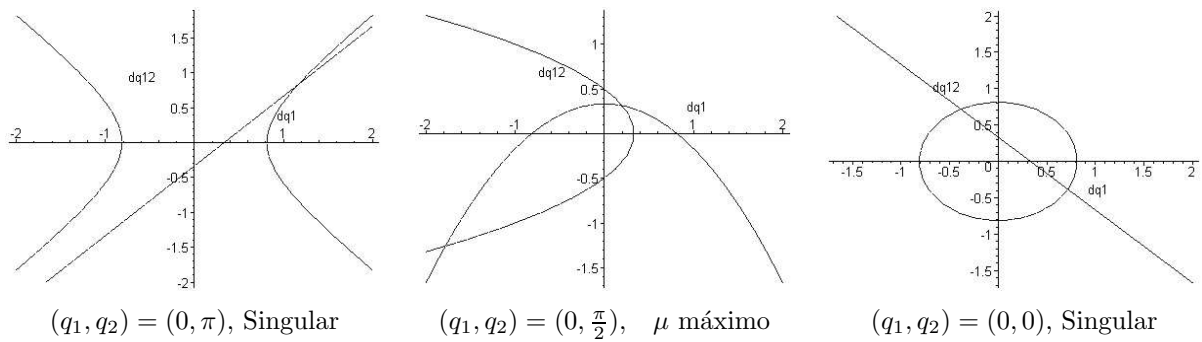


Figura 3.22: Solução no plano $\{O, dq_1, dq_{12}\}$ para vizinhança esférica, do espaço $\{O, q_1, q_2\}$ robot $2R$, para $r \in \{0, 1.5\sqrt{2}, 3\}$ m com $(dx, dy) = (-0.5, 0.5)$.

3.4. Manipulabilidade de Sistemas Robóticos

Um aspecto importante num sistema de manipulação, consiste na possibilidade de ser possível evitar as singularidades cinemáticas, que ocorrem quando a matriz jacobiana \mathbf{J} , para certas soluções \mathbf{q} , tem característica inferior a m ou seja $R(\mathbf{J}) < m$. Nestas situações o manipulador perde a capacidade de se mover em determinada direcção, significando isso que a sua *manipulabilidade* foi reduzida. Assim, "manipulabilidade" de um braço pode ser vista como a sua capacidade de movimentar o órgão terminal em qualquer direcção no espaço operacional [90], [36], [57].

Nesta secção define-se o conceito de manipulabilidade e um conjunto de índices que permitem avaliar numericamente essa mesma capacidade.

3.4.1. Elipsóide de Manipulabilidade

Considere-se um manipulador com n *gdl* e as suas relações cinemáticas, conforme o descrito na secção 3.2.2 e o conjunto de todas as velocidades do órgão terminal, $\dot{\mathbf{r}}$, obtidas quando as velocidades nas juntas, $\dot{\mathbf{q}}$, são tais que a norma Euclidiana de $\dot{\mathbf{q}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2} \quad (3.25)$$

satisfaz a relação $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$. Este conjunto de valores define um elipsóide no espaço Euclidiano m -dimensional. O eixo maior (menor) do elipsóide, define a direcção

onde o órgão terminal tem a capacidade de se mover mais rapidamente (lentamente). Se o elipsóide for aproximadamente uma esfera, o órgão terminal terá a capacidade de se mover, de forma uniforme, em todas as direcções. Por outro lado quanto "maior" for o elipsóide, tanto maior será a velocidade com que o órgão terminal se poderá mover. Então, a forma e tamanho do elipsóide pode ser interpretada como uma medida da capacidade de manipulação, chamada *elipsóide de manipulabilidade* [3]. A Fig. 3.23 mostra uma representação esquemática deste conceito.

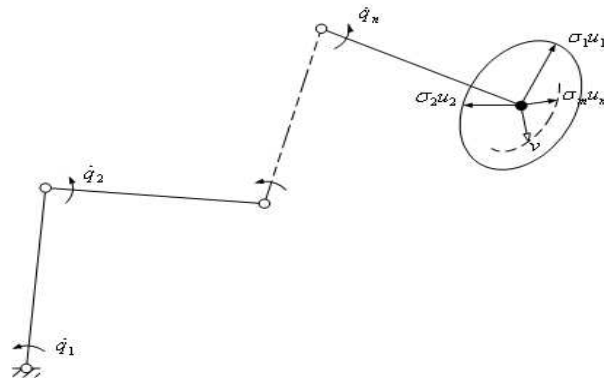


Figura 3.23: Elipsóide de manipulabilidade.

Prova-se que a elipsóide de manipulabilidade [11] é dada pelo conjunto de todos os valores de $\dot{\mathbf{r}}$ que satisfazem a relação

$$\dot{\mathbf{r}}^T (\mathbf{J}^\#)^T \mathbf{J}^\# \dot{\mathbf{r}} \leq \epsilon, \quad \dot{\mathbf{r}} \in I(\mathbf{J}) \quad (3.26)$$

onde $I(\mathbf{J})$ representa o espaço das colunas de $\mathbf{J}(\mathbf{q})$.

Os eixos principais da elipsóide de manipulabilidade podem ser determinados fazendo a decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{J} , de acordo com o descrito nas equações (2.61) a (2.65), vindo

$$\mathbf{J}^\# = \mathbf{V} \sum^\# \mathbf{U}^T \quad (3.27)$$

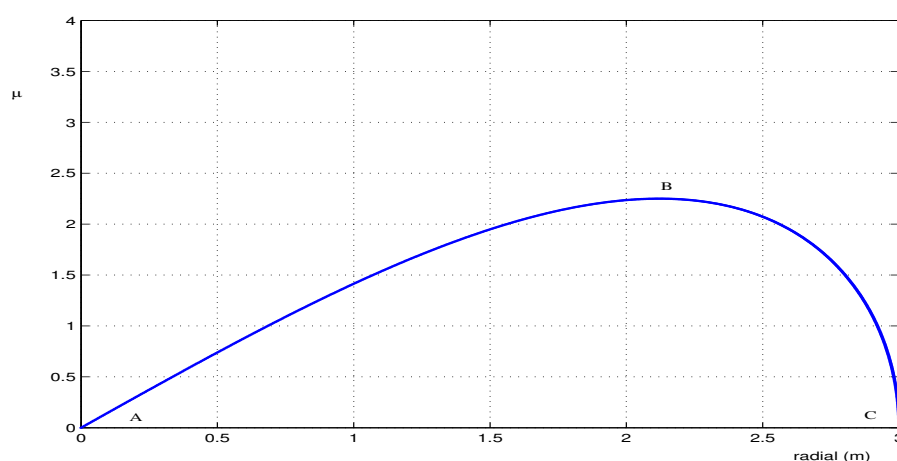
Prova-se que os eixos principais do elipsóide tem a direcção definida por σ_i e comprimento dado por $\sigma_i \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Uma das medidas representativas desta capacidade de manipulabilidade derivada da elipsóide de manipulabilidade é o volume do próprio elipsóide.

Assim, para além do método analítico clássico [3], [23], [36], [31], desenvolveu-se um método numérico, que permite obter a área do elipsóide plano (note-se que, neste caso, a dimensão do espaço operacional é $m = 2$) como uma medida da capacidade de manipulação.

Para um determinado ponto do espaço operacional $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0]^T$, o método consiste na geração de uma amostra numérica de p pontos aleatoriamente distribuídos no interior de uma esfera, no espaço das juntas, de centro $\mathbf{q}_0 = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ e raio ρ , tais que $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| < \rho$ onde $f(\mathbf{q}_0) = \mathbf{r}_0$ e, de seguida, mapear esses pontos para o espaço operacional, de acordo com (3.6), por forma a obter um conjunto de pontos correspondentes a um elipsóide. O tamanho e a forma de cada elipsóide determina a "amplificação" entre o espaço das juntas e o espaço operacional. Essa amplificação está relacionada com os valores próprios do Jacobiano cinemático do manipulador e corresponde à área do elipsóide. Para $m = 2$, obviamente, a manipulabilidade μ varia no espaço de trabalho, isto é, $\mu = \mu(r_x, r_y)$.

As Figs. 3.24 - 3.27 mostram a evolução do elipsóide de manipulabilidade, para os manipuladores $2R$, $3R$, $4R$ e $5R$, quando o órgão terminal se desloca, ao longo da recta $r_y = r_x$, desde a posição $[r_x, r_y]^T = [0, 0]^T$ até à posição $[r_x, r_y]^T = [\sqrt{3}, \sqrt{3}]^T$ com $l_1 = l_2 = \dots = l_n$ e $l_1 + l_2 + \dots + l_n = 3m$.



	A	B	C
q_1	0	0	0
q_2	π	$\pi/2$	0

Figura 3.24: Manipulabilidade para robot $2R$ vs r . A e C pontos singulares. B ponto de manipulabilidade máxima.

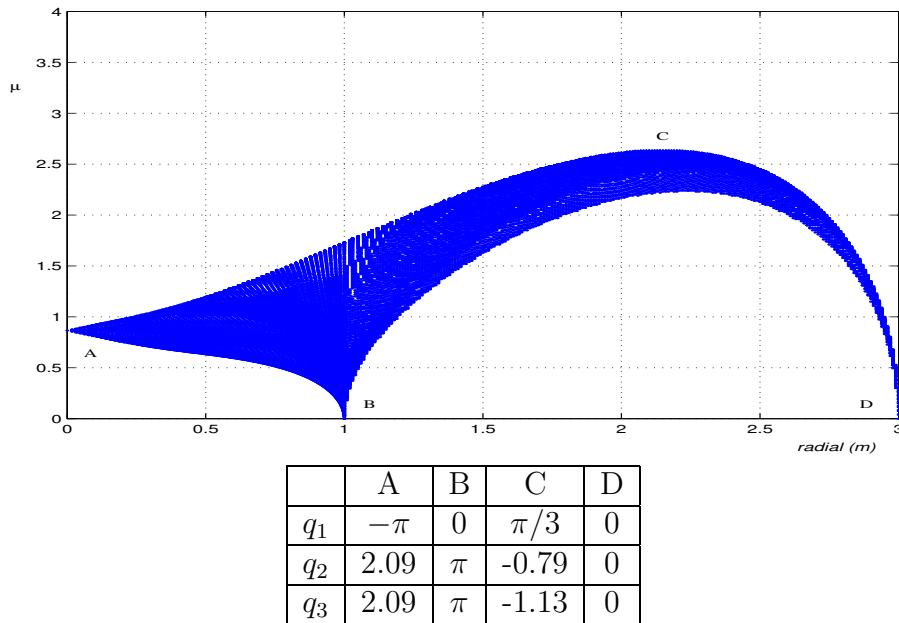


Figura 3.25: Manipulabilidade para robot $3R$ vs r . B e D pontos singulares. C ponto de manipulabilidade máxima.

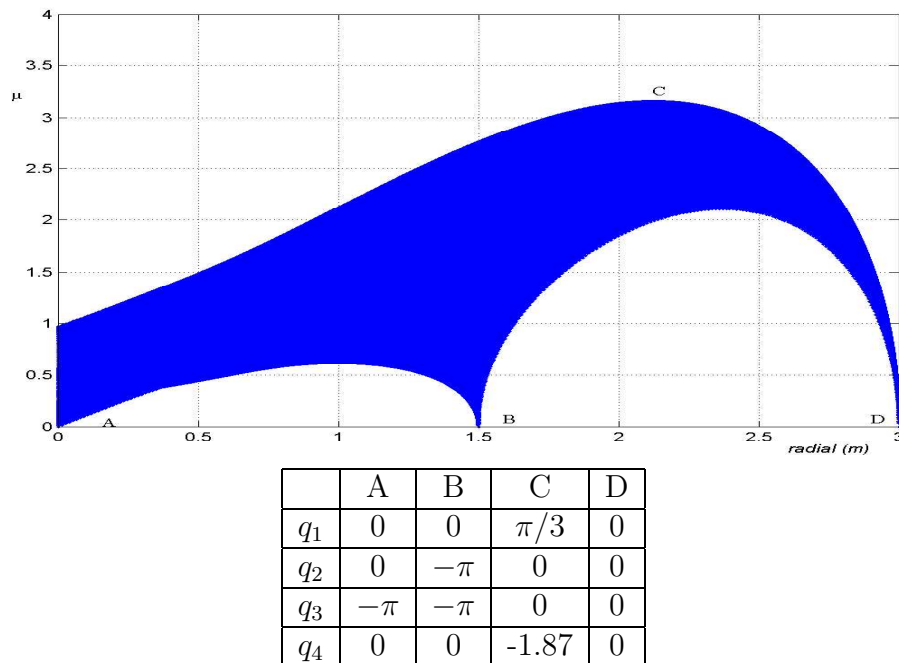
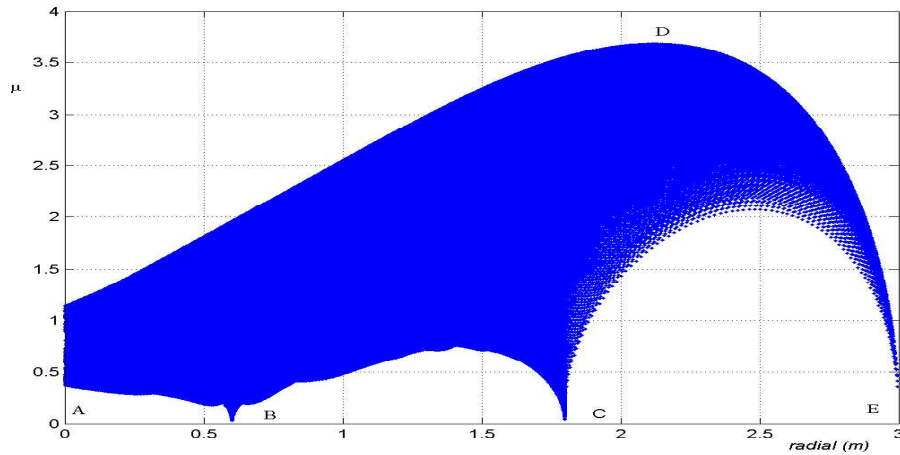


Figura 3.26: Manipulabilidade para robot $4R$ vs r . A, B e D pontos singulares. C ponto de manipulabilidade máxima.

3.4.2. Manipulabilidade Cinemática

Uma medida analítica da manipulabilidade para um braço manipulador foi definida por Yoshikawa como



	A	B	C	D	E
q_1	2.36	0	0	1.06	0
q_2	0	0	0	0	0
q_3	-2.06	π	0	0	0
q_4	-1.12	0	0	-0.14	0
q_5	-0.98	π	$-\pi$	-2.06	0

Figura 3.27: Manipulabilidade para robot 5R vs r. B, C e E pontos singulares. D ponto de manipulabilidade máxima.

$$\mu = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (3.28)$$

Para um manipulador planar com dois graus de liberdade ($n = 2$), esse valor será dado por

$$\mu = |l_1 l_2 S_2| \quad (3.29)$$

Para este mecanismo a configuração de manipulabilidade máxima é obtida quando $q_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ para quaisquer valores de l_1 , l_2 e q_1 . Por outro lado, se $l_1 + l_2 = \text{constante}$, então a manipulabilidade máxima é alcançada para $l_1 = l_2$.

Quando se estuda o braço humano como um mecanismo com dois graus de liberdade (não tomando em consideração os graus de liberdade do ombro e do pulso) verifica-se que este satisfaz a relação $l_1 \simeq l_2$. Além disso, quando usamos a mão para executar uma tarefa com precisão, o ângulo do cotovelo é normalmente próximo de $\frac{\pi}{2}$ rad. Isto mostra que, de forma espontânea, os humanos usam posturas para o seu braço que são as melhores,

do ponto de vista da manipulabilidade [89], [75].

Para um manipulador planar redundante $3R$, existe uma maior dificuldade em determinar a configuração óptima (no sentido da manipulabilidade máxima) e as singularidades, já que o índice de manipulabilidade μ é função de três parâmetros e duas variáveis, a saber l_1, l_2, l_3 , e q_2, q_3 . Note-se que o valor de μ é independente do valor de q_1 , em qualquer dos manipuladores planares em estudo. Assim, para o robot $3R$ o valor de μ pode ser calculado usando a expressão (3.30).

No caso de manipuladores com quatro ou mais graus de liberdade, as dificuldades referidas anteriormente para o cálculo de configurações de manipulabilidade máxima e de singularidades aumentam, já que μ é função de um maior número de parâmetros e variáveis. A expressão (3.31) define a relação entre o valor de μ , os parâmetros l_i ($i = 1, \dots, 4$) e as variáveis q_j ($j = 2, 3, 4$) para um manipulador $4R$.

Por seu lado a expressão (3.32) relaciona o valor de μ , os parâmetros l_i ($i = 1, \dots, 5$) e as variáveis q_j ($j = 2, \dots, 5$) para para um manipulador $5R$.

$$\mu = \frac{1}{2} \left[4l_1^2 l_2 l_3 \cos(q_3) - 4l_1^2 l_2 l_3 \cos(2q_2 + q_3) + 4l_1 l_2 l_3^2 (\cos(q_2) - \cos(q_2 + 2q_3)) \right. \\ \left. + 4l_3^2 (l_1^2 + l_2^2) - 4l_2^2 l_3^2 \cos(2q_3) + 2l_1^2 l_2^2 - 4l_1^2 l_3^2 \cos(2(q_2 + q_3)) - 2l_1^2 l_2^2 \cos(2q_2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.30)$$

$$\mu = \left[\frac{1}{2} (l_1^2 l_2^2 + 2l_1^2 l_3^2 + 2l_2^2 l_3^2 + (3l_1^2 + 4l_2^2 + 3l_3^2) l_4^2 + 2l_1 l_2 (l_3^2 + 2l_4^2) \cos(q_2) \right. \\ - l_1^2 l_2^2 \cos(2q_2) + 2l_1^2 + l_2 l_3 \cos(q_3) + 4l_2 l_3 l_4^2 \cos(q_3) - 2l_2^2 l_3^2 \cos(2q_3) \\ + 2l_1 l_3 l_4^2 \cos(q_2 + q_3) - 2l_1^2 l_3^2 \cos(2(q_2 + q_3)) - 2l_1^2 l_2 l_3 \cos(2q_2 + q_3) \\ - 2l_1 l_2 l_3^2 \cos(q_2 + 2q_3) + 2l_1 l_2 l_3 l_4 \cos(q_2 - q_4) + 4l_1^2 l_3 l_4 \cos(q_4) + 4l_2^2 l_3 l_4 \cos(q_4) \\ - 3l_3^2 l_4^2 \cos(2q_4) + 2l_1 l_2 l_3 l_4 \cos(q_2 + q_4) + 2l_1^2 l_2 l_4 \cos(q_3 + q_4) - 4l_2^2 l_4^2 \cos(2(q_3 + q_4)) \\ - 3l_1^2 l_4^2 \cos(2(q_2 + q_3 + q_4)) - 2l_1^2 l_2 l_4 \cos(2q_2 + q_3 + q_4) - 4l_2^2 l_3 l_4 \cos(2q_3 + q_4) \\ - 4l_1 l_2 l_3 l_4 \cos(q_2 + 2q_3 + q_4) - 4l_1^2 l_3 l_4 \cos(2(q_2 + q_3) + q_4) - 4l_2 l_3 l_4^2 \cos(q_3 + 2q_4) \\ \left. - 2l_1 l_3 l_4^2 \cos(q_2 + q_3 + 2q_4) - 4l_1 l_2 l_4^2 \cos(q_2 + 2(q_3 + q_4))) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
\mu = & \left[\frac{1}{2} (3l_3^2 l_4^2 + 2l_2^2 (l_3^2 + 2l_4^2) + l_1^2 (l_2^2 + 2l_3^2 + 3l_4^2)) + (2l_1^2 + 3(l_2^2 + 2l_3^2) + 2l_4^2) l_5^2 \right. \\
& + l_1 l_2 (l_3^2 + 2l_4^2 + 3l_5^2) \cos(q_2) - \frac{1}{2} l_1^2 l_2^2 \cos(2q_2) + l_1^2 l_2 l_3 \cos(q_3) + 2l_2 l_3 l_4^2 \cos(q_3) \\
& + 2l_1 l_3 l_4^2 \cos(q_2 + q_3) - 2l_1^2 l_3^2 \cos(2(q_2 + q_3)) - 2l_1^2 l_2 l_3 \cos(2q_2 + q_3) \\
& + 4l_2 l_3 l_5^2 \cos(q_3) - l_2^2 l_3^2 \cos(2q_3) + l_1 l_3 l_4^2 \cos(q_2 + q_3) + 2l_1 l_3 l_5^2 \cos(q_2 + q_3) \\
& - l_1^2 l_3^2 \cos(2(q_2 + q_3)) - l_1^2 l_2 l_3 \cos(2q_2 + q_3) - l_1 l_2 l_3^2 \cos(q_2 + 2q_3) \\
& + l_1 l_2 l_3 l_4 \cos(q_2 - q_4) + 2l_1^2 l_3 l_4 \cos(q_4) + 2l_2^2 l_3 l_4 \cos(q_4) + 3l_3 l_4 l_5^2 \cos(q_4) \\
& - \frac{3}{2} l_3^2 l_4^2 \cos(2q_4) + l_1 l_2 l_3 l_4 \cos(q_2 + q_4) + l_1^2 l_2 l_4 \cos(q_3 + q_4) + 2l_2 l_4 l_5^2 \cos(q_3 + q_4) \\
& - 2l_2^2 l_4^2 \cos(2(q_3 + q_4)) + l_1 l_4 l_5^2 \cos(q_2 + q_3 + q_4) - \frac{3}{2} l_1^2 l_4^2 \cos(2(q_2 + q_3 + q_4)) \\
& - l_1^2 l_2 l_4 \cos(2q_2 + q_3 + q_4) - 2l_2^2 l_3 l_4 \cos(2q_3 + q_4) - 2l_1 l_2 l_3 l_4 \cos(q_2 + 2q_3 + q_4) \\
& - 2l_1^2 l_3 l_4 \cos(2(q_2 + q_3) + q_4) - 2l_2 l_3 l_4^2 \cos(q_3 + 2q_4) - l_1 l_3 l_4^2 \cos(q_2 + q_3 + 2q_4) \\
& - 2l_1 l_2 l_4^2 \cos(q_2 + 2(q_3 + q_4)) + 2l_1 l_2 l_4 l_5 \cos(q_2 - q_5) + 2l_2 l_3 l_4 l_5 \cos(q_3 - q_5) \\
& + l_1 l_3 l_4 l_5 \cos(q_2 + q_3 - q_5) + l_1 l_2 l_3 l_5 \cos(q_2 - q_4 - q_5) + 3l_1^2 l_4 l_5 \cos(q_5) \\
& + l_2^2 l_4 l_5 \cos(q_5) + 3l_3^2 l_4 l_5 \cos(q_5) - 2l_4^2 l_5^2 \cos(2q_5) + 2l_1 l_2 l_4 l_5 \cos(q_2 + q_5) \\
& + 2l_2 l_3 l_4 l_5 \cos(q_3 + q_5) + l_1 l_3 l_4 l_5 \cos(q_2 + q_3 + q_5) + 2l_1^2 l_3 l_5 \cos(q_4 + q_5) \\
& + 2l_2^2 l_3 l_5 \cos(q_4 + q_5) - 3l_3^2 l_5^2 \cos((2q_4 + q_5)) + l_1 l_2 l_3 l_5 \cos(q_2 + q_4 + q_5) \\
& + l_1^2 l_2 l_5 \cos(q_3 + q_4 + q_5) - 3l_2^2 l_5^2 \cos(2(q_3 + q_4 + q_5)) \\
& - 2l_1^2 l_5^2 \cos(2(q_2 + q_3 + q_4 + q_5)) - l_1^2 l_2 l_5 \cos(2q_2 + q_3 + q_4 + q_5) \\
& - 2l_2^2 l_3 l_5 \cos(2q_3 + q_4 + q_5) - 2l_1 l_2 l_3 l_5 \cos(q_2 + 2q_3 + q_4 + q_5) \\
& - 2l_1^2 l_3 l_5 \cos(2q_2 + 2q_3 + q_4 + q_5) - 3l_3^2 l_4 l_5 \cos(2q_4 + q_5) \\
& - 2l_1 l_3 l_4 l_5 \cos(q_2 + q_3 + 2q_4 + q_5) - 4l_2^2 l_4 l_5 \cos(2(q_3 + q_4) + q_5) \\
& - 4l_1 l_2 l_4 l_5 \cos(q_2 + 2(q_3 + q_4) + q_5) - 3l_1^2 l_4 l_5 \cos(2(q_2 + q_3 + q_4) + q_5) \\
& - 3l_3 l_4 l_5^2 \cos(q_4 + 2q_5) - 2l_2 l_3 l_4 l_5^2 \cos(q_3 + q_4 + 2q_5) \\
& - l_1 l_4 l_5^2 \cos(q_2 + q_3 + q_4 + 2q_5) - 4l_2 l_3 l_5^2 \cos(q_3 + 2(q_4 + q_5)) \\
& \left. - 2l_1 l_3 l_5^2 \cos(q_2 + q_3 + 2(q_4 + q_5)) - 3l_1 l_2 l_5^2 \cos(q_2 + 2(q_3 + q_4 + q_5)) \right] \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

3.4.3. Variação do Índice de Manipulabilidade

Nas secções anteriores adoptou-se, por uma questão de simplicidade, $l_i = \frac{l_T}{n}$, ($i = 1, \dots, n$, $l_T = 3 \text{ m}$). Todavia, deve notar-se que a variação de μ com os parâmetros l_i pode conduzir a valores consideravelmente diferentes. Apesar de não ser objectivo deste trabalho aprofundar este aspecto, mostram-se de seguida alguns gráficos relativos à evolução da manipulabilidade para vários casos.

Assim, a Fig. 3.28 mostra, para o robot $3R$ a variação de μ para algumas das combinações de comprimentos dos elos l_1, l_2, l_3 , (tais que $l_1 + l_2 + l_3 = 3 \text{ m}$) quando $q_2 \in [-\pi, \pi]$ e $q_3 \in [-\pi, \pi]$.

Pore outro lado, a Fig. 3.29 mostra a evolução da máxima manipulabilidade μ_{max} vs a distância radial r , para os robots $3R, 4R$ e $5R$, considerando diferentes conjuntos de valores dos parâmetros l_i , ($i = 1, \dots, n$). Da análise destas figuras resulta óbvio que é possível obter valores de μ crescentes com o *ngl*. No entanto, a definição do "melhor" conjunto de parâmetros l_i não é claro, pois podem ser escolhidos diferentes conjuntos de acordo com o intervalo de valores permitido para r . Nesta perspectiva, afigura-se necessário definir índices auxiliares que complementem a informação fornecida por μ .

3.5. Dinâmica

A derivação de um modelo da dinâmica de um manipulador tem um papel importante na simulação de movimento, na análise das estruturas do manipulador e na construção de algoritmos de controlo. A simulação do movimento permite testar estratégias de controlo e de planeamento de trajectórias sem a necessidade de ter disponível um modelo real. A análise do modelo dinâmico também pode ser útil no projecto de novas estruturas mecânicas.

A mecânica Newtoniana ou o formalismo de Lagrange, permitem vias alternativas para o desenvolvimento das equações da dinâmica. Exemplos de aplicação destes conceitos são as formulações de Lagrange-Euler e Newton-Euler que podem ser aplicadas sistematicamente para a modelação das equações do movimento.

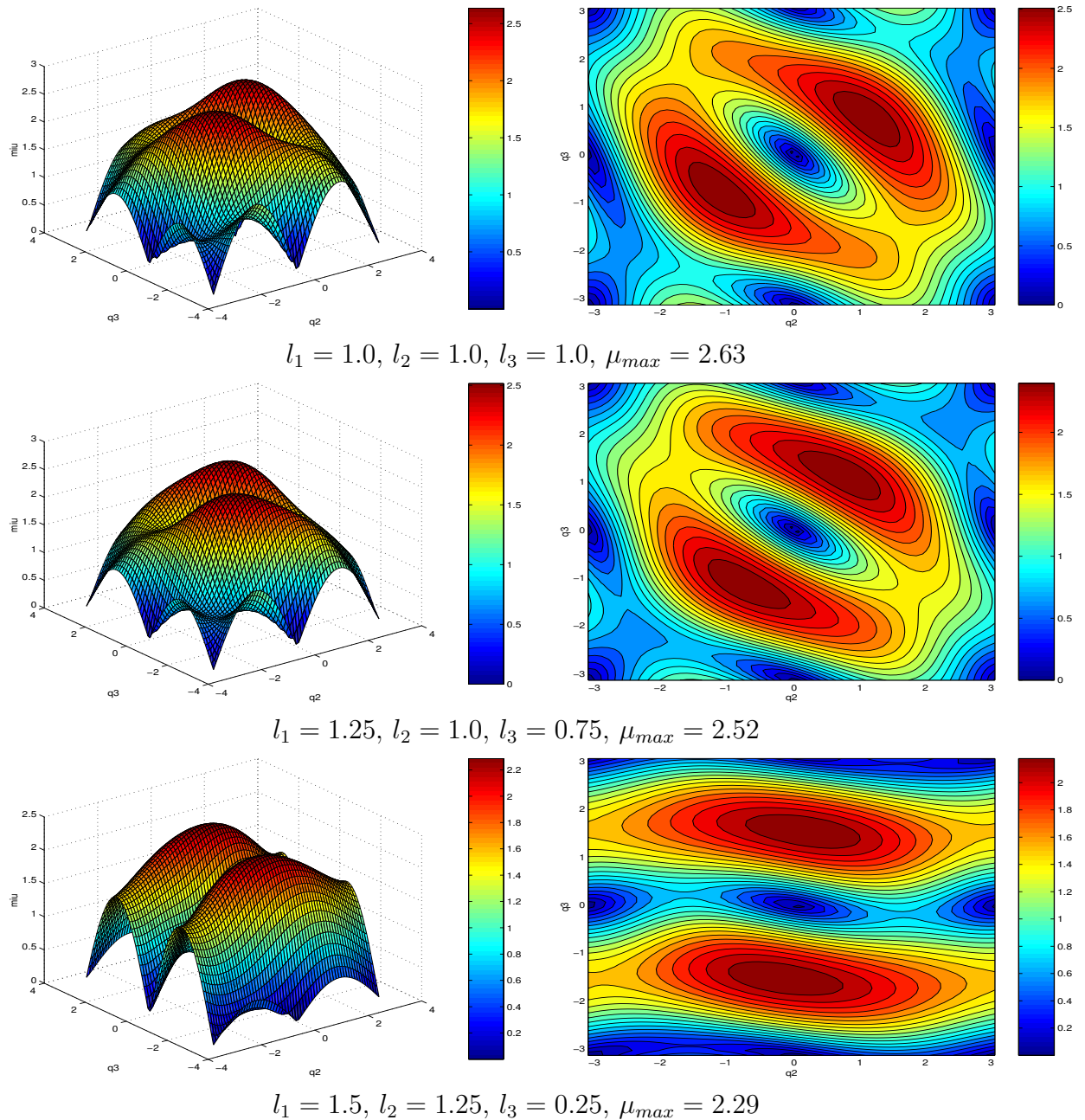
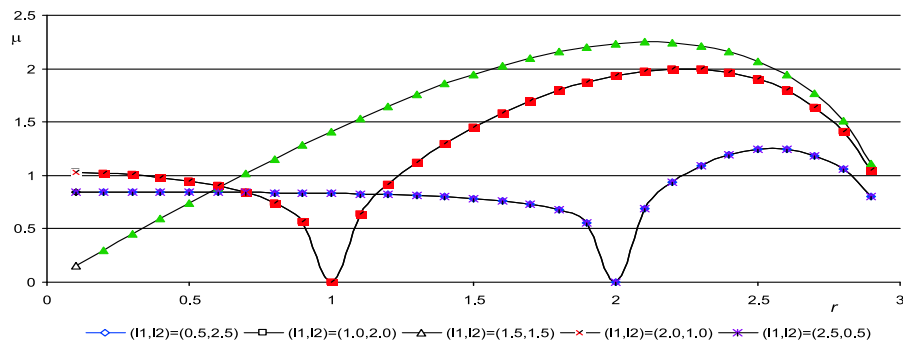
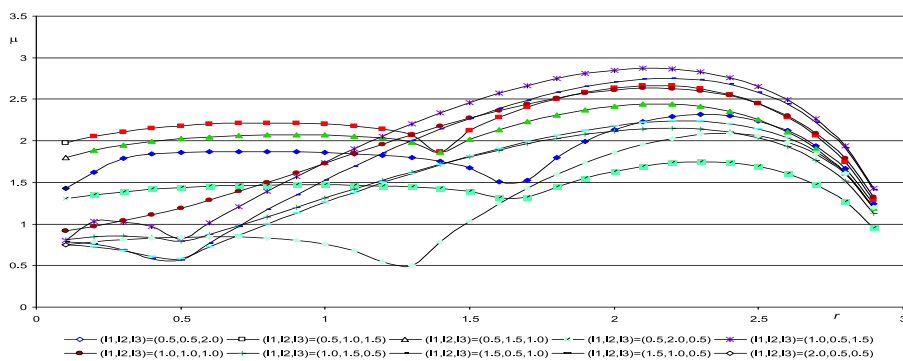


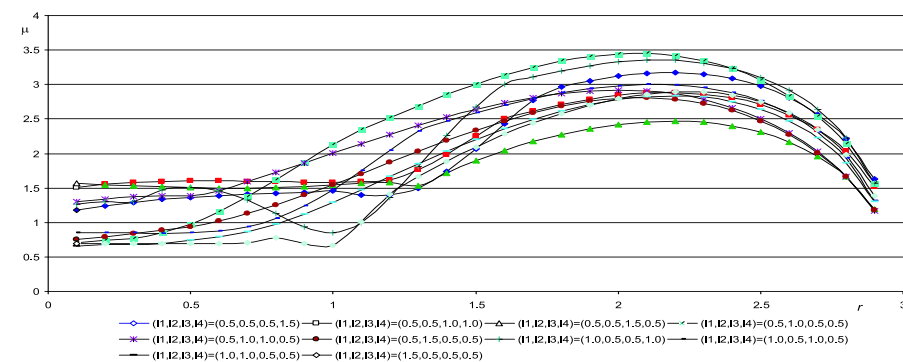
Figura 3.28: Índice de manipulabilidade μ , para robot 3R, com $q_2 \in [-\pi, \pi]$ e com $q_3 \in [-\pi, \pi]$.



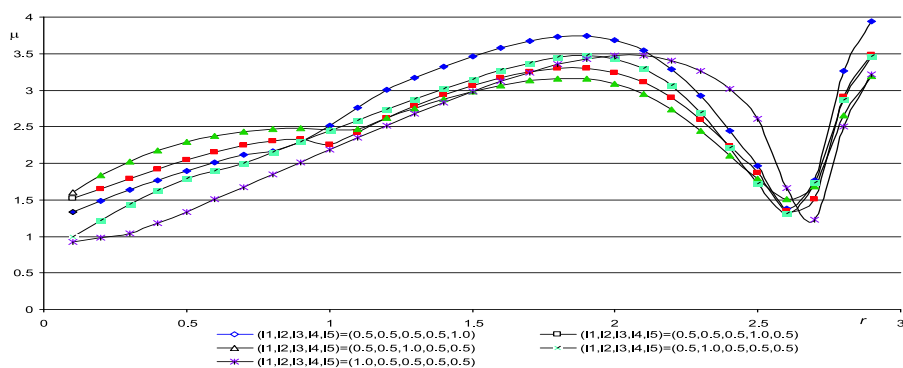
Robot 2R



Robot 3R



Robot 4R



Robot 5R

Figura 3.29: Variação do valor da manipulabilidade μ com os parâmetros l_i , para robots 2R, 3R, 4R e 5R.

Actualmente estão estudadas "variantes" destas abordagens, para robot de estruturas rígidas articuladas em cadeia aberta com juntas rotacionais, tais como em [75], [30], [38] e [42]. Estes métodos são equivalentes, pois descrevem o mesmo comportamento dinâmico, e só diferem na maneira como são calculados os algoritmos. Alguns permitem uma maior rapidez de processamento, e outros, facilitam a análise da dinâmica e o desenvolvimento de algoritmos de controlo.

A derivação de um modelo dinâmico baseado na formulação de Newton-Euler, é simples e sistemática. Assumindo um movimento de um sistema multi-corpo rígido, as equações resultantes, excluindo a dinâmica dos actuadores, folgas e atrito das engrenagens, formam um conjunto de equações diferenciais não lineares de segunda ordem. Apesar da sua representação no espaço de estados potenciar a implementação de um controlador e uma melhor interpretação dos resultados, a quantidade considerável de operações aritméticas envolvidas na manipulação das matrizes de transformação homogéneas desencoraja a sua utilização.

Alternativamente existe a formulação de Lagrange que resulta num conjunto de equações recursivas que consideram a propagação de forças desde o elemento terminal até à base. Um dos aspectos positivos é, sem dúvida, a facilidade de obtenção das expressões, que varia com o número de *gdl* do robot. Um dos aspectos menos positivos é o facto deste método não traduzir uma solução explícita, apresentando um vector de natureza recursiva.

Uma outra aproximação que obtém um conjunto de equações dinâmicas explícitas, é baseado no princípio generalizado de *d'Alembert*. Este método proporciona uma certa rapidez de cálculo, explorando uma versão compacta das matrizes de transformação de Euler em conjunto com a descrição dos vectores de deslocamento relativo entre juntas sucessivas.

Nesta secção pretende-se apresentar a construção de um modelo recursivo que permite obter as equações da dinâmica que, dada a posição, velocidade e aceleração, fornecem os valores dos binários/forças aplicadas a cada junta, usando a formulação Lagrangeana.

As equações da dinâmica para um robot planar são da forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.33)$$

onde \mathbf{T} é o vector $n \times 1$ dos binários dos actuadores, \mathbf{q} é o vector $n \times 1$ das coordenadas das juntas, $\dot{\mathbf{q}}$, é o vector $n \times 1$ das velocidades dos elos, $\ddot{\mathbf{q}}$ é o vector $n \times 1$ das acelerações dos elos, $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é a matriz simétrica de inércia $n \times m$, $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é o vector $n \times 1$ das componentes centrífugas/Coriolis e $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é o vector $n \times 1$ das componentes gravitacionais.

Para encontrar uma equação geral, parte-se das equações de posição e velocidade do centro de massa de cada elo do robot para determinar as respectivas energias cinética e potencial.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2; \quad E_p = mgy; \quad L = E_c - E_p \quad (3.34)$$

onde E_c representa a energia cinética, E_p a energia potencial e L a função lagrangeana.

Utilizando a função lagrangeana, na fórmula de Lagrange, desenvolveu-se um algoritmo recursivo que permite a geração das equações das forças generalizadas correspondentes a cada coordenada generalizada, para um robot manipulador do tipo kR .

Como neste estudo as coordenadas generalizadas são ângulos então as forças generalizadas são binários, de acordo com:

$$F_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.35)$$

onde F_i é a força generalizada da junta i , \mathbf{q}_i a coordenada generalizada da junta i e $\dot{\mathbf{q}}_i$ a correspondente derivada, em ordem ao tempo. O algoritmo recursivo que foi desenvolvido, tem como expressão geral a seguinte:

$$\begin{aligned} T_{n,j} = & \sum_{i=j}^n m_i \left\langle \sum_{p=1}^{i-1} (l_p^2 \sum_{u=1}^p \ddot{q}_u \gamma_1) + r_i^2 \sum_{u=1}^i \ddot{q}_u + \right. \\ & + \sum_{p=2}^i \left\{ \sum_{k=1}^{p-1} \left[l_k (l_p \gamma_2 + r_p \gamma_3) \left(\left(-S_{k+1..p} \left(\left(\sum_{u=k+1}^p \dot{q}_u \right)^2 + 2 \sum_{u=1}^k \dot{q}_u \sum_{u=k+1}^p \dot{q}_u \right) + \right. \right. \right. \\ & + C_{k+1..p} \left(\sum_{u=1}^p \ddot{q}_u + \sum_{u=1}^k \ddot{q}_u \right) \gamma_4 + \left. \left. \left. \left(S_{k+1..p} \left(\sum_{u=1}^k \dot{q}_u \right)^2 + C_{k+1..p} \sum_{u=1}^k \ddot{q}_u \right) \gamma_5 \right) \right] \right\} + \\ & + g \left(\sum_{p=1}^{i-1} l_p C_{1..p} \gamma_1 + r_i C_{1..i} \right) \rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

n é o número total de elos do manipulador, $j = (1, 2, \dots, n)$ é a ordem do elo a calcular (para o cálculo de todos os elos $j = 0$), m_i e r_i são, respectivamente, a massa e o centro de massa do elo i , g é a aceleração da gravidade e γ_i ($i = 1, \dots, 6$) são variáveis lógicas que tomam os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} 0, & \text{se } j > p \\ 1, & \text{se } j \leq p \end{cases} & \gamma_2 &= \begin{cases} 0, & \text{se } p > i - 1 \\ 1, & \text{se } p \leq i - 1 \end{cases} \\ \gamma_3 &= \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq i \\ 1, & \text{se } p = i \end{cases} & \gamma_4 &= \begin{cases} 0, & \text{se } j > k \\ 1, & \text{se } j \leq k \end{cases} \\ \gamma_5 &= \begin{cases} 0, & \text{se } (j < k + 1) \vee (j > p) \\ 1, & \text{se } k + 1 \leq j \leq p \end{cases} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Note-se a inclusão de variáveis lógicas conjuntamente com as expressões analíticas. Esta formulação é particularmente útil para o desenvolvimento de um algoritmo que gera automaticamente a expressão (e o ficheiro) de $T(n, i)$ ($i = 1, \dots, n$). Nessa perspectiva, a expressão (3.36) foi implementada no programa Mathematica, permitindo obter facilmente todas as expressões necessárias aos capítulos seguintes.

3.6. Resumo do capítulo

Neste capítulo foram analisadas as singularidades cinemáticas com base na topologia das configurações singulares no espaço das juntas. De seguida, foi estudada a variação do índice de manipulabilidade com a configuração do robot e com o comprimento dos elos, tendo sido apresentadas expressões analíticas que permitem o cálculo de μ para os robots $2R$, $3R$ e $4R$. Por último foi apresentado um algoritmo recursivo que permite obter facilmente as equações da dinâmica para um robot redundante de n *gdl*.

Capítulo 4

Planeamento de Trajectórias

Um robot redundante apresenta capacidades superiores às de um robot convencional, permitindo a escolha de várias configurações e trajectórias para a execução de uma determinada tarefa. No entanto, verifica-se alguma dificuldade na selecção, problema que se prende com a não linearidade do mapeamento das posições das juntas em relação à posição do órgão terminal. Além disso, muitos dos esquemas de solução da redundância são de natureza local, já que vão determinando as posições das juntas invertendo (em cada instante de amostragem) a relação entre as velocidades do órgão terminal e das juntas ao longo da trajectória.

Uma falha dos métodos com natureza local é que, geralmente são não "periódicos", *i.e.* conduzem a posições não repetitivas das juntas quando o órgão terminal é sujeito a uma trajectória cíclica [39]. Esta situação não é desejável já que ocorrem movimentos bruscos e "inesperados" nas juntas que anulam as potenciais vantagens da estrutura redundante.

Como é sabido, para muitas tarefas, o órgão terminal de um manipulador deve deslocar-se de um ponto inicial para um ponto terminal. O conjunto de pontos que especifica o caminho a seguir, em função do tempo, é referido como a *trajectória* a descrever. As posições, as velocidades e mesmo as acelerações são frequentemente incluídas na definição da *trajectória*. Por outro lado, quando se define uma trajectória, a velocidade e aceleração máximas permitidas imporão restrições no planeamento do movimento. O caminho a percorrer pelo órgão terminal é facilmente visualizado no espaço operacional. Contudo, é normalmente mais difícil imaginar a trajectória correspondente no espaço das juntas. Assim, se a *trajectória* desejada é definida no espaço operacional e o controlo

do manipulador é feito no espaço das juntas, é necessário converter os pontos do espaço operacional para o espaço das juntas usando a cinemática.

4.1. Modelização Manipuladores Redundantes

Esta secção apresenta os conceitos associados à "generalização" das estruturas clássicas de manipulação na perspectiva da introdução de mais *graus de liberdade (gdl)*, por forma a constituir robots redundantes.

Um manipulador redundante é um braço que possui mais *gdl* do que os necessários para que o órgão terminal alcance uma posição arbitrária no espaço de trabalho (Figura 4.1).

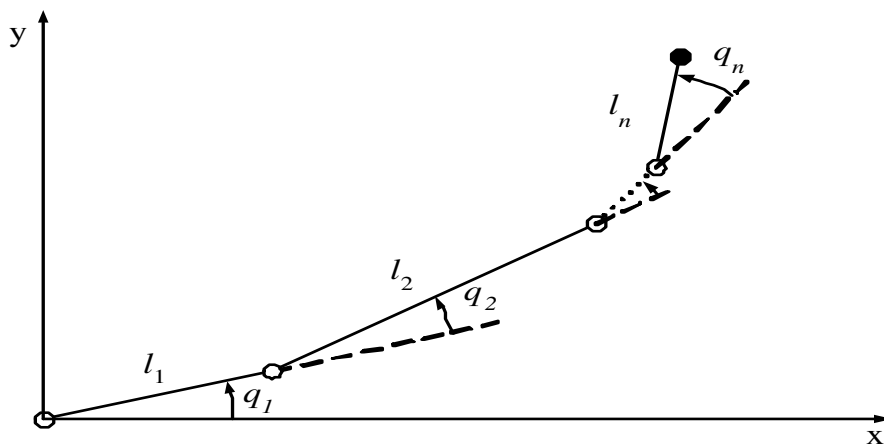


Figura 4.1: Um manipulador redundante, *kR*, planar

Os robots redundantes oferecem várias vantagens potenciais sobre as estruturas não redundantes. Num espaço de trabalho com obstáculos os *gdl* extra podem ser usados para que o braço se mova por forma a evitar esses mesmos obstáculos e assim possibilitar a manipulação de objectos que, de outra forma, seria eventualmente impossível.

Quando um manipulador é redundante a cinemática inversa pode admitir um número infinito de soluções. Isto implica que, para uma determinada localização do órgão terminal, é possível induzir um movimento interno da estrutura sem mudar a localização do órgão terminal. Assim, os manipuladores redundantes podem reconfigurar-se por forma a encontrar "melhores posturas" mas, por outro lado, dada a maior complexidade da sua

estrutura requerem algoritmos de controlo mais sofisticados [13].

De seguida considera-se um manipulador planar com n *gdl* cujas variáveis de posicionamento, no espaço das juntas, são designadas por $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ e uma classe de tarefas que, no espaço de trabalho, são designadas por $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$, onde $m < n$.

A relação entre o vector das juntas \mathbf{q} e vector de manipulação \mathbf{x} corresponde à cinemática directa, sendo dada por:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q}) \quad (4.1)$$

Derivando (4.1) em relação ao tempo, resulta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.2)$$

onde $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \partial f(\mathbf{q}) / \partial(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então, a partir de (4.2) é possível o cálculo do caminho na desejada trajectória $\mathbf{x}(t)$, em termos de posições das juntas $\mathbf{q}(t)$. Uma solução em termos das velocidades das juntas, pode ser obtida pela resolução de (4.2).

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}} \quad (4.3)$$

onde \mathbf{K} é uma matriz ($n \times m$) de controlo apropriada baseada no Jacobiano. Se para \mathbf{K} se optar pela matriz pseudoinversa de \mathbf{J} , ou seja $\mathbf{J}^\#$, satisfazendo as condições (2.46) - (2.49), virá:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\#(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}} \quad (4.4)$$

Porém, uma solução mais geral da equação (4.4) é dada por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\#(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{I} - \mathbf{J}^\#(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (4.5)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade ($n \times n$) e $\dot{\mathbf{q}}_0$ é um vector ($m \times 1$) arbitrário de velocidades das juntas.

A solução (4.5) é composta por dois termos: o primeiro termo é relativo à norma mínima do vector de velocidades das juntas e o segundo termo (*solução homogénea*) serve para satisfazer a restrições adicionais especificadas por $\dot{\mathbf{q}}_0$. A matriz $\mathbf{I} - \mathbf{J}^\#(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})$ é uma matriz que representa a projecção de $\dot{\mathbf{q}}_0$ no núcleo de \mathbf{J} . Uma consequência directa da equação (4.5) consiste em existirem movimentos internos, que permitam uma reconfiguração da estrutura, sem ocorrer uma mudança da localização do órgão terminal [85], [9]. Nestas condições considera-se que é satisfeita a seguinte condição:

$$\text{Max}[r(\mathbf{J}(\mathbf{q}))] = m \quad (4.6)$$

Se a condição (4.6) é satisfeita, então o grau de *redundância do manipulador* é $\mathbf{n-m}$. Por outro lado, se, para um vector \mathbf{q} , se verificar:

$$r(\mathbf{J}(\mathbf{q})) < m \quad (4.7)$$

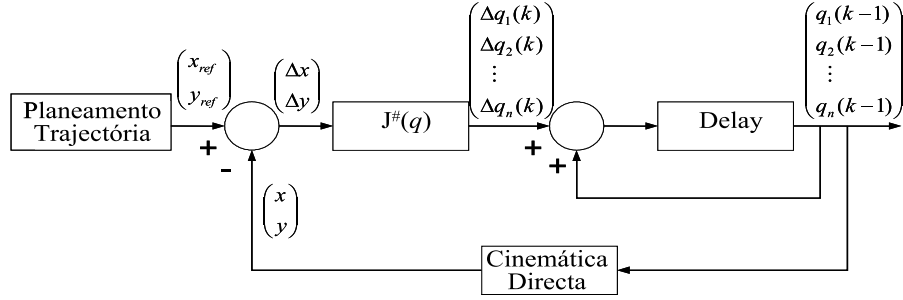
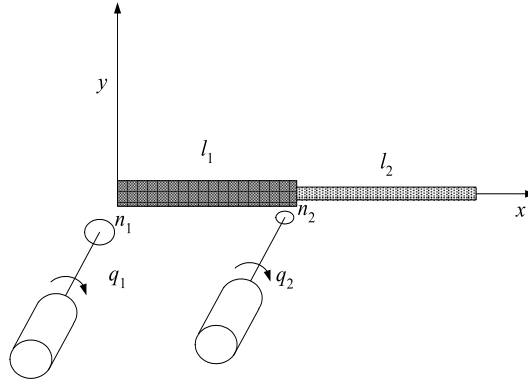
então o manipulador está num estado singular. Este estado não é desejável porque, nesta região, a capacidade de manipulação é muito limitada.

Nesta ordem de ideias de seguida são apresentados dois possíveis algoritmos de planeamento de trajectórias para robots redundantes: o método *PMF* (Pseudoinversa em Malha Fechada) e o método *MMA* (Manipulabilidade em Malha Aberta). No método *PMF* as posições das juntas são calculadas através da integração das velocidades das juntas, baseado nas equações (4.1)-(4.4). Por seu lado, o método *MMA* é baseado na selecção das posições das juntas que conduzem a um índice de manipulabilidade máximo, para uma determinada posição do órgão terminal.

4.2. O Método PMF

No método *PMF* as posições das juntas podem ser calculadas através da integração das velocidades (4.2) de acordo com o diagrama de blocos mostrado na Figura 4.1.

A fim de promover uma melhor compreensão do algoritmo e do papel da matriz pseudoinversa considere-se um robot redundante simples com a estrutura *PP*, Fig. 4.3.

Figura 4.2: Diagrama de blocos para o método *PMF*Figura 4.3: O robot redundante *PP*.

Suponha-se que existe uma engrenagem para cada eixo tal que

$$[x] = [n_1 \quad n_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde n_i e q_i ($i = 1, 2$) representam, respectivamente, a razão de transmissão e o deslocamento angular da junta i .

A partir da expressão (4.8) conclui-se facilmente que:

$$[dx] = \mathbf{J} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = [n_1 \quad n_2] \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^\# [dx], \quad \mathbf{J}^\# = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} \\ \frac{n_2}{n_1^2 + n_2^2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Vamos agora analisar (4.10) para dois casos especiais a saber

$$i) \quad n_1 = n_2 = n$$

$$ii) \quad n_1 \gg n_2$$

resultando:

i)

$$J^\# = \frac{1}{2n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{se } n_1 = n_2 \quad (4.11)$$

ii)

$$J^\# \approx \frac{1}{n_1} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix}, \quad \text{se } n_1 \gg n_2 \quad (4.12)$$

Assim conclui-se que para um determinada solicitação de deslocamento dx

i) as duas juntas contribuem igualmente para o deslocamento se $n_1 = n_2$, ou seja

$$\begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [dx].$$

ii) as duas juntas não contribuem de igual modo se $n_1 \gg n_2$, verificando-se uma maior amplificação da junta 1 pois $\frac{n_2}{n_1} \ll 1$, ou seja

$$\begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{n_1} \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \\ \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} [dx].$$

Em conclusão, a pseudoinversa "distribui" as solicitações de acordo com a "amplificação" da transmissão de cada junta.

No caso do robot PP a transmissão é fixa pelo que não ocorrem fenómenos de falta de repetibilidade quando da solicitação de trajectórias cíclicas à mão do robot. Todavia, para robots com estrutura mais complexa (*e.g.* o robot $3R$) a razão de transmissão não é constante e varia com a configuração. Por outras palavras, para um robot como o $3R$ a razão de transmissão varia com a posição angular e, conseqüentemente, $\mathbf{J}^\#$ varia na mesma proporção. O método PMF vai "adaptando" a variação dq ao longo de cada ciclo levando a configurações distintas após cada período.

Nesta perspectiva, considere-se agora o caso mais geral de um manipulador planar com k elos, sendo a cinemática directa e o Jacobiano definidos, respectivamente, pelas expressões:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} + \dots + l_k C_{12\dots k} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} + \dots + l_k S_{12\dots k} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - \dots - l_k S_{1\dots k} & \dots & -l_k S_{1\dots k} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + \dots + l_k C_{1\dots k} & \dots & l_k C_{1\dots k} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

onde l_i é o comprimento do elo i , $S_{i\dots k} = \text{Sin}(q_i + \dots + q_k)$ e $C_{i\dots k} = \text{Cos}(q_i + \dots + q_k)$. Em todas as experiências serão considerados os valores: $\Delta t = 0.001 \text{ seg}$, $l_T = l_1 + l_2 + \dots + l_k = 3 \text{ m}$, $l_1 = l_2 = \dots = l_k$, $m_T = m_1 + m_2 + \dots + m_k = 3 \text{ kg}$ e $m_1 = \dots = m_k$.

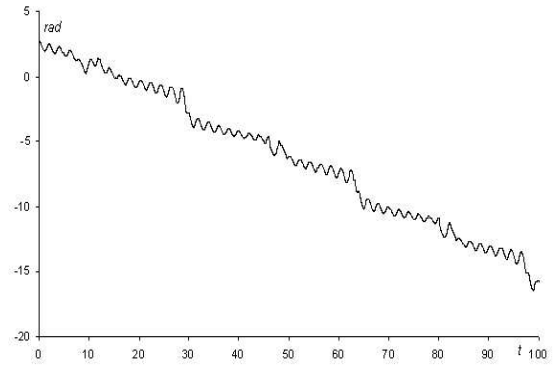
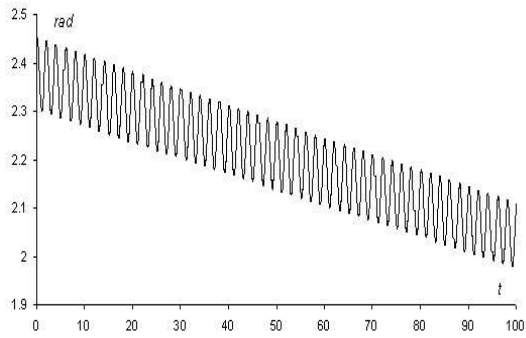
4.2.1. Respostas caóticas do método PMF para o robot 3R

Como foi referido anteriormente o método *PMF* pode conduzir a configurações indesejáveis e a respostas similares às que poderão ocorrer num sistema caótico [62]. Assim as figuras 4.4 a 4.6 mostram, respectivamente, as evoluções temporais das posições, velocidades e acelerações nas juntas para o robot 3R, quando é sujeito a um movimento circular com $w_0 = 3 \text{ rads}^{-1}$, com centro num ponto de distância radial $r = [x^2 + y^2]^{1/2} = 1 \text{ m}$ e raio $\rho = 0.1 \text{ m}$. Por seu lado, as figuras 4.7 e 4.8 mostram os planos de fase da cinemática e da dinâmica, respectivamente, das trajectórias das juntas para o robot 3R, quando este é sujeito a um movimento circular $w_0 = 3 \text{ rads}^{-1}$, com centro num ponto de distância radial $r = [x^2 + y^2]^{1/2} = 1 \text{ m}$ e raios $\rho \in \{0.1, 0.5\} \text{ m}$.

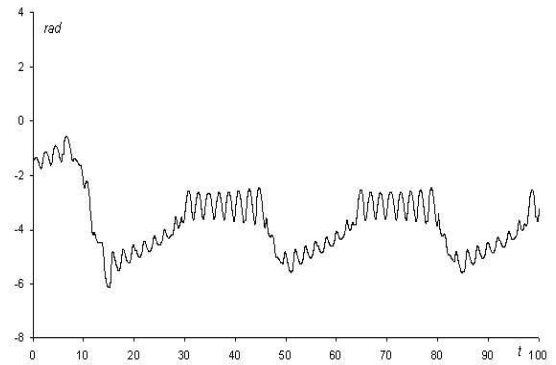
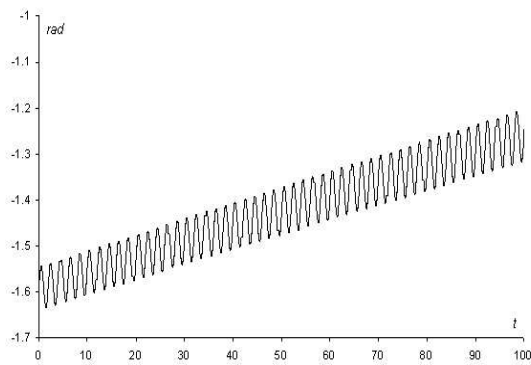
Na situação de controlo *PMF* verifica-se um "deslizamento" das trajectórias e para além disso, que certos pontos são "evitados". Tais pontos correspondem a configurações do braço onde os vários elos estão alinhados.

Tendo em vista obter um maior conhecimento sobre a natureza caótica do fenómeno, o robot 3R foi sujeito a vários movimentos circulares repetitivos, para diferentes valores de radial (r) e do raio (ρ). O plano de fase das trajectórias das juntas foi analisado e calculada a respectiva *dimensão fractal* usando [87] os expoentes característicos de Lyapunov e o método da contagem de caixas (Box-counting).

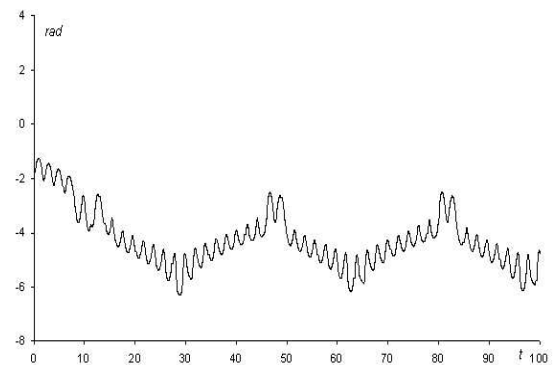
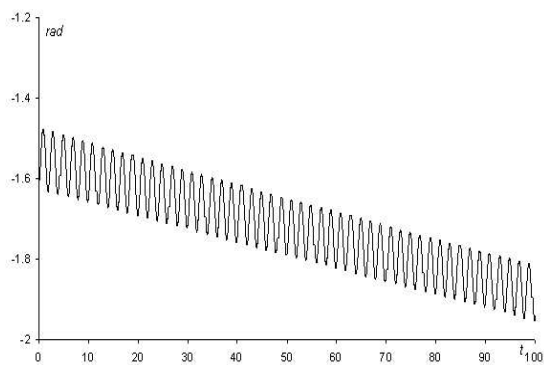
Na primeira estratégia obtém-se a dimensão de Lyapunov (dim_L) dada pela expressão



Junta 1



Junta 2

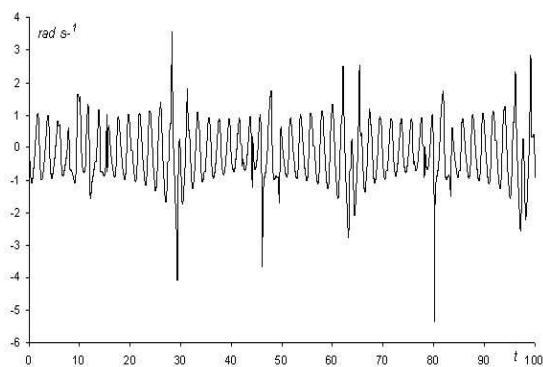
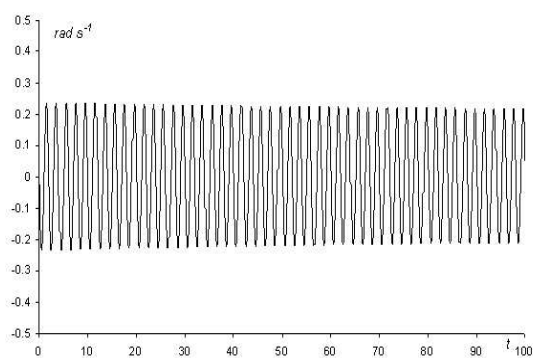


Junta 3

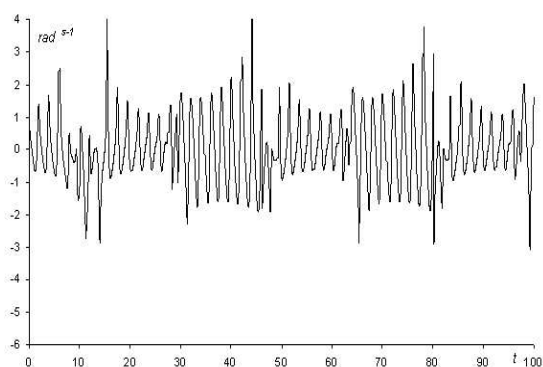
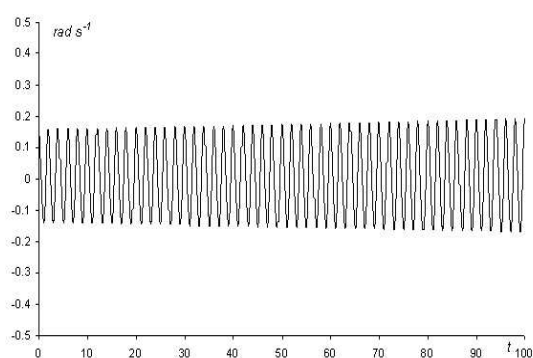
$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

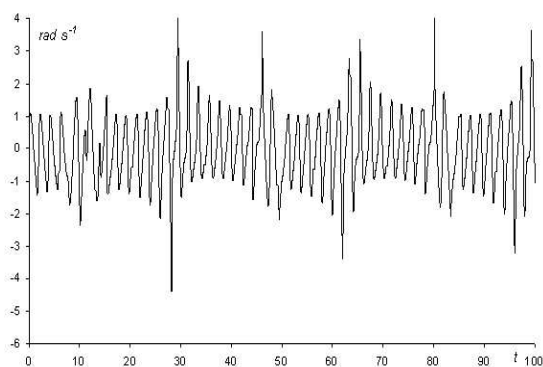
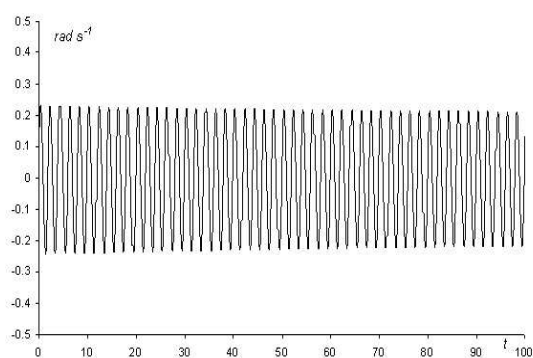
Figura 4.4: Posições das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF para $r = 1 \text{ m}$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} \text{ m}$ com $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.



Junta 1



Junta 2

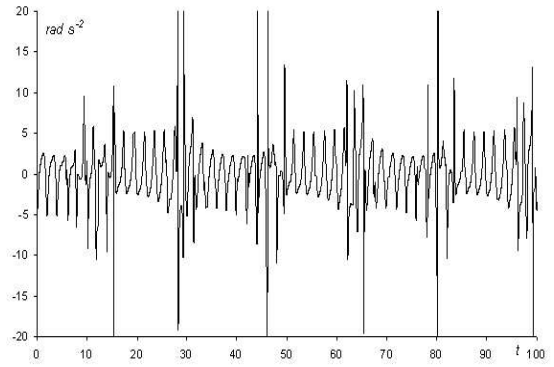
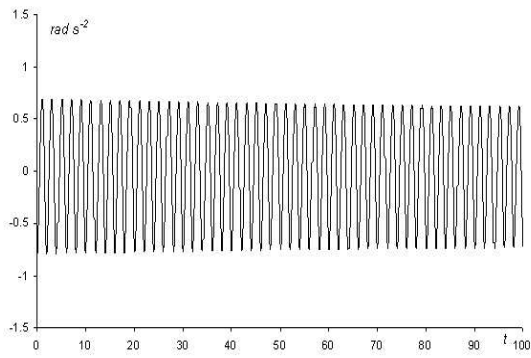


Junta 3

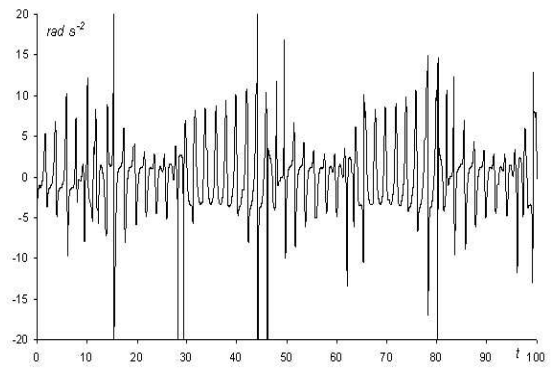
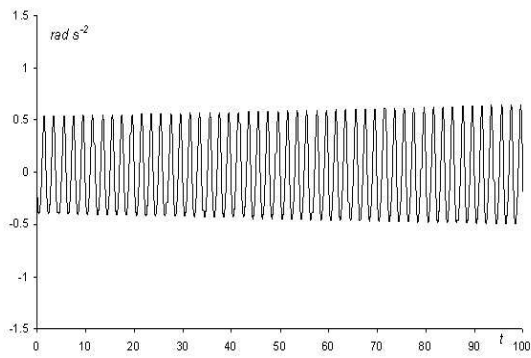
$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

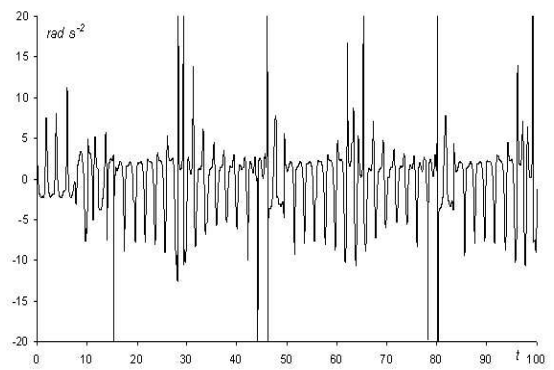
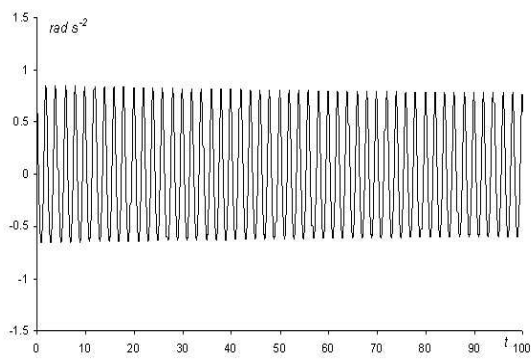
Figura 4.5: Velocidades das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF para $r = 1 \text{ m}$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} \text{ m}$ com $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.



Junta 1



Junta 2



Junta 3

$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

Figura 4.6: Acelerações das juntas para o robot 3R, sob controlo do algoritmo *PMF* para $r = 1 \text{ m}$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} \text{ m}$ com $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

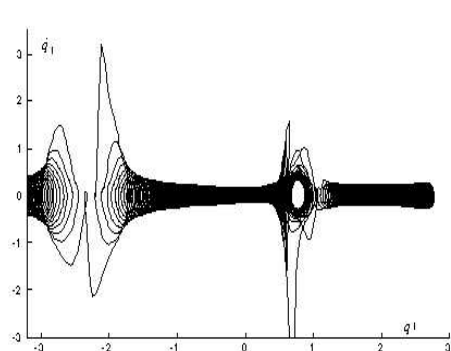
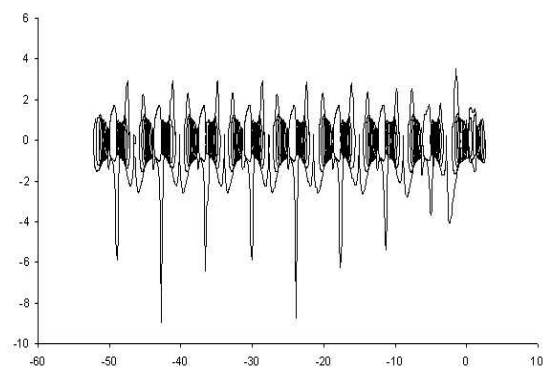
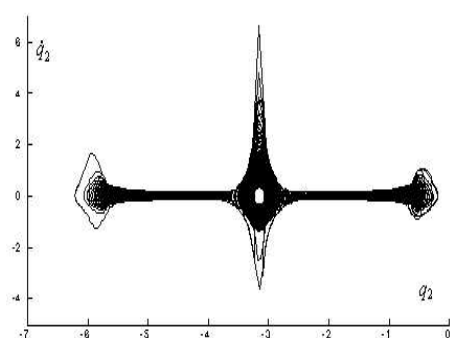
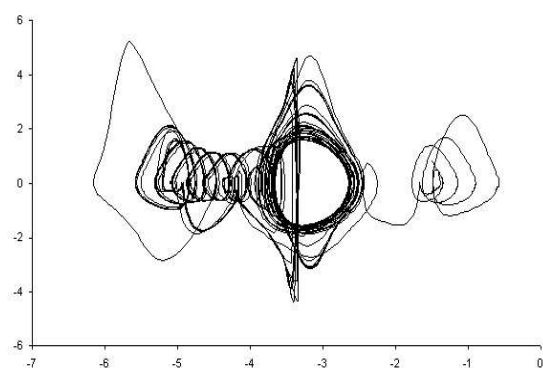
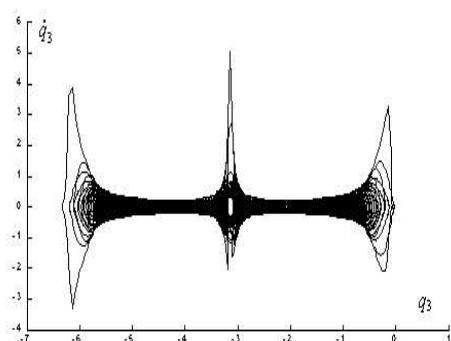
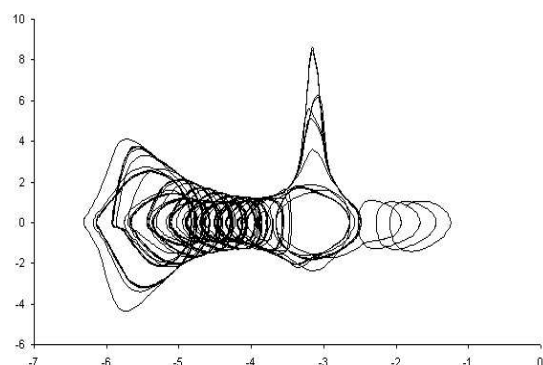
Junta 1 $dim_C = 1.62$, $dim_L = 0.88$ Junta 1 $dim_C = 1.59$, $dim_L = 1.31$ Junta 2 $dim_C = 1.60$, $dim_L = 0.88$ Junta 2 $dim_C = 1.61$, $dim_L = 1.31$ Junta 3 $dim_C = 1.63$, $dim_L = 0.88$
 $\rho = 0.1 \text{ m}$ Junta 3 $dim_C = 1.57$, $dim_L = 1.31$
 $\rho = 0.5 \text{ m}$

Figura 4.7: Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF para $r = 1 \text{ m}$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} \text{ m}$ com $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

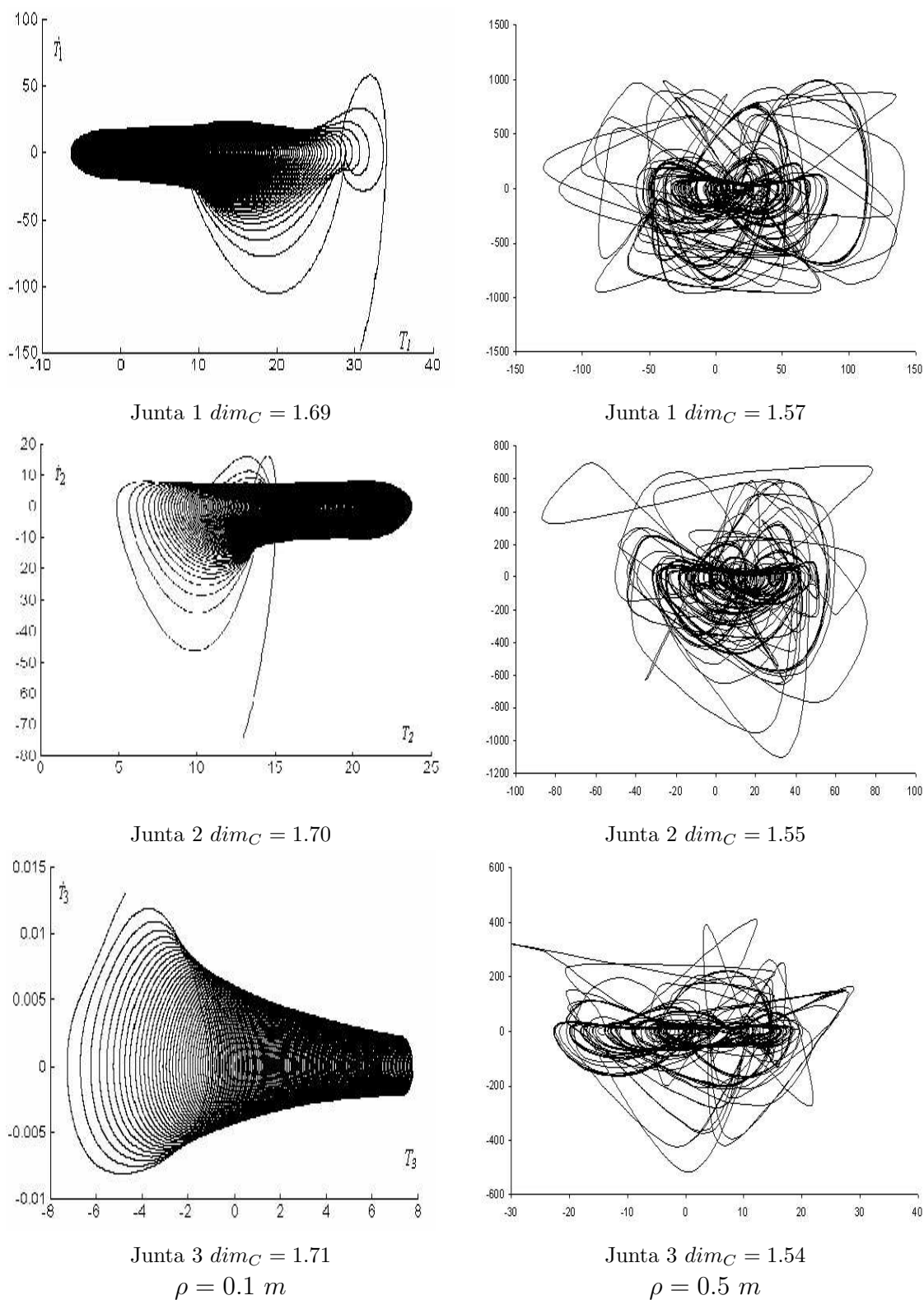


Figura 4.8: Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF para $r = 1 \text{ m}$, $\rho \in \{0.1, 0.5\} \text{ m}$ com $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\dim_L S = 1 - \frac{\ln \lambda_1}{\ln \lambda_2} \quad (4.15)$$

onde $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ são os valores próprios, não nulos, da matriz jacobiana (\mathbf{J}) de transformações não lineares $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Todavia, para um robot redundante tem-se um jacobiano rectangular pelo que se optou pela generalização do cálculo através dos valores próprios da matriz $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. Note-se que para o caso particular de \mathbf{J} ser uma matriz quadrada resulta $\dim_L S = 1 - \frac{\ln \lambda_1^2}{\ln \lambda_2^2} = 1 - \frac{\ln \lambda_1}{\ln \lambda_2}$, donde se conclui sobre a validade da generalização. Além disso, adopta-se (4.15) somente para uma trajectória em redor de condições iniciais não-perturbadas. No caso de tal não se verificar, é usual calcular a média do resultado ao longo da trajectória. Dado que é essa a situação para as experiências em curso com o robot redundante, optou-se por calcular a média para 300 *seg* (ou seja, 150 ciclos, com $w_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$).

Na segunda estratégia tem-se a dimensão fractal através do método de "Contagem de Caixas" (\dim_C) dada pela expressão:

$$\dim_C S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (4.16)$$

onde $N(\varepsilon)$ representa o número de caixas bidimensionais (com lado de comprimento ε) necessárias para preencher totalmente a área da superfície S . Note-se que esta expressão coincide com a fórmula (2.96) introduzida no contexto dos fractais.

Os resultados, mostram que o método *PMF* conduz a respostas caóticas com transitórios rápidos e altas acelerações. Aplicando as equações (4.15) e (4.16) aos resultados obtemos a figura 4.9 que revela:

- Com o método *PMF* obtém-se $\dim_C > 1$ tanto para as posições como para as velocidades, em contraste com caso comum, isto é, para trajectórias de robots não redundantes, onde se verifica que $\dim_C = 1$.
- \dim_C diminui próximo da distância radial máxima $r = 3 \text{ m}$.
- Para um dado valor de r \dim_C é aproximadamente idêntico, para todas as juntas.

- Como é conhecido da teoria do caos, geralmente $dim_L \neq dim_C$. Além disso, o ponto $r = r_s$ ($r_s = 1$ m para o robot $3R$) é o limite entre duas regiões distintas.

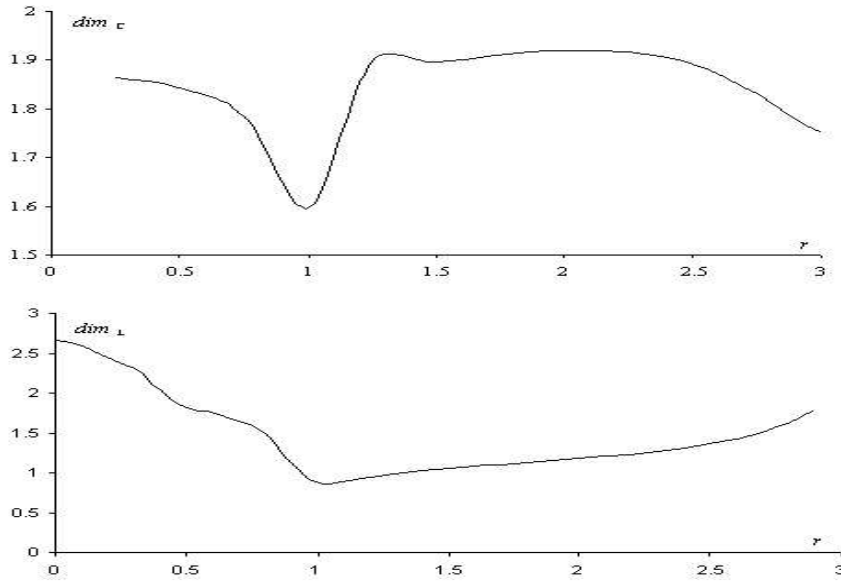


Figura 4.9: Dimensões do plano de fase de Lyapunov (dim_L) e por "contagem de caixas" (dim_C) vs r , para o robot $3R$, sob controlo do algoritmo PMF , com $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$ e $\rho = 0.1 \text{ m}$.

O desempenho caótico é devido á contribuição da $\mathbf{J}^\#$ para o movimento interno do manipulador. Assim, para melhor avaliar a natureza destes movimentos, é necessário efectuar um estudo mais detalhado.

4.2.1.1. Distribuição estatística dos valores obtidos para as juntas do robot $3R$

Para aprofundar o estudo das trajectórias obtidas com o método PMF e estabelecer a textura do Jacobiano foram desenvolvidos várias experiências.

No primeiro conjunto de experiências a figura 4.10 mostra a distribuição estatística das variáveis das juntas, q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) versus a distância radial r para o robot $3R$ quando controlado pelo método PMF , para um raio $\rho \in \{0, 0.1, 0.5\} \text{ m}$. Pode-se concluir que:

- As configurações possíveis do robot têm probabilidades diferentes.

- Os histogramas para a junta 1 têm características distintas em relação às outras duas juntas que são similares entre si.
- O ponto singular $r_s = 1\text{ m}$, representa uma fronteira entre duas regiões distintas, nomeadamente, $0 < r < r_s$ e $r_s < r < l_T$.

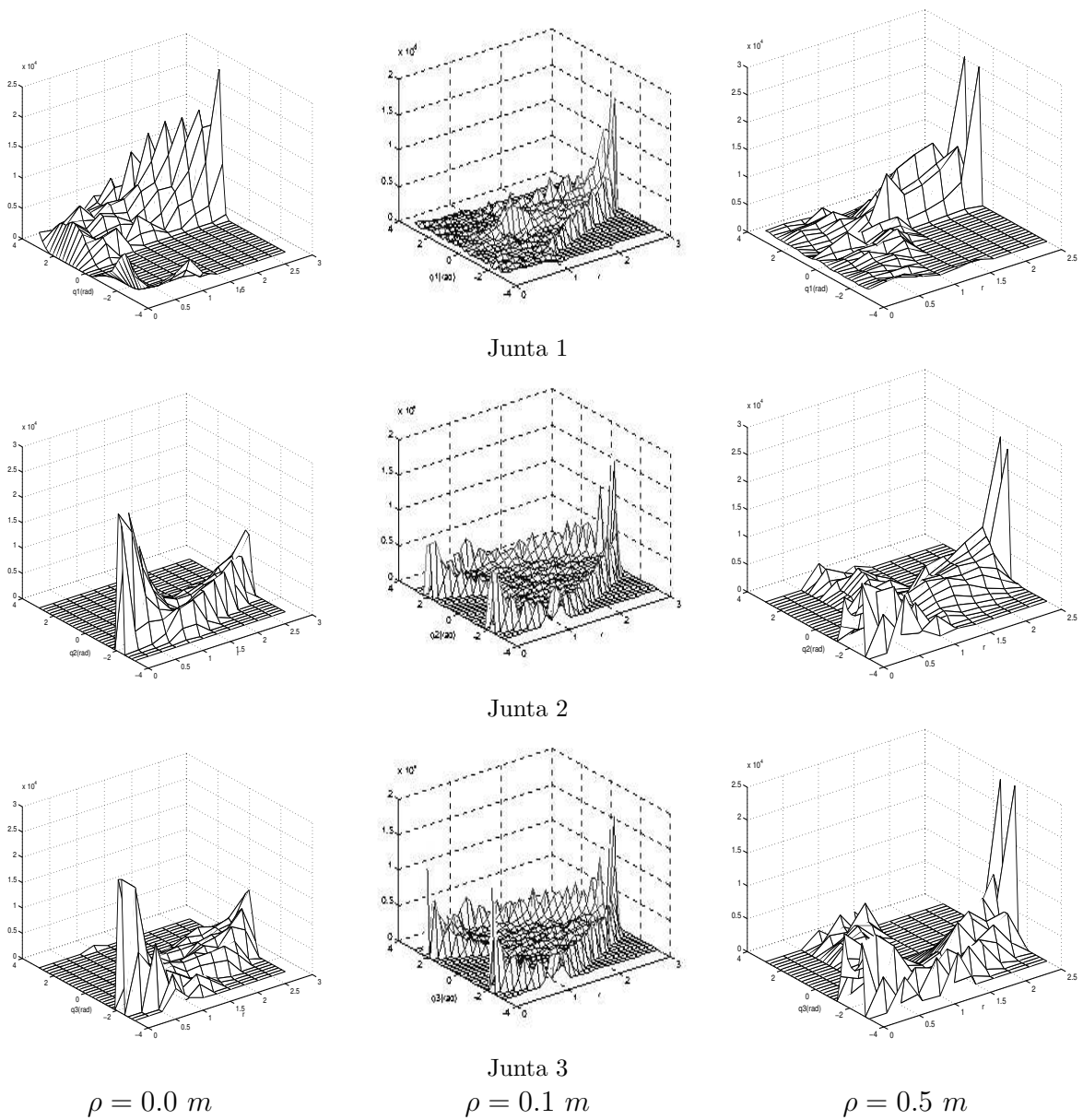


Figura 4.10: Distribuição estatística das posições de juntas, para robot $3R$, vs distância radial r . Raio, $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\}$. Ponto singular para $r_s = 1\text{ m}$.

4.2.1.2. Resposta a perturbação com um sinal tipo dobrete, para o robot 3R

Numa segunda experiência perturbou-se o sinal de entrada com um sinal tipo dobrete durante um período de tempo $\tau = 0.2 \text{ seg}$, aplicado no instante $t = 0.9 \text{ seg}$, para uma distância radial $r = 2 \text{ m}$ e raios diferentes $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\} \text{ m}$. A figura 4.11 mostra os resultados, onde é claro que a matriz de transferência para o sistema *MIMO* $(x_{ref}, y_{ref}) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$ depende fortemente da amplitude do raio (ρ). Além disso os diagramas de Bode revelam que o método *PMF* apresenta ganhos distintos, para as baixas frequências, de acordo com os valores de ρ . Esta conclusão é consistente com os gráficos do plano de fase, que revelam um deslizamento de baixa frequência, quando respondem a um sinal com frequência (ω_0) do sinal de entrada sendo o deslizamento tanto mais pronunciado quanto o valor de ρ .

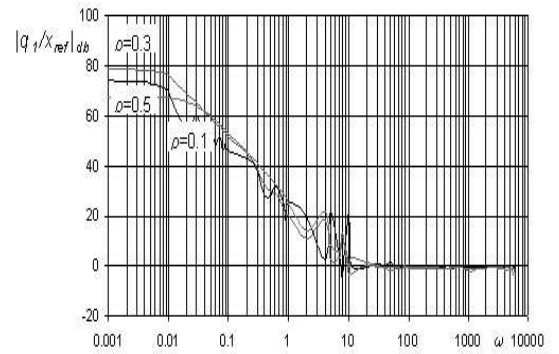
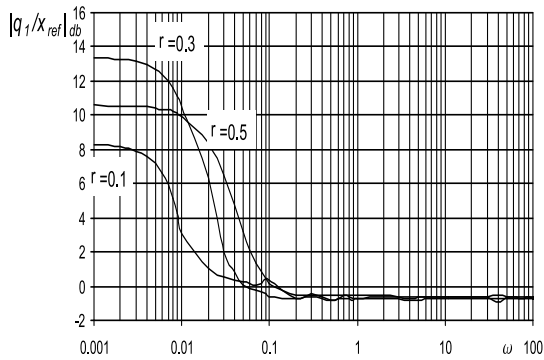
A tabela 4.1 mostra os parâmetros para a função de transferência do tipo:

$$\frac{Q_i(s)}{X_{ref}(s)} = k \frac{s^\alpha + a}{s^\alpha + b} \quad (4.17)$$

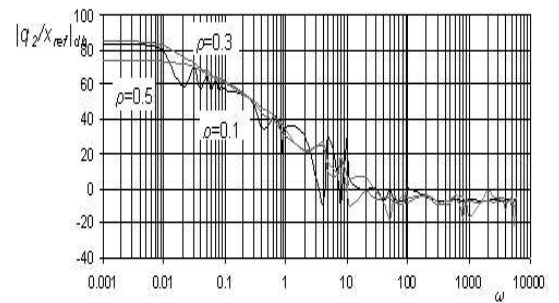
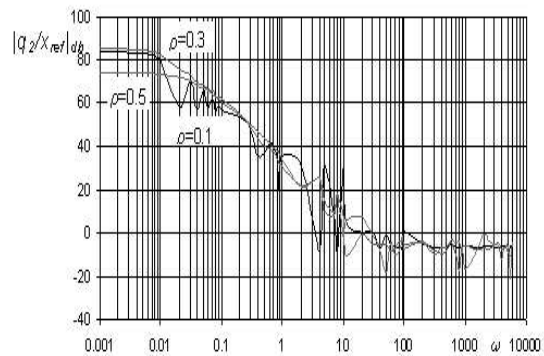
Note-se que α toma valores próximos de 1, ou seja $\alpha \approx 1$. Para $\frac{q_i(s)}{y_{ref}(s)}$ obtêm-se as mesmas conclusões.

Tabela 4.1: Parâmetros da função de transferência para o robot 3R e uma perturbação do tipo *dobrete*, em x_{ref} .

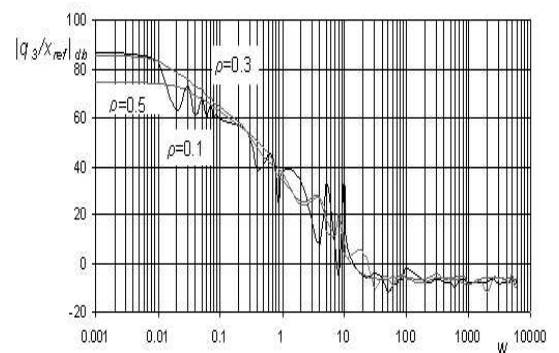
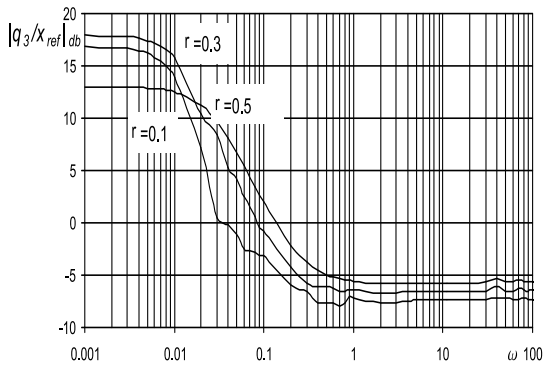
	ρ	a	b	k	α
Q_1/X_{ref}	0.10	0.01	0.004	0.96	1.09
	0.30	0.03	0.007	0.96	1.07
	0.50	0.18	0.050	0.95	0.89
Q_2/X_{ref}	0.10	0.07	0.007	0.50	1.03
	0.30	0.31	0.02	0.55	0.88
	0.50	0.82	0.09	0.61	0.81
Q_3/X_{ref}	0.10	0.06	0.004	0.44	1.14
	0.15	0.66	0.04	0.47	0.79
	0.50	0.86	0.10	0.52	0.87



Junta 1



Junta 2



Junta 3

Perturbação com dobrete

Perturbação com ruído branco

Figura 4.11: Resposta em frequência para o robot 3R, para $r = 2 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$, e $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\} \text{ m}$ e perturbação com sinal tipo *dobrete* e sinal tipo *ruído branco*.

4.2.1.3. Resposta a perturbação com um sinal tipo ruído branco para o robot 3R

O terceiro conjunto de experiências diz também respeito a resposta em frequência, mas neste caso quando o sinal da perturbação é do tipo ruído branco distribuído ao longo de toda a trajectória (500 ciclos). A figura 4.11 mostra os diagramas de Bode resultantes.

Neste caso os valores de α (Tabela 4.2) são fraccionários, nomeadamente $1.0 < \alpha < 1.4$, em contraste com os resultados anteriores. Este resultado traduz a propriedade de "memória no tempo" intrínseca aos sistemas de ordem fraccionária que capturam os fenómenos dinâmicos ao longo de todo o tempo da experiência, em contraste com a derivada de ordem inteira que apenas captura os fenómenos dinâmicos "locais". Para $\frac{q_i(s)}{y_{ref}(s)}$ as conclusões são semelhantes.

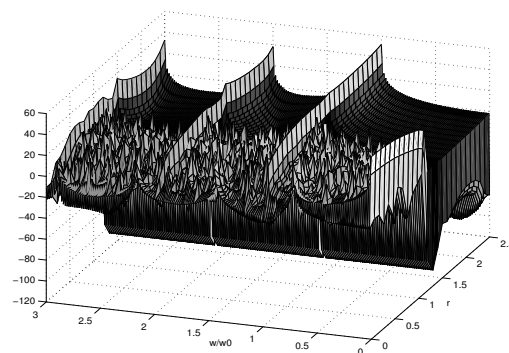
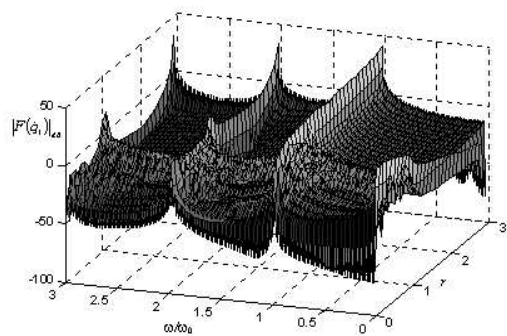
Tabela 4.2: Parâmetros da função de transferência para o robot 3R e uma perturbação do tipo ruído branco

	ρ	a	b	k	α
Q_1/X_{ref}	0.10	15.8	0.003	0.93	1.13
	0.30	18.8	0.002	0.89	1.32
	0.50	30.3	0.01	0.83	1.23
Q_2/X_{ref}	0.10	64.3	0.002	0.47	1.20
	0.30	82.9	0.002	0.43	1.34
	0.50	119.0	0.01	0.43	1.31
Q_3/X_{ref}	0.10	101.0	0.002	0.43	1.26
	0.30	120.9	0.003	0.47	1.38
	0.50	130.0	0.01	0.40	1.33

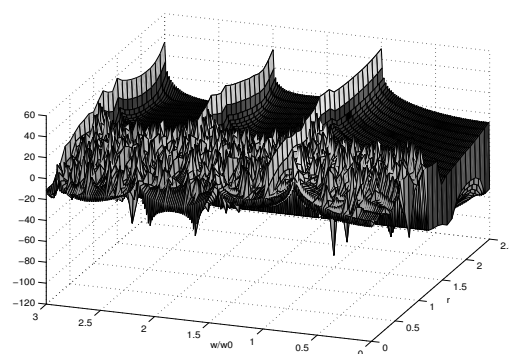
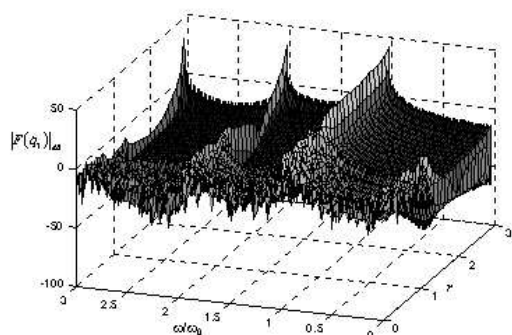
4.2.1.4. Transformada de Fourier para a velocidade das juntas do robot 3R

Numa terceira experiência, após se ter dissipado o efeito do transitório inicial, calculou-se a transformada de Fourier das velocidades das juntas para um número de ciclos considerável (600 ciclos = 1200 seg) para uma frequência do sinal repetitivo de referência $\omega_0 = 3 \text{ rad seg}^{-1}$.

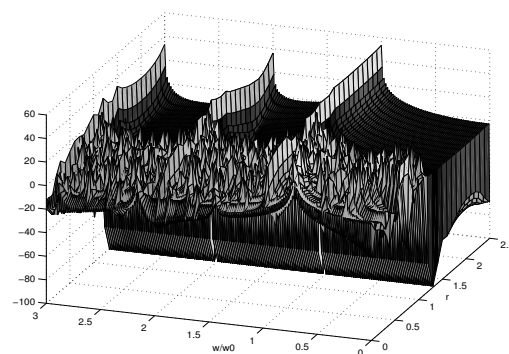
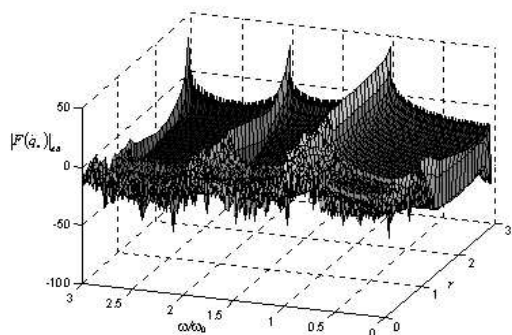
A figura 4.12 mostra a transformada de Fourier *versus* distância radial r das juntas do robot 3R, para uma trajectória circular de raio $\rho \in \{0.10, 0.50\} \text{ m}$.



Junta 1



Junta 2



Junta 3

$\rho = 0.1 \text{ m}$

$\rho = 0.5 \text{ m}$

Figura 4.12: Transformada de Fourier para a velocidades das juntas do robot $3R$, para 600 ciclos *vs* a distância radial r e frequência normalizada ω/ω_0 , para $\rho \in \{0.10, 0.50\} \text{ m}$ e $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$

Uma vez mais se verifica que para $0 < r < r_s$ se obtém um sinal com a energia distribuída ao longo de todas as frequências, enquanto para $r_s < r < 3$ a maior parte da energia do sinal está concentrada no harmónico fundamental e nos harmónicos múltiplos. Contudo, a componente contínua, responsável pelo "deslizamento" das posições, apresenta valores que variam com a distância radial r e com o raio ρ da trajectória, de acordo com a relação:

$$|\dot{q}_i(\omega = 0)| \approx a\rho^d / (b + r^c), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.18)$$

A Tabela 4.3 mostra os parâmetros correspondentes a (4.18).

Tabela 4.3: Parâmetros da componente contínua para a transformada de Fourier das velocidades das juntas para o robot 3R

	ρ	a	b	c	d
$\dot{q}_1(\omega = 0)$	0.005	480	0.16	3.40	2.10
	0.01	430	0.15	3.30	2.10
	0.05	235	0.16	4.80	1.90
	0.1	465	0.14	4.20	2.20
$\dot{q}_2(\omega = 0)$	0.005	315	0.96	3.20	1.90
	0.01	325	0.94	3.10	1.90
	0.05	385	1.43	3.10	1.90
	0.1	375	1.96	2.20	2.10
$\dot{q}_3(\omega = 0)$	0.005	250	0.73	1.70	1.90
	0.01	245	0.62	1.60	1.90
	0.05	320	1.30	1.90	1.90
	0.1	385	1.93	1.20	2.30

4.2.1.5. Análise da influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária, para o robot 3R

Numa quarta e última experiência analisou-se a influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária. Assim, numa primeira fase, variou-se o período de tempo τ de perturbação com um sinal do tipo *ruído branco*. Numa segunda fase, estimulou-se o sistema com uma perturbação do tipo *ruído rosa* (*i.e.* com espectro f^{-1}). Em ambos os casos, a resposta de ordem fraccionária é comparada com as experiências

anteriores.

A figura 4.13 mostra os valores de α em função do tempo de de perturbação τ , com um sinal do tipo *ruído branco*. Pode-se concluir que o sistema apenas revela uma natureza fraccionária para períodos de excitação superiores a 5 *seg* (*i.e.* $\tau > 5 \text{ seg}$).

A figura 4.14 compara a transformada de Fourier das posições das juntas para perturbações com sinais dos tipos *ruído branco* e *ruído rosa*, com um período de perturbação $\tau = 250 \text{ seg}$ num tempo total de 600 *seg* de experiência. Pode-se concluir que o sistema se acomoda quando perturbado com um sinal tipo *ruído rosa* enquanto reage em relação à perturbação com um sinal tipo *ruído branco*, transferindo energia para o espectro das frequências baixas.

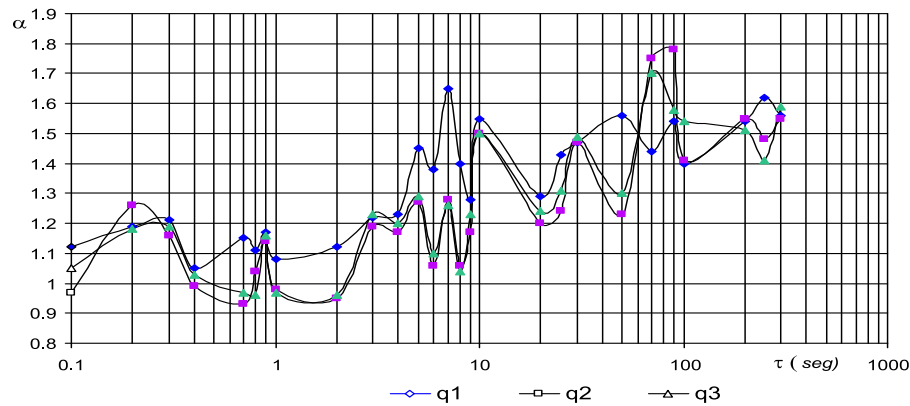


Figura 4.13: Ordem fraccionária α vs tempo de excitação τ para um tempo total de 600 *seg*, perturbação com sinal tipo *ruído branco*, robot 3R, $\rho = 0.10 \text{ m}$.

4.2.2. Respostas caóticas no uso de PMF para o robot 4R

Como foi visto anteriormente o método *PMF* de controlo permite que o braço adquira configurações indesejáveis, o que poderá levar a respostas similares às que ocorrem num sistema caótico. As figuras 4.18 e 4.19 mostra os planos de fase da cinemática e da dinâmica, respectivamente, das trajectórias das juntas para o robot 4R, quando é sujeito a um movimento circular, com centro num ponto de distância radial $r = [x^2 + y^2]^{1/2} = 1 \text{ m}$ e raio $\rho = 0.1 \text{ m}$.

Tal como anteriormente, além do deslizamento verificado, nota-se que há pontos que são "evitados". Tais pontos correspondem a configurações do braço onde os vários "links"

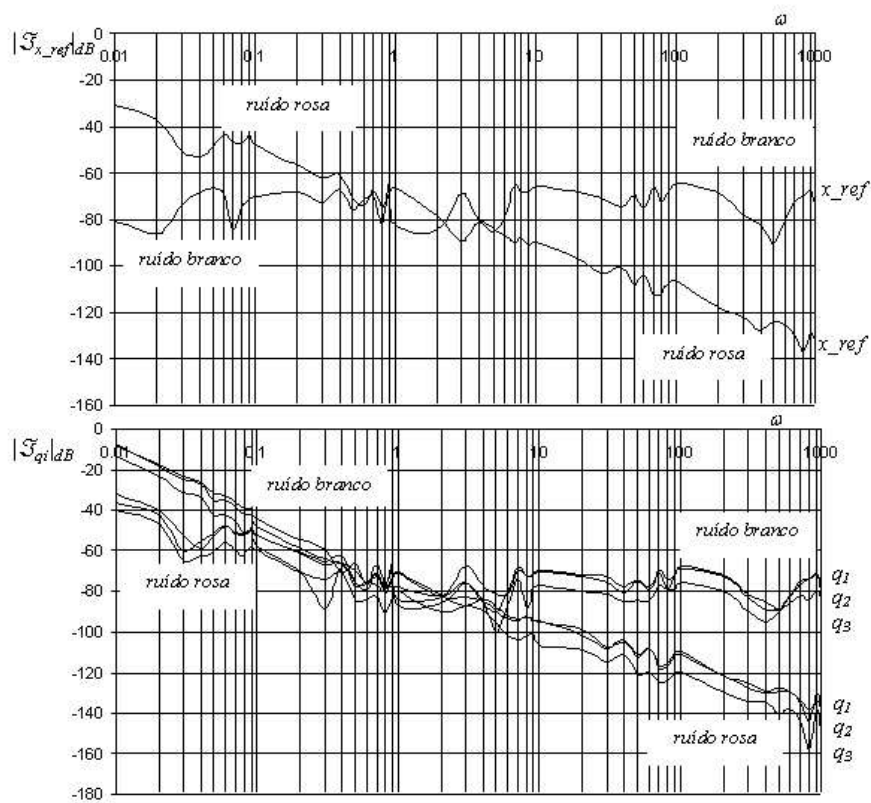
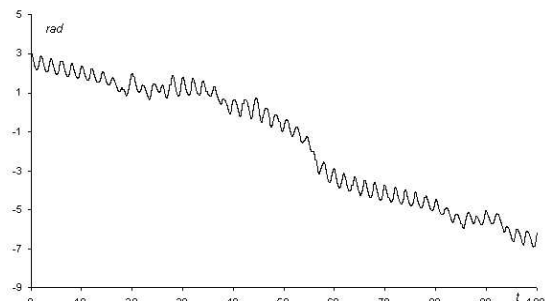
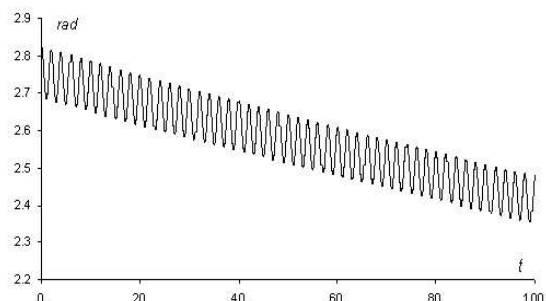
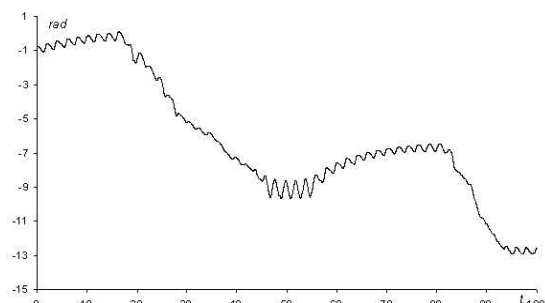
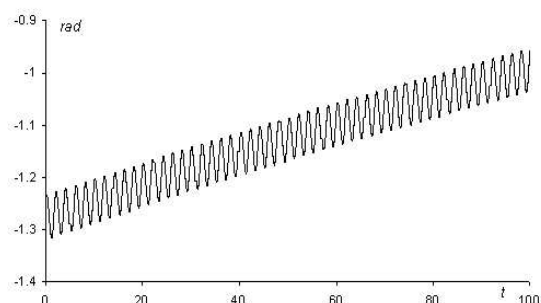


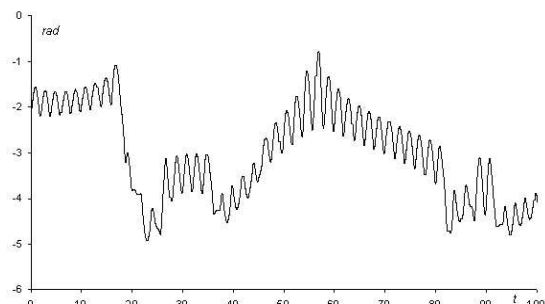
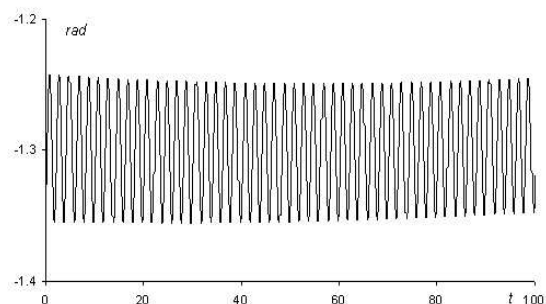
Figura 4.14: Comparação da transformada de Fourier para os sinais de entrada e de saída com perturbações com sinais do tipo *ruído branco* e *ruído rosa*, robot 3R, $\rho = 0.10$ m.



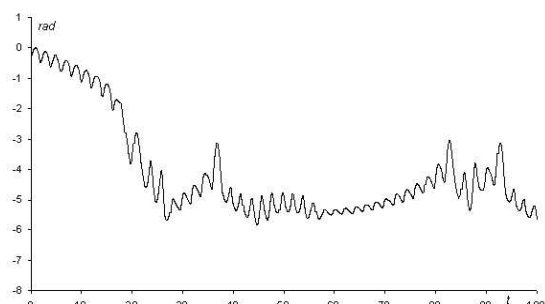
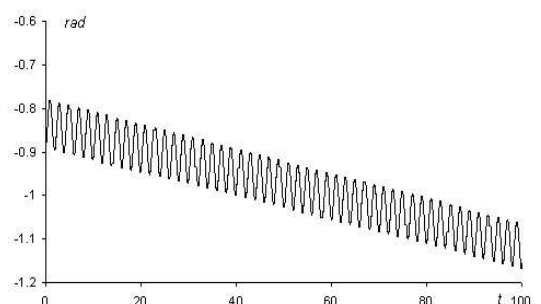
Junta 1



Junta 2



Junta 3

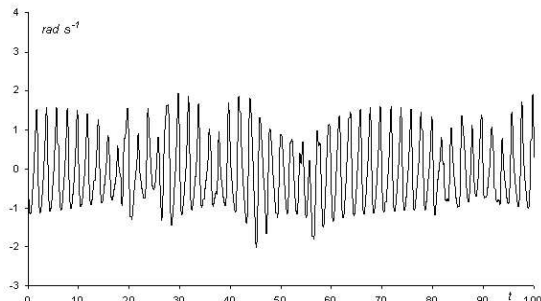
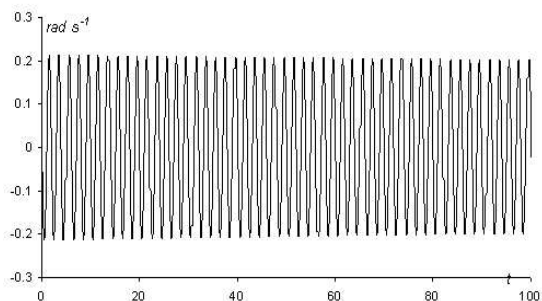


Junta 4

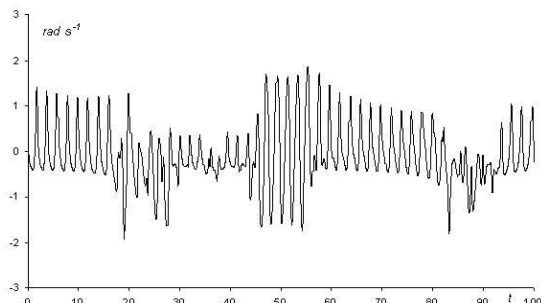
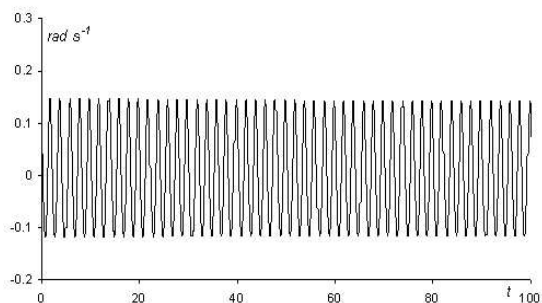
$\rho = 0.1 \text{ m}$

$\rho = 0.5 \text{ m}$

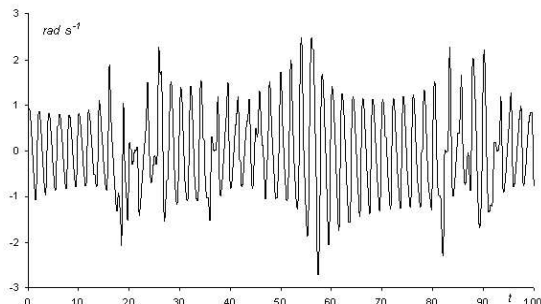
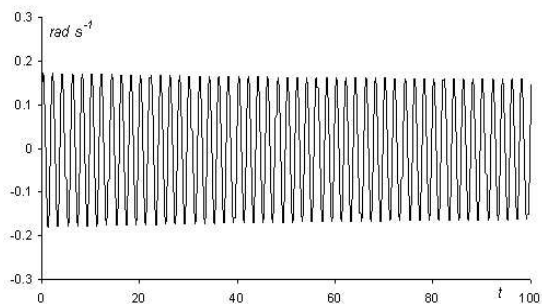
Figura 4.15: Posições das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo PMF para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.



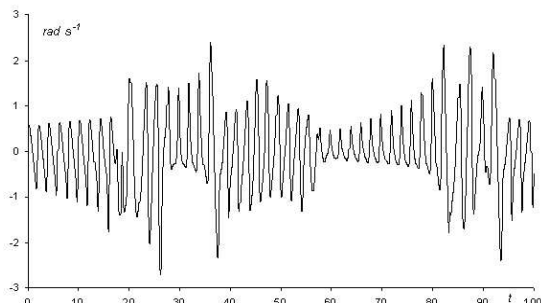
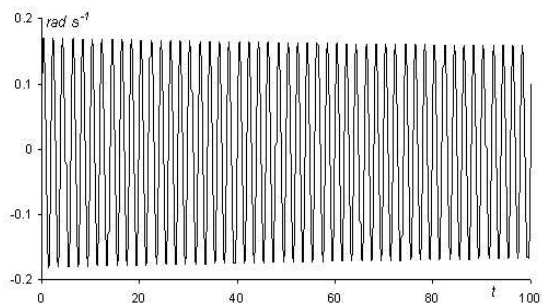
Junta 1



Junta 2



Junta 3

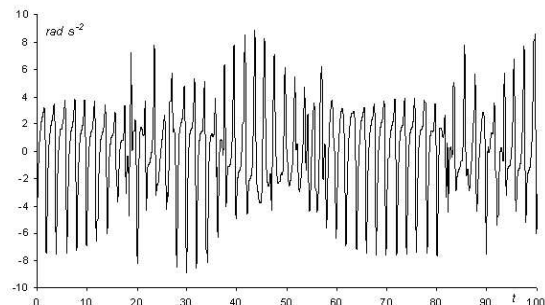
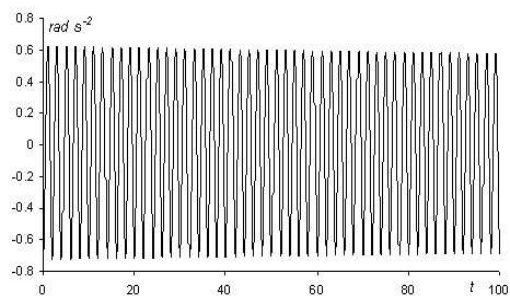


Junta 4

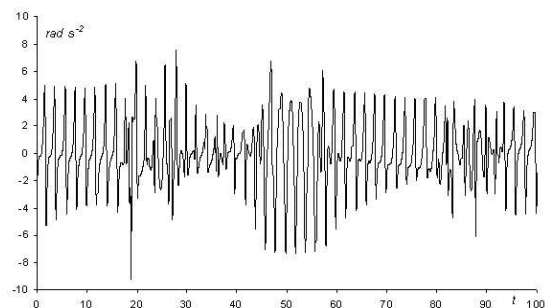
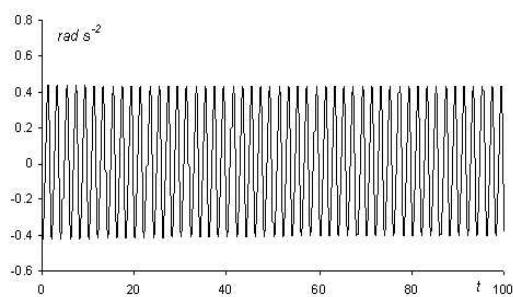
$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

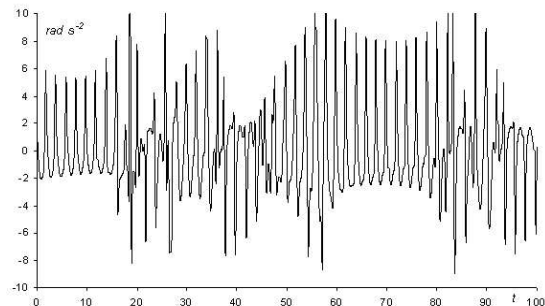
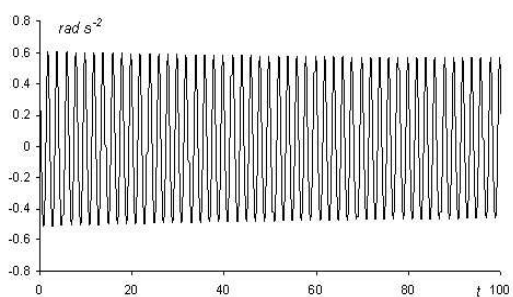
Figura 4.16: Velocidades das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo PMF para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.



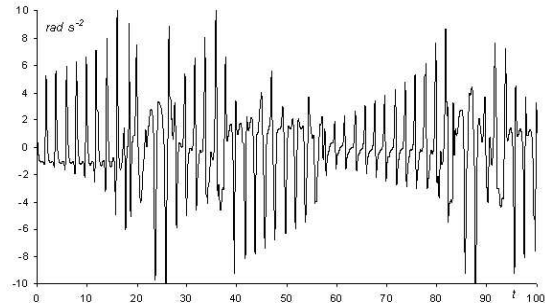
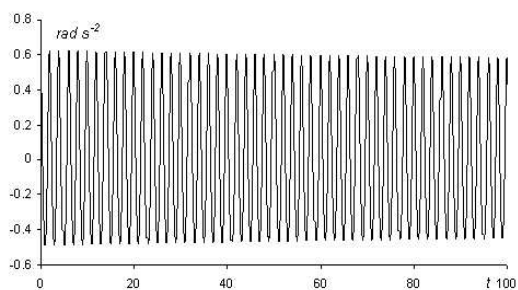
Junta 1



Junta 2



Junta 3



Junta 4

$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

Figura 4.17: Acelerações das juntas na trajectória para o robot 4R, sob controlo *PMF* para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

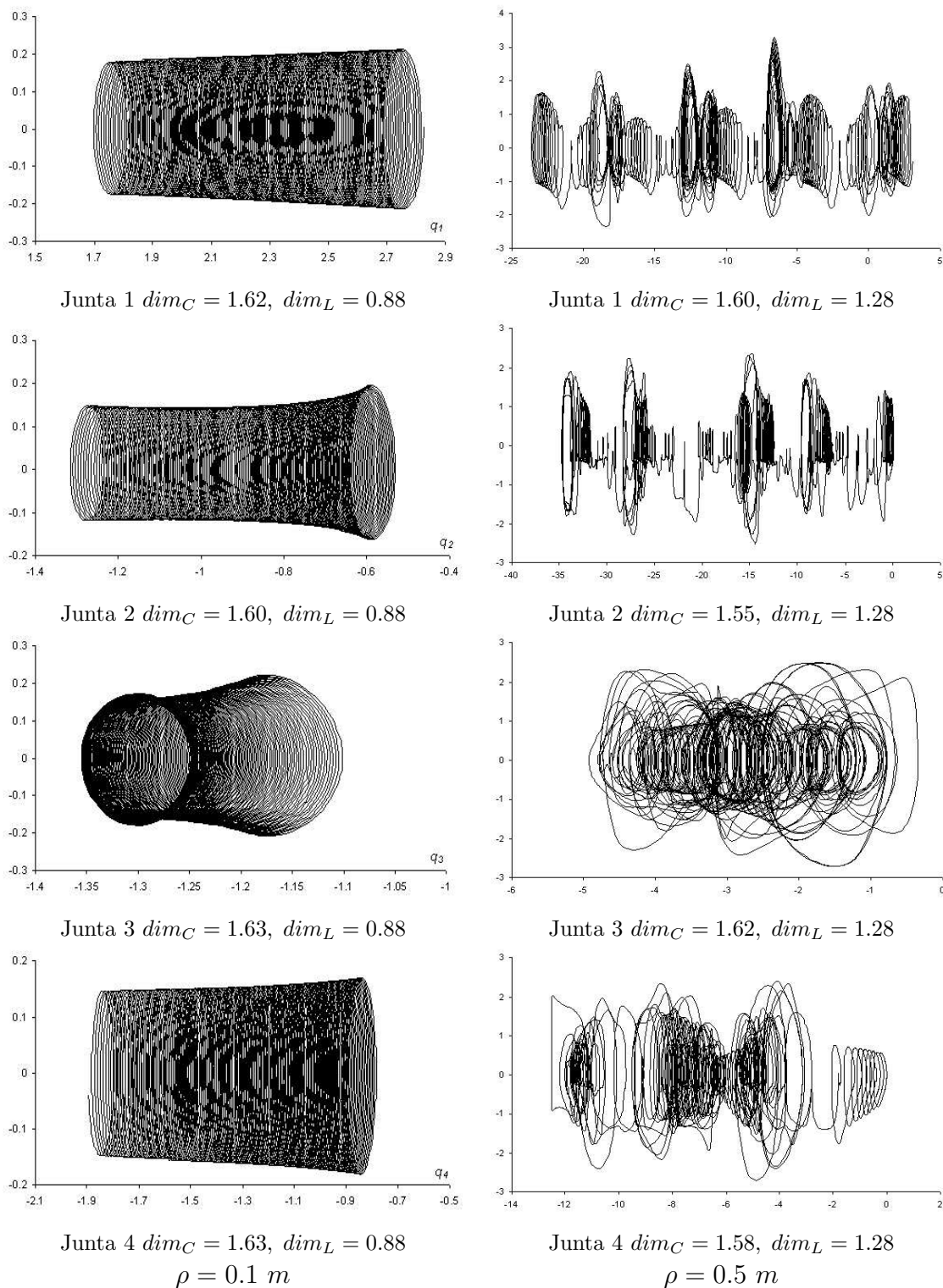


Figura 4.18: Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot 4R, sob controlo *PMF* para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

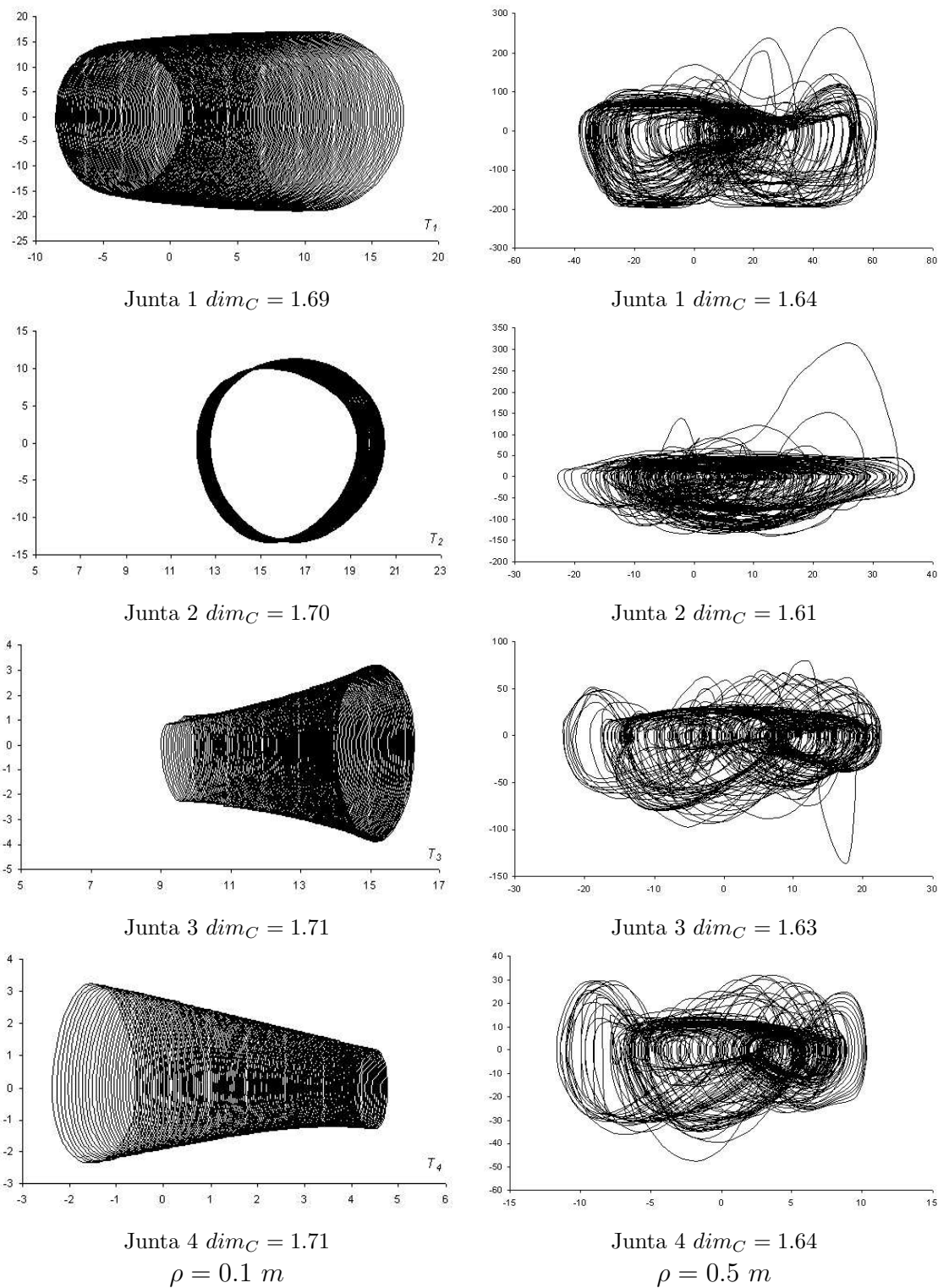


Figura 4.19: Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot 4R, sob controlo *PMF* para $r = 1 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$.

estão alinhados. Com o objectivo ganhar maior conhecimento sobre o fenómeno, o robot em estudo foi sujeito a vários movimentos circulares repetitivos, para várias distância radiais (r) e raio (ρ). O plano de fase das trajectórias das juntas foi analisado e calculada a respectiva *dimensão fractal* (dim). Os resultados, mostram que o método *PMF* conduz a respostas caóticas com transitórios rápidos e altas acelerações. Aplicando as equações (4.15) e (4.16) aos resultados obtemos a figura 4.20, que revela:

- Com o método *PMF* obtém-se $dim_C > 1$ tanto para as posições como para as velocidades, em contraste com caso comum, isto é, para trajectórias do robot não redundante, $2R$, onde se verifica que $dim_C = 1$.
- dim_C diminui próximo da distância radial máxima $r = 3 m$.
- dim_C é aproximadamente constante, para todas as juntas.
- Geralmente $dim_L \neq dim_C$. Além disso, o ponto $r = r_s$ ($r_s = 1.5 m$) para o robot $4R$ tende a ser, o limite entre duas regiões distintas.

4.2.2.1. Distribuição estatística das juntas para o robot $4R$

Para aprofundar o conhecimento sobre a natureza dos movimentos obtidos usando o método *PMF*, várias experiências foram feitas, com o objectivo de estabelecer a textura do Jacobiano.

No primeiro conjunto de experiências a figura 4.21 mostra a distribuição estatística das variáveis das juntas q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) *versus* a distância radial r para o robot $4R$ quando controlado pelo método *PMF*, para um raio $\rho = 0$. Pode-se concluir que:

- As configurações possíveis do robot têm probabilidades diferentes.
- Os histograma para a junta 1 tem características distintas em relação às outras que têm características similares.
- O ponto singular $r_s = 1.5 m$, representa uma fronteira entre duas região distintas, $0 < r < r_s$ e $r_s < r < l_T$.

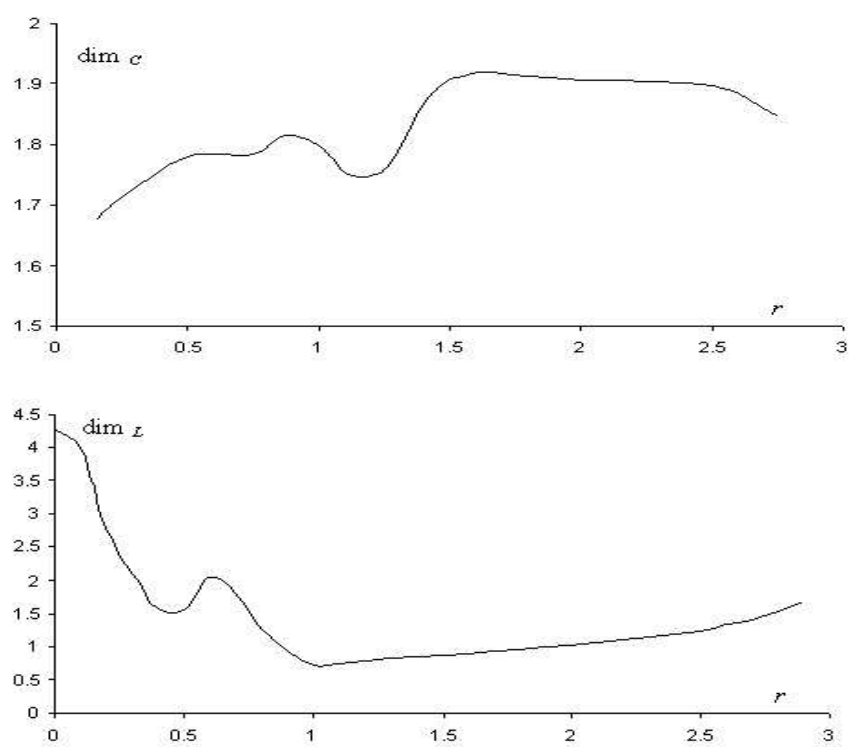


Figura 4.20: Lyapunov (dim_L) e "box-counting" (dim_C) dimensões do plano de fase vs r , robot $4R$ sob controlo PMF para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$ e $\rho = 0.1\text{ m}$.

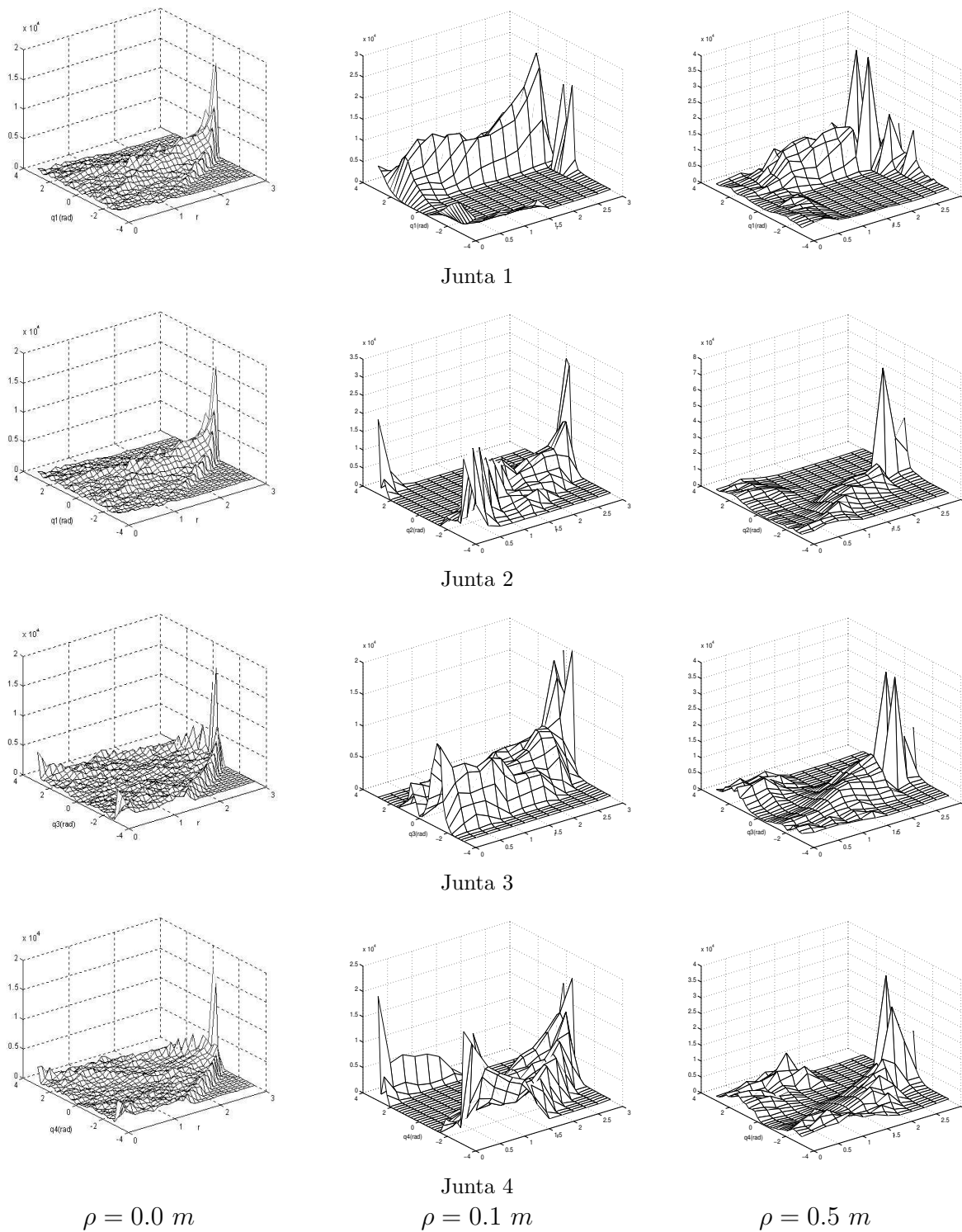


Figura 4.21: Distribuição estatística das posições de juntas para robot $4R$, vs distância radial r . Raio $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\}$. Ponto singular para $r_s = 1.5 \text{ m}$.

4.2.2.2. Resposta a perturbação com um sinal tipo dobrete para robot o 4R

Numa segunda experiência perturbou-se o sinal de entrada com um sinal tipo dobrete durante um período de tempo de 0.2 *seg*, entre o instante $t = 0.9$ *seg* e $t = 1.1$ *seg* para uma distância radial $r = 2$ *m* e raios diferentes $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\}$ *m*. A figura 4.22 mostra os resultados, mas é claro que a matriz de transferência para o sistema *MIMO* $(x_{ref}, y_{ref}) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$ depende fortemente da amplitude do raio (ρ). Além disso os diagramas de bode revelam que o método *PMF* apresenta "ganhos" distintos, para as variáveis das juntas, de acordo com as diferentes frequências. Esta conclusão é consistente com os gráficos do plano de fase, que revelam deslizamentos de baixa frequência, enquanto respondem a altas frequências w_0 do sinal de entrada.

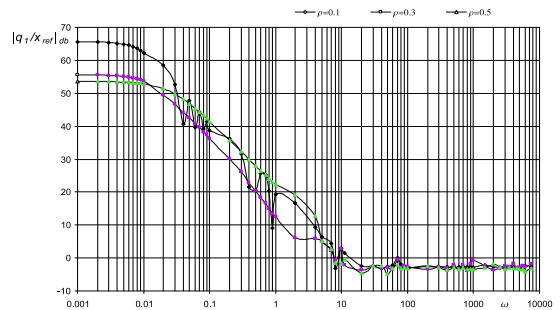
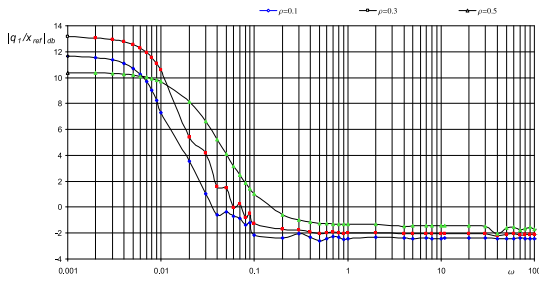
A tabela 4.4 mostra os parâmetros para a função de transferência do tipo:

$$\frac{q_i(s)}{x_{ref}(s)} = k \frac{s^\alpha + a}{s^\alpha + b} \quad (4.19)$$

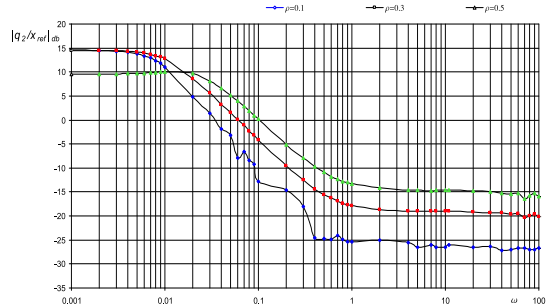
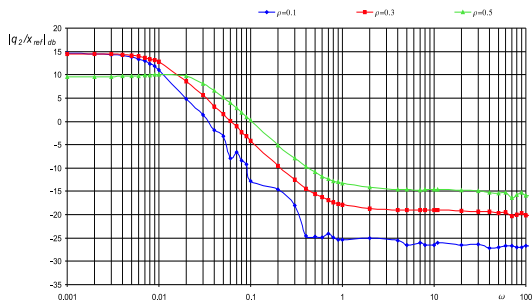
Note-se que α toma valores próximos de 1 ($\alpha \approx 1$). Para $\frac{q_i(s)}{y_{ref}(s)}$ obtiveram-se as mesmas conclusões.

Tabela 4.4: Parâmetros da função de transferência para o robot 4R e uma perturbação do tipo *dobrete*

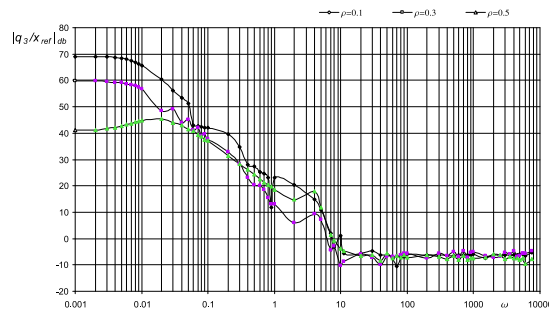
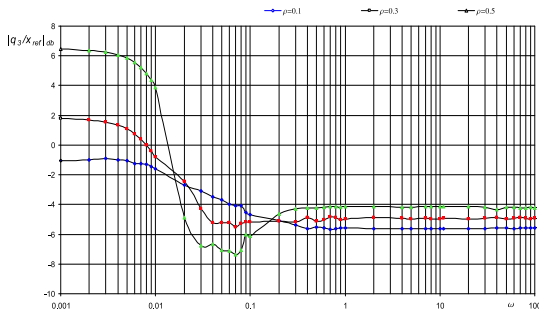
	ρ	a	b	k	α
q_1/x_{ref}	0.10	0.04	0.007	0.76	1.02
	0.30	0.05	0.009	0.78	1.02
	0.50	0.12	0.03	0.83	0.93
q_2/x_{ref}	0.10	0.61	0.005	0.04	1.06
	0.30	0.53	0.01	0.10	1.04
	0.50	0.73	0.04	0.16	0.98
q_3/x_{ref}	0.10	0.07	0.04	0.53	0.97
	0.30	0.01	0.006	0.56	1.09
	0.50	0.003	0.001	0.61	1.41
q_4/x_{ref}	0.10	0.04	0.004	0.38	1.12
	0.30	0.08	0.006	0.40	1.07
	0.50	0.20	0.02	0.42	0.91



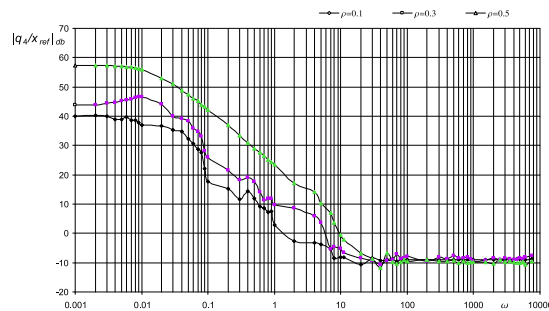
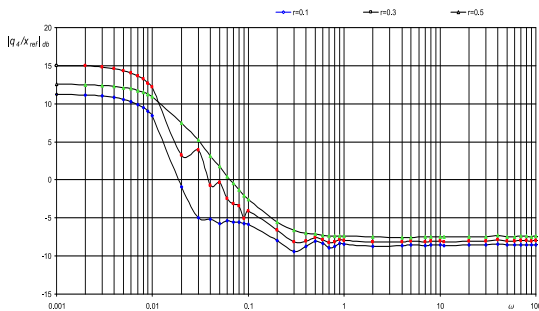
Junta 1



Junta 2



Junta 3



Junta 4

Perturbação com dobrete

Perturbação com ruído branco

Figura 4.22: Resposta em frequência para o robot 4R, para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$, $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\} \text{ m}$ e perturbação com sinal tipo *dobrete* e sinal tipo *ruído branco*.

4.2.2.3. Resposta a perturbação com um sinal tipo ruído branco para o robot 4R

O terceiro conjunto de experiências diz também respeito a resposta em frequência, mas neste caso quando o sinal da perturbação é do tipo "ruído branco" distribuído ao longo de toda a trajectória (500 ciclos).

Neste caso os valores de α (tabela 4.5) são fraccionários ($1.0 < \alpha < 1.4$), em contraste com os resultados anteriores. Isto é devido ao facto da propriedade de "memória no tempo" intrínseca ao CF , já que captura os fenómenos dinâmicos ao longo de todo o tempo da experiência, em contraste com a derivada de ordem inteira que apenas captura os fenómenos dinâmicos "locais". Para $\frac{q_i(s)}{y_{ref}(s)}$ as conclusões são semelhantes.

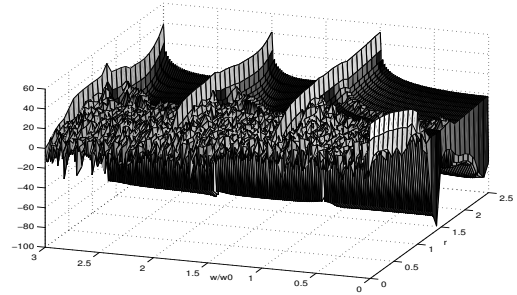
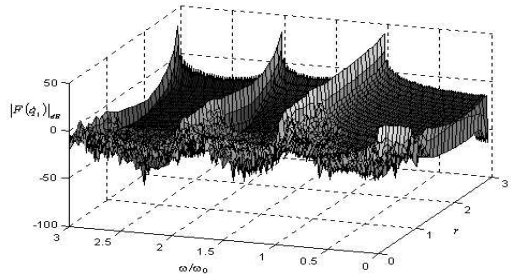
Tabela 4.5: Parâmetros da função de transferência para o robot 4R e uma perturbação do tipo ruído branco

	ρ	a	b	k	α
q_1/x_{ref}	0.10	10.2	0.004	0.75	1.06
	0.30	7.7	0.01	0.77	1.02
	0.50	21.8	0.03	0.66	0.97
q_2/x_{ref}	0.10	139.9	0.003	0.8	1.15
	0.30	116.9	0.007	0.08	1.17
	0.50	263.2	0.03	0.07	1.20
q_3/x_{ref}	0.10	16.7	0.003	0.51	1.13
	0.30	10.6	0.006	0.55	1.08
	0.50	24.8	0.08	0.37	1.01
q_4/x_{ref}	0.10	2.7	0.02	0.36	1.05
	0.30	7.7	0.02	0.40	0.99
	0.50	47.2	0.02	0.31	1.00

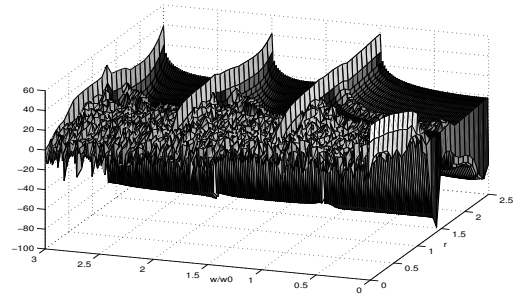
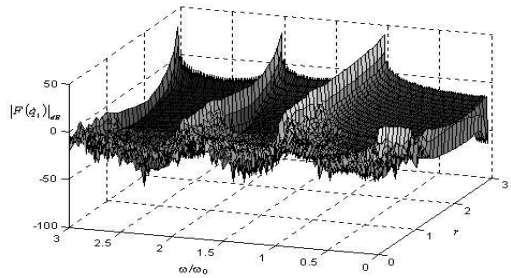
4.2.2.4. Análise da influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária, para o robot 4R

Numa terceira experiência, e após se ter dissipado o efeito do transitório inicial, calculou-se a transformada de Fourier das velocidades das juntas para um número de ciclos considerável (600 ciclos = 1200 seg) com uma frequência $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

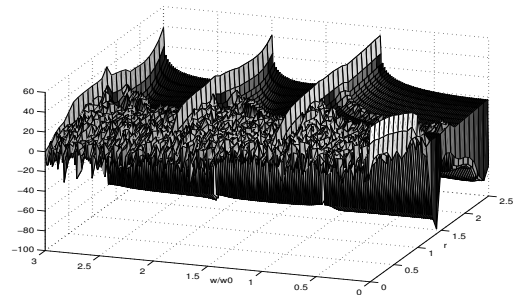
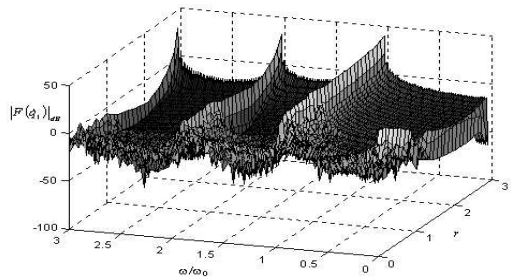
A figura 4.23 mostra a transformada de Fourier versus distância radial r das juntas do robot 4R, para uma trajectória circular de raio $\rho \in \{0.10, 0.50\}$.



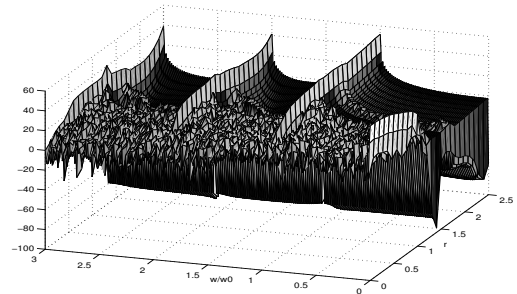
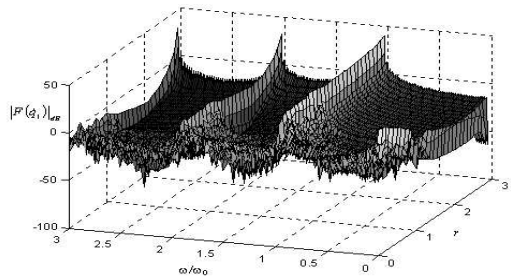
Junta 1



Junta 2



Junta 3



Junta 4

$\rho = 0.1 \text{ m}$

$\rho = 0.5 \text{ m}$

Figura 4.23: Transformada de Fourier para a velocidades das juntas do robot 4R, para 600 ciclos, vs a distância radial r e uma frequência normalizada ω / ω_0 , para $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\} \text{ m}$ e $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

Uma vez mais se verifica que para $0 < r < r_s$ (neste caso $r_s = 1.5 \text{ m}$) se obtém um sinal com a energia distribuída ao longo de todas as frequências (ω), enquanto para $r_s < r < 3$ a maior parte da energia do sinal está concentrada no harmónico fundamental e nos harmónicos múltiplos. Contudo, a componente *DC*, responsável pelo deslizamento das posições, apresenta valores que variam com a distância radial r e com o raio ρ da trajectória. de acordo com a relação:

$$|\dot{q}_i(\omega = 0)| \approx a\rho^d / (b + r^c), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.20)$$

A tabela 4.6 mostra os parâmetros correspondentes a (4.20).

Tabela 4.6: Parâmetros da componente *DC* para a transformada de Fourier das velocidades das juntas para o robot *4R*

	ρ	a	b	c	d
$\dot{q}_1(\omega = 0)$	0.005	585	0.10	2.70	2.20
	0.01	510	0.10	2.70	2.20
	0.05	400	0.20	4.40	2.10
	0.1	495	0.05	3.70	2.50
$\dot{q}_2(\omega = 0)$	0.005	295	0.80	2.50	2.00
	0.01	475	0.85	2.50	2.10
	0.05	325	0.45	4.40	2.00
	0.1	200	0.25	2.10	2.20
$\dot{q}_3(\omega = 0)$	0.005	215	0.05	1.90	2.40
	0.01	410	0.05	1.90	2.60
	0.05	225	0.20	4.40	2.40
	0.1	265	1.15	4.80	1.60
$\dot{q}_4(\omega = 0)$	0.005	370	0.30	2.50	2.10
	0.01	510	0.25	2.50	2.20
	0.05	405	1.85	4.30	1.90
	0.1	580	2.50	4.70	1.90

Nesta última experiência, analisou-se a influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária. Inicialmente variou-se o período de tempo τ de perturbação com um sinal do tipo "ruído branco". Depois disso, estimulou-se o sistema com uma perturbação do tipo "ruído rosa". Em ambos os casos, a resposta de ordem fraccionária é comparada com as experiências anteriores.

A figura 4.24 mostra os valores de α em função do tempo de de perturbação τ , com um sinal do tipo "ruído branco". Pode-se concluir que o sistema apenas revela uma natureza fraccionária para períodos de perturbação superiores a 20 *seg*. (*i.e.* $\tau > 20$ *seg*)

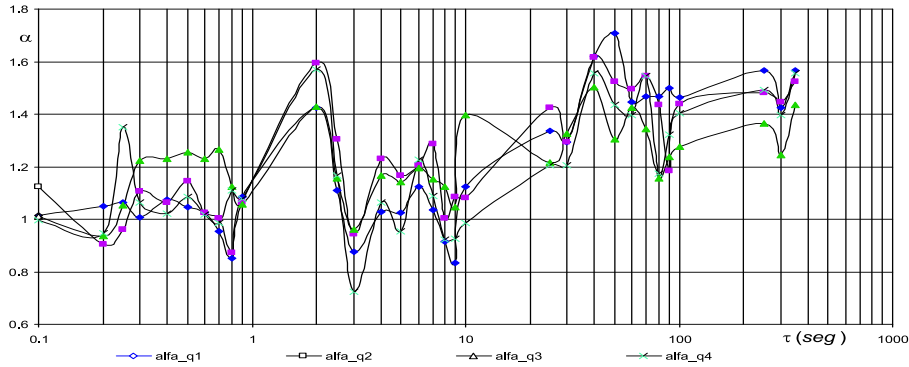


Figura 4.24: Ordem fraccionária α vs tempo de excitação τ para um tempo total de 600 *seg*, perturbação com sinal tipo *ruído branco*, robot 4R, $\rho = 0.10$ m.

A figura 4.25 compara a transformada de Fourier das posições das juntas, para uma perturbação com sinal tipo "ruído branco" e "ruído rosa", para um período de perturbação $\tau = 250$ *seg* num tempo total de 600 *seg* de experiência ($t = 600$ *seg*). Mais uma vez, pode-se concluir que o sistema se acomoda quando perturbado com um sinal tipo "ruído rosa" enquanto reage em relação à perturbação com um sinal tipo "ruído branco", transferindo energia para o espectro das frequências baixas.

4.2.3. Respostas caóticas no uso de PMF para o robot 5R

Como foi visto anteriormente o método *PMF* de controlo permite que o braço adquira configurações indesejáveis, o que poderá levar a respostas similares às que poderão ocorrer num sistema caótico. As figuras 4.29 e 4.30 mostram os planos de fase da cinemática e da dinâmica, respectivamente, das trajectórias das juntas para o robot 5R, quando é sujeito a um movimento circular, com centro num ponto de distância radial $r = [x^2 + y^2]^{1/2} = 1$ m e raio $\rho = 0.1$ m.

Na situação de controlo *PMF*, além do deslizamento verificado, nota-se que há pontos que são "evitados". Mais uma vez verifica-se que tais pontos correspondem a configurações do braço onde os vários "links" estão alinhados. Assim, como nos robots 3R e 4R, tendo em vista ganhar maior conhecimento sobre a natureza caótica do fenómeno, o robot foi

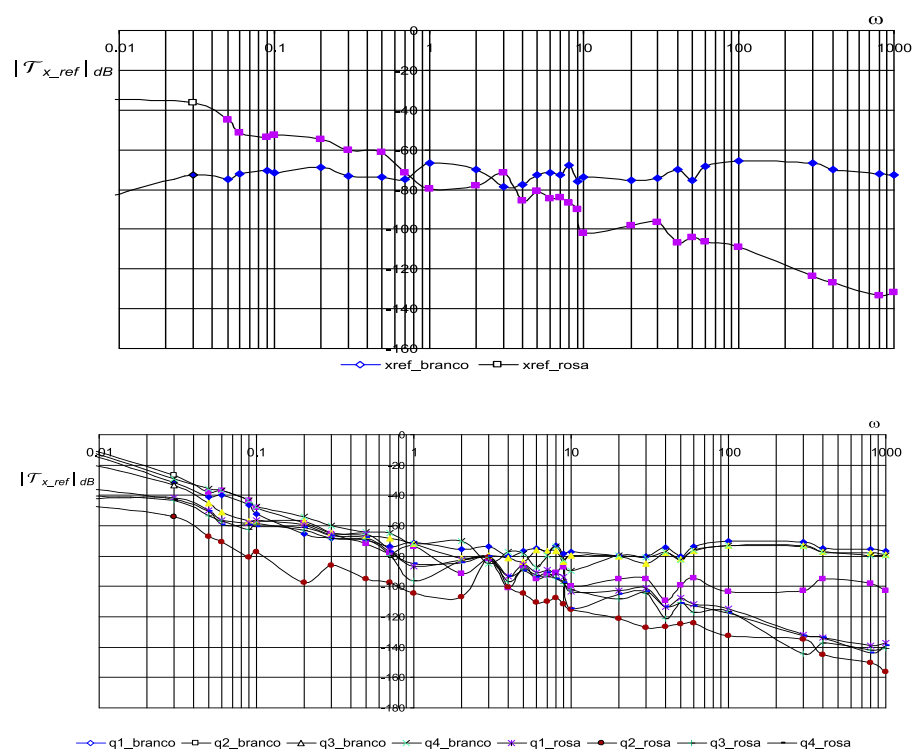
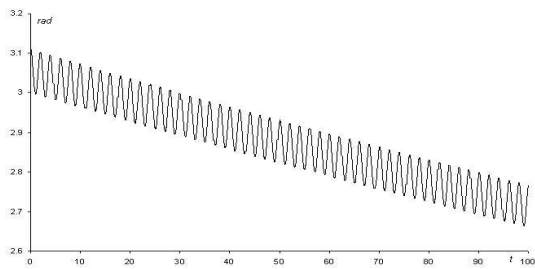
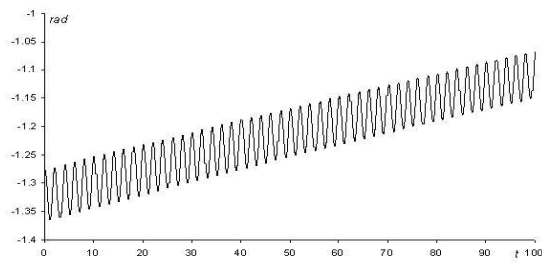
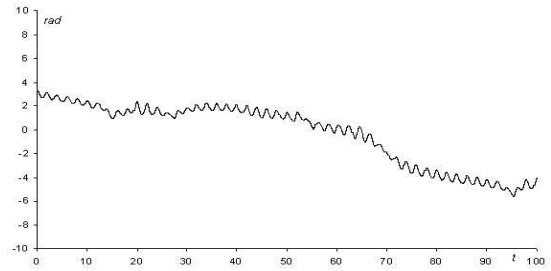


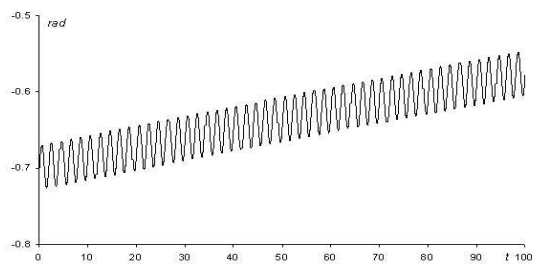
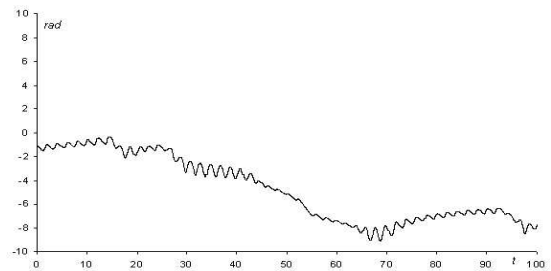
Figura 4.25: Comparação da transformada de Fourier para os sinais de entrada e de saída com perturbação com sinal tipo *ruído branco* e *ruído rosa* para robot $4R$, $\rho = 0.10 m$.



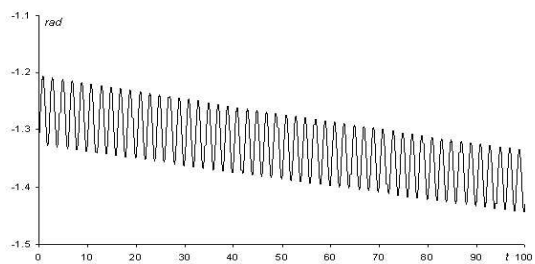
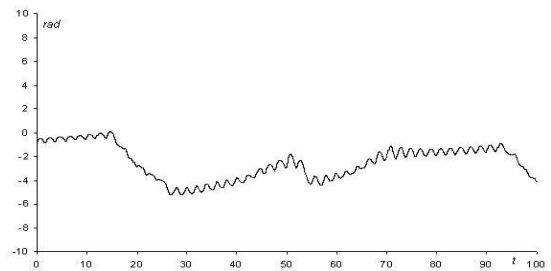
Junta 1



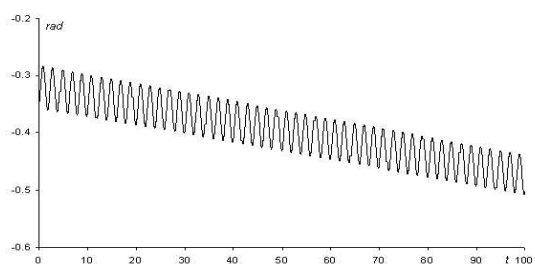
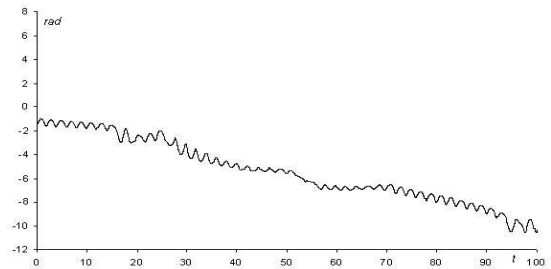
Junta 2



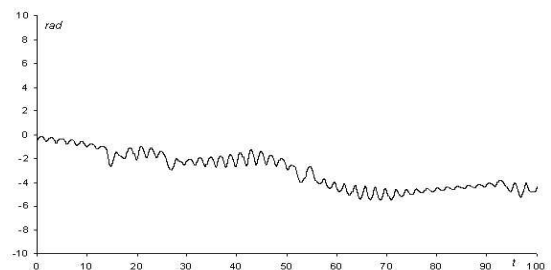
Junta 3



Junta 4



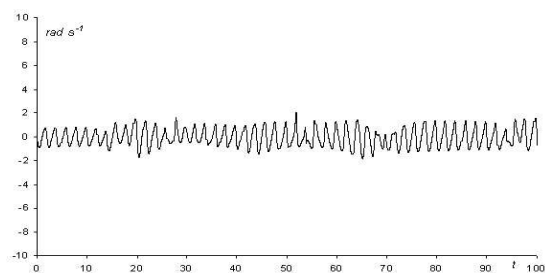
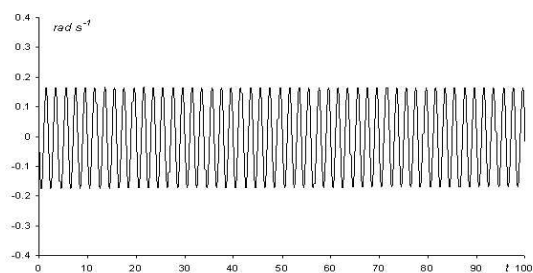
Junta 5



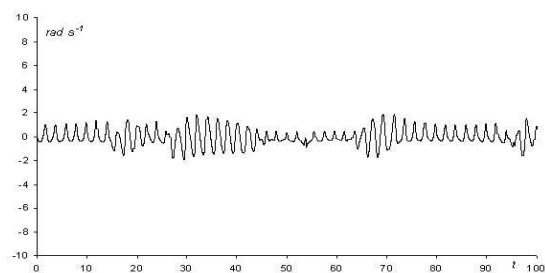
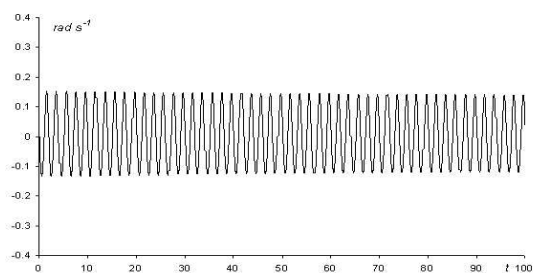
$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

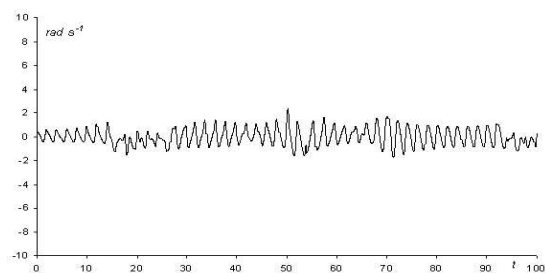
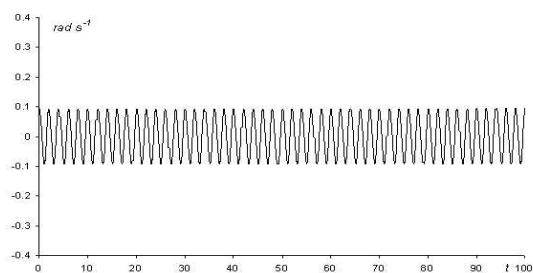
Figura 4.26: Posições das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo PMF para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.



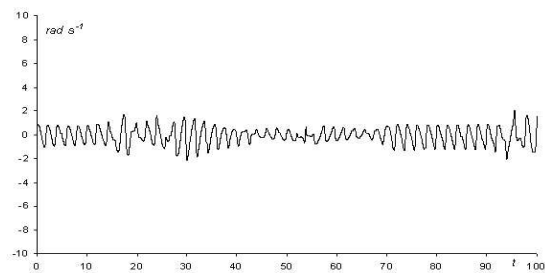
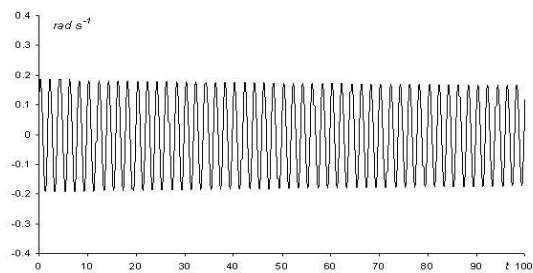
Junta 1



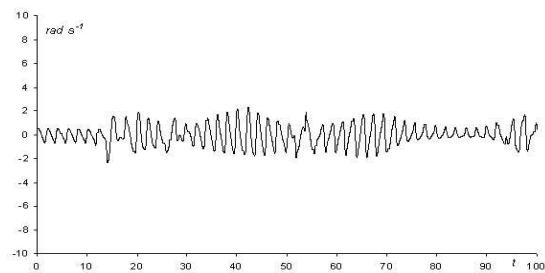
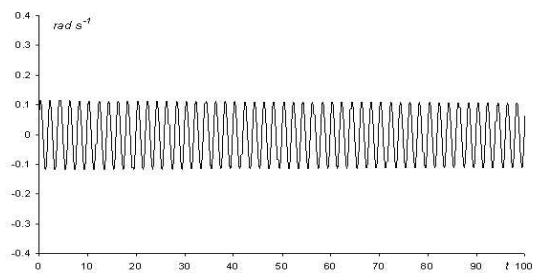
Junta 2



Junta 3



Junta 4

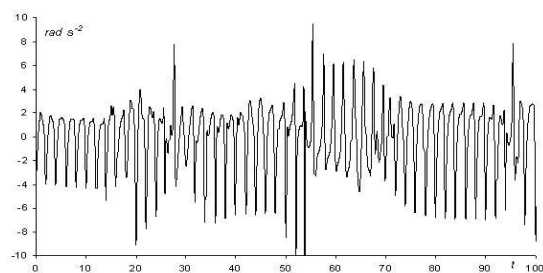
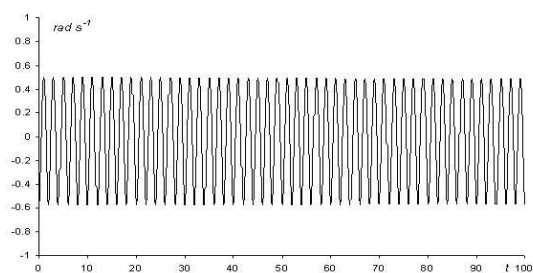


Junta 5

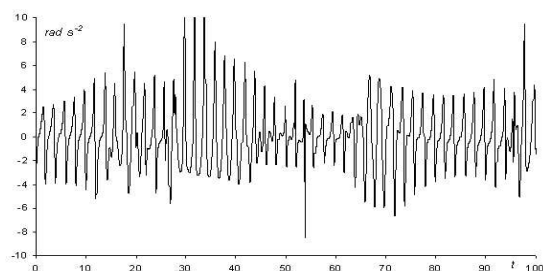
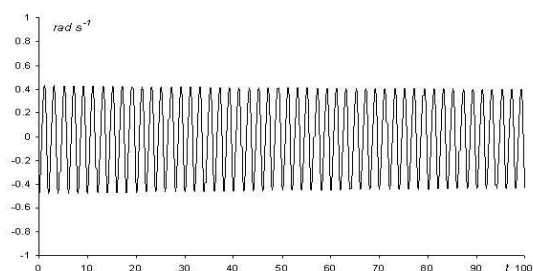
$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

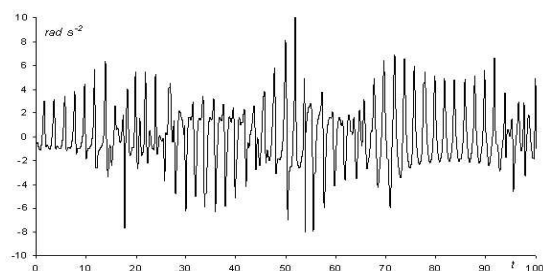
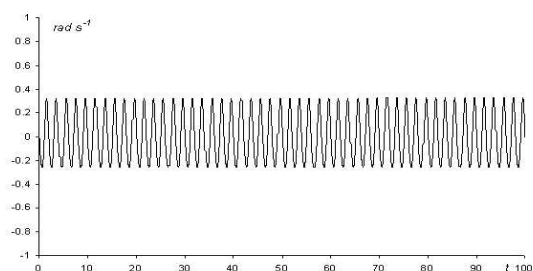
Figura 4.27: Velocidades das juntas na trajectória para o robot 5R, sob controlo *PMF* para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.



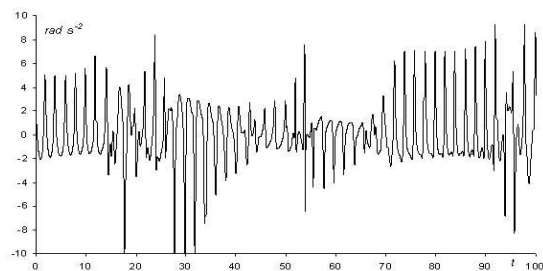
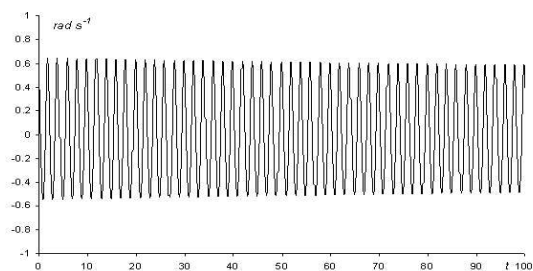
Junta 1



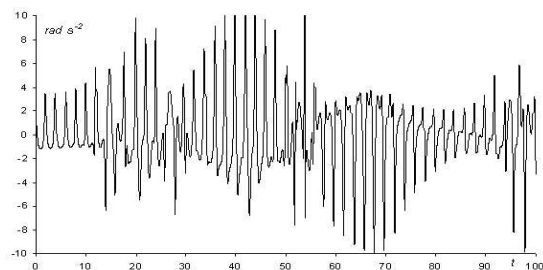
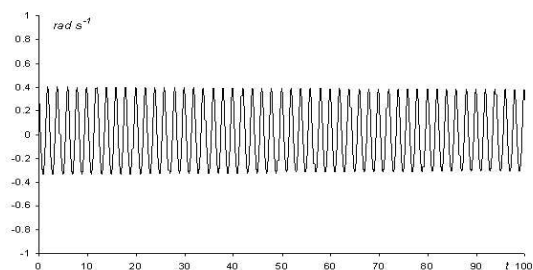
Junta 2



Junta 3



Junta 4



Junta 5

$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

Figura 4.28: Acelerações das juntas na trajectória para o robot 5R, sob controlo *PMF* para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

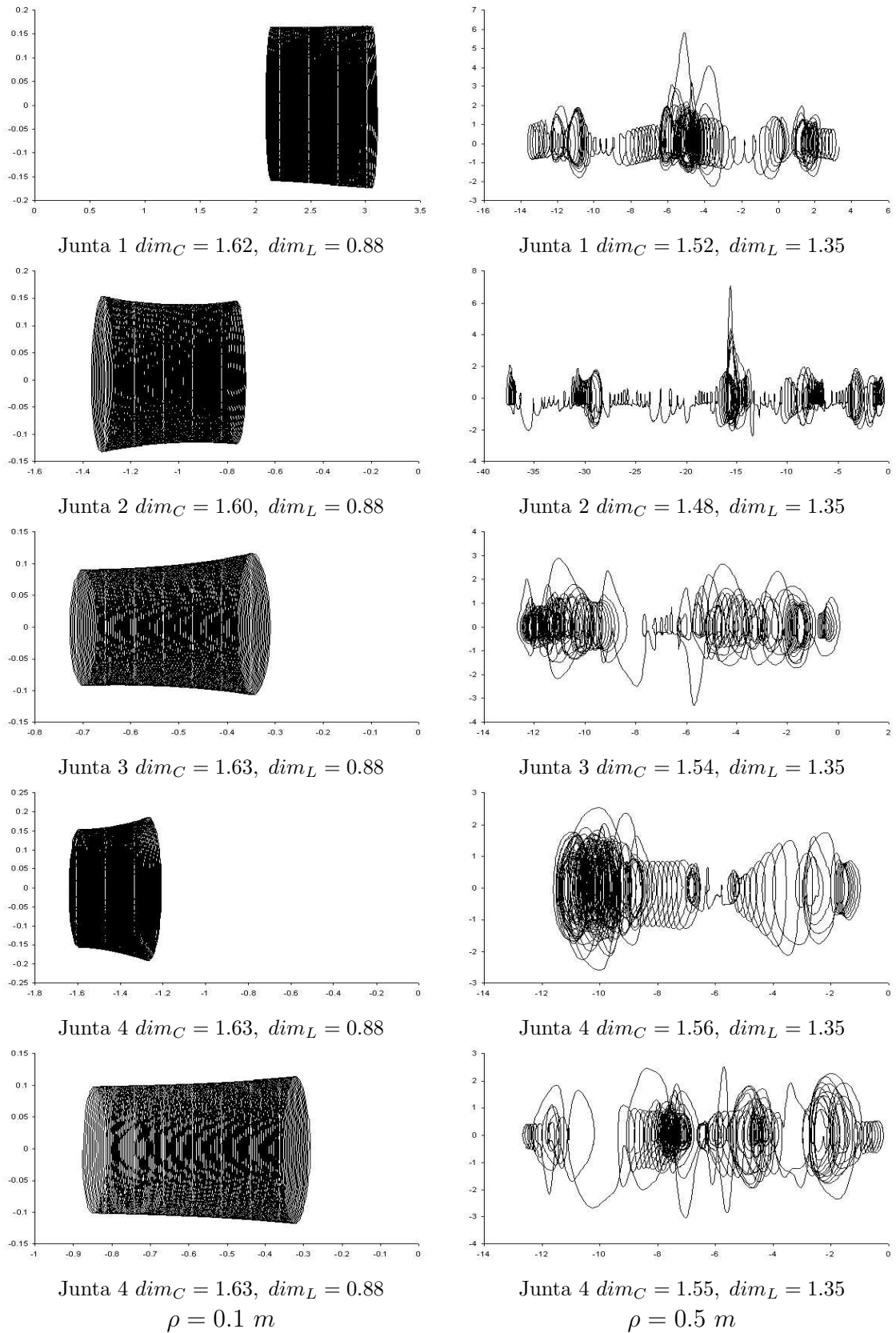


Figura 4.29: Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot 5R, sob controlo *PMF* para $r = 1 m, \omega_0 = 3 rad s^{-1}$.

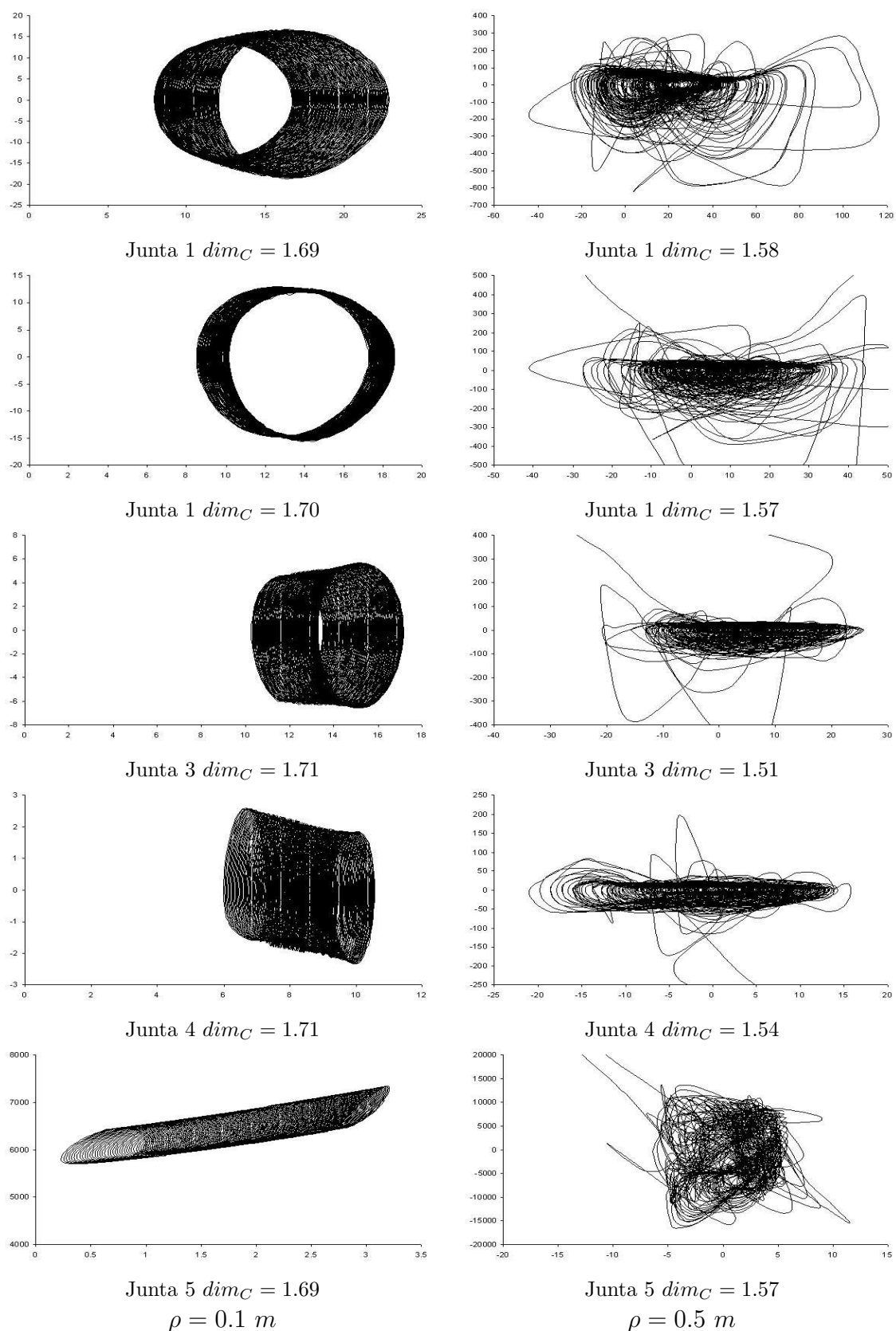


Figura 4.30: Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot 5R, sob controlo *PMF* para $r = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

sujeito a vários movimentos circulares repetitivos, para várias distância radiais (r) e raio (ρ). O plano de fase das trajectórias das juntas foi analisado e calculada a respectiva *dimensão fractal* (dim). Aplicando as equações (4.15) e (4.16) aos resultados obtemos a figura 4.31, que revela:

- Com o método *PMF* obtém-se $dim_C > 1$ tanto para as posições como para as velocidades, em contraste com caso comum, isto é, para trajectórias de robots não redundantes, onde se verifica que $dim_C = 1$.
- dim_C diminui próximo da distância radial máxima $r = 3 m$.
- dim_C é aproximadamente constante, para todas as juntas.
- Como é conhecido da teoria do caos, geralmente $dim_L \neq dim_C$. Além disso, o ponto $r = r_s$ ($r_s = 0.6 m$) para o robot $5R$ tende a ser, o limite entre duas regiões distintas.

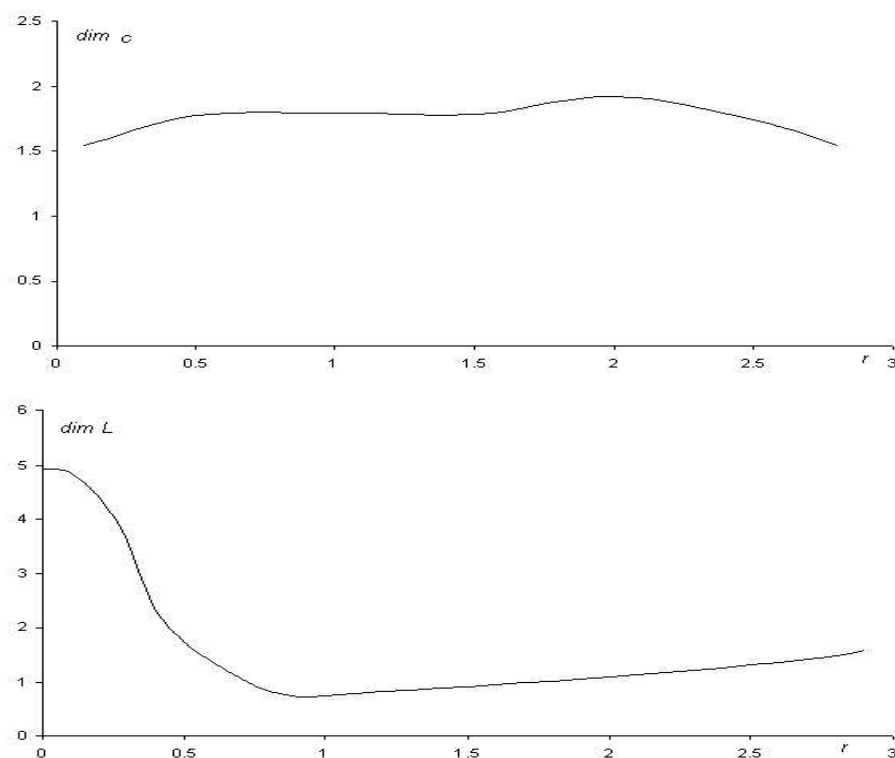


Figura 4.31: Lyapunov (dim_L) e "box-counting" (dim_C) dimensões do plano de fase vs r , robot $5R$ sob controlo *PMF* para $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$ e $\rho = 0.1 m$.

4.2.3.1. Distribuição estatística das juntas para o robot 5R

Para aprofundar o conhecimento sobre a natureza dos movimentos obtidos usando o método *PMF*, várias experiências foram feitas, com o objectivo de estabelecer a textura do Jacobiano.

No primeiro conjunto de experiências a figura 4.32 mostra a distribuição estatística das variáveis das juntas q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) *versus* a distância radial r para o robot 5R quando controlado pelo método *PMF*, para um raio $\rho = 0$. Pode-se concluir que:

- As configurações possíveis do robot têm probabilidades diferentes.
- Os histograma para a junta 1 tem características distintas em relação às outras que têm características similares.
- O ponto singular $r_s = 0.6$ m, representa uma fronteira entre duas região distintas, $0 < r < r_s$ e $r_s < r < l_T$.

4.2.3.2. Resposta a perturbação com um sinal tipo dobrete para o robot 5R

Numa segunda experiência perturbou-se o sinal de entrada com um sinal tipo dobrete durante um período de tempo de 0.2 *seg*, entre o instante $t = 0.9$ *seg* e $t = 1.1$ *seg* para uma distância radial $r = 2$ m e raios diferentes $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\}$ m. A figura 4.33 mostra os resultados, mas é claro que a matriz de transferência para o sistema *MIMO* $(x_{ref}, y_{ref}) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$ depende fortemente da amplitude do raio (ρ). Além disso os diagramas de bode revelam que o método *PMF* apresenta "ganhos" distintos, para as variáveis das juntas, de acordo com as diferentes frequências. Esta conclusão é consistente com os gráficos do plano de fase, que revelam deslizamentos de baixa frequência, enquanto respondem a altas frequências (w_0) do sinal de entrada.

A tabela 4.7 mostra os parâmetros para a função de transferência do tipo:

$$\frac{q_i(s)}{x_{ref}(s)} = k \frac{s^\alpha + a}{s^\alpha + b} \quad (4.21)$$

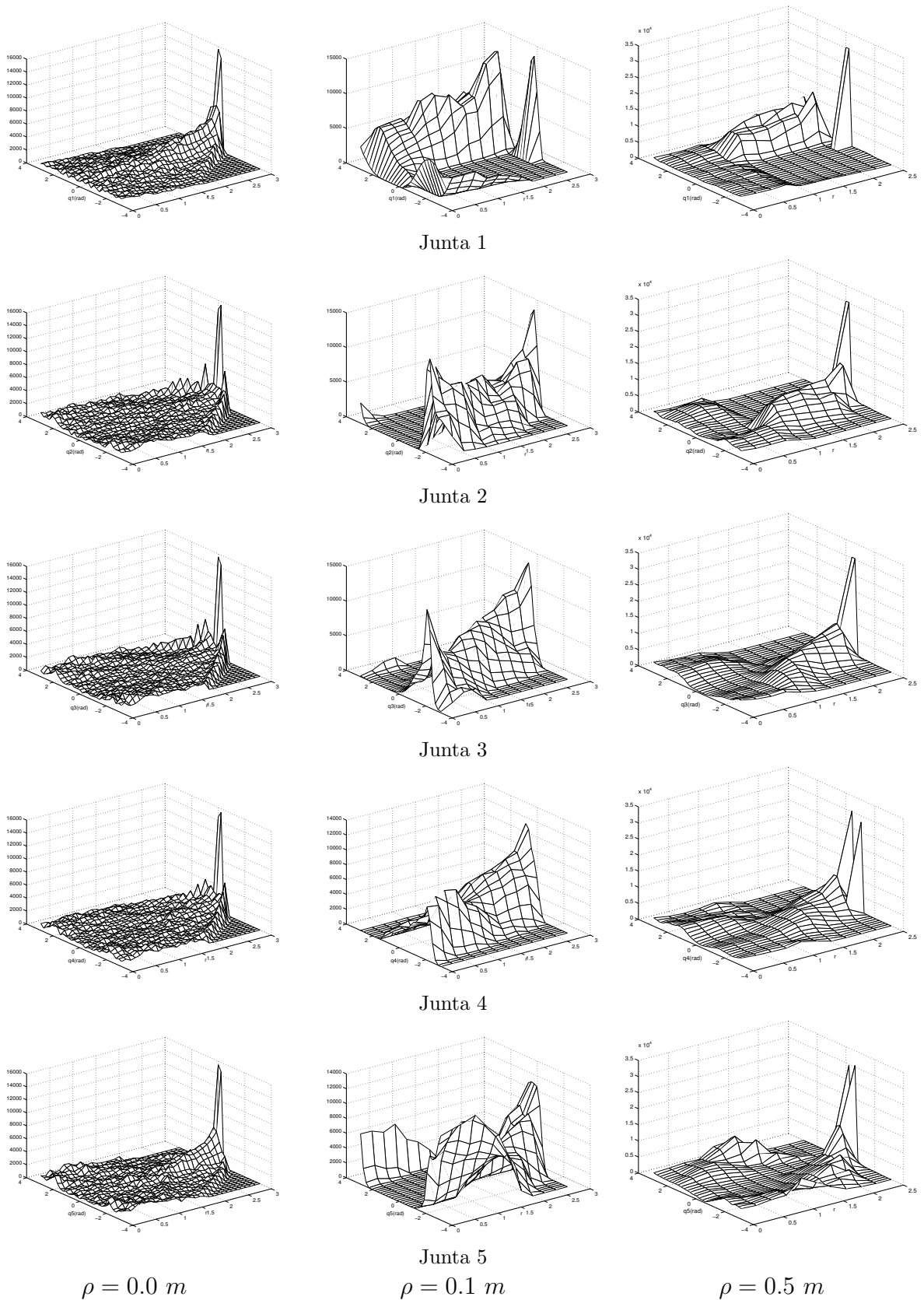
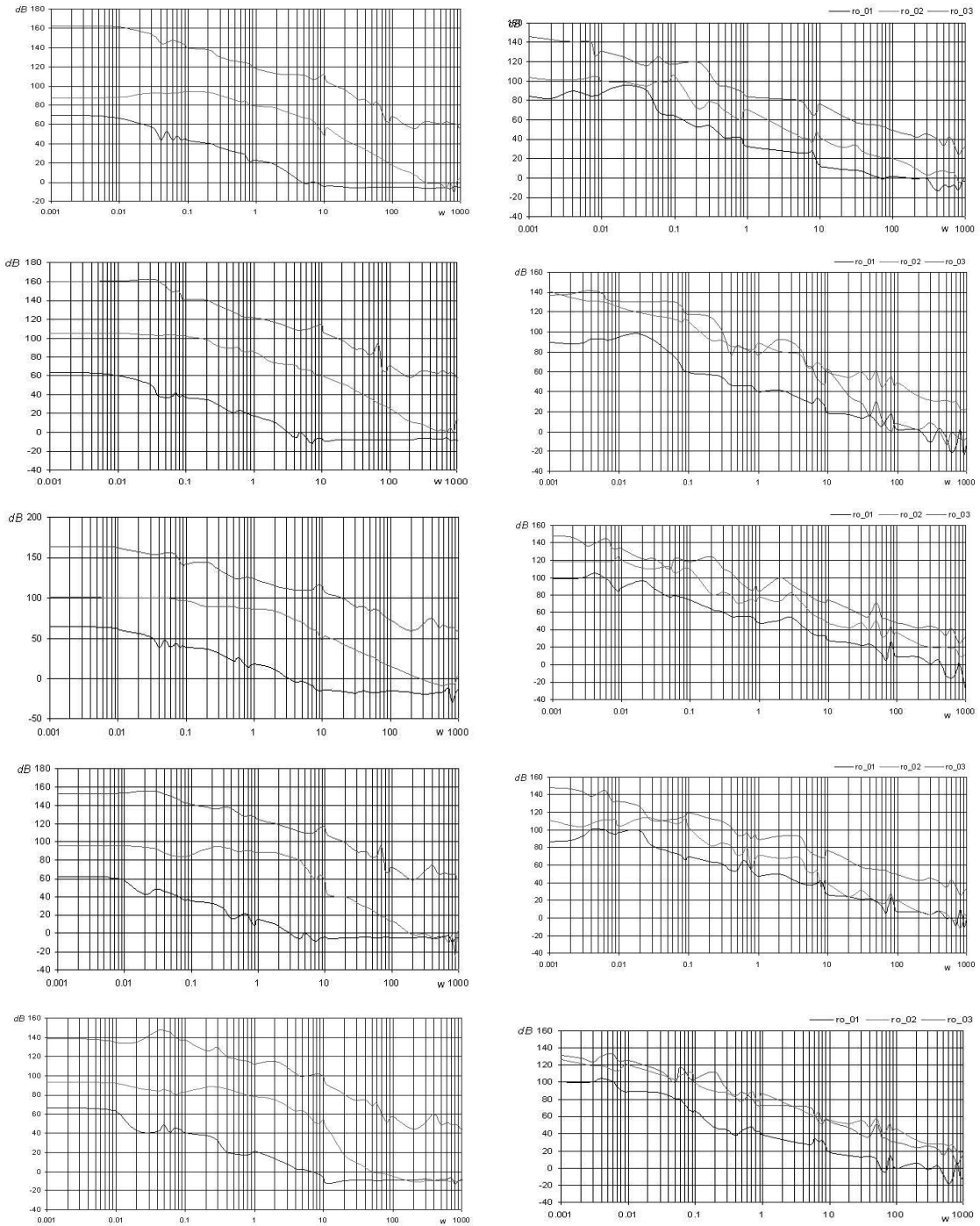


Figura 4.32: Distribuição estatística das posições de juntas para robot 5R, vs distância radial r . Raio $\rho \in \{0.00, 0.10, 0.50\}$. Ponto singular para $r_s = 0.6 \text{ m}$.



Perturbação com dobrete

Perturbação com ruído branco

Figura 4.33: Resposta em frequência para o robot $5R$, para $r = 1\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$, e $\rho \in \{0.10, 0.30, 0.50\}\text{ m}$ e perturbação com sinal tipo *dobrete* e sinal tipo *ruído branco*.

Note-se que α toma valores próximos de 1 ($\alpha \approx 1$). Para $\frac{q_i(s)}{y_{ref}(s)}$ obtiveram-se as mesmas conclusões.

Tabela 4.7: Parâmetros da função de transferência para o robot 5R e uma perturbação do tipo *doblete*.

	ρ	a	b	k	α
q_1/x_{ref}	0.10	23.99	0.005	0.83	1.03
	0.30	29.82	0.006	0.83	1.20
	0.50	19.57	0.04	0.24	0.92
q_2/x_{ref}	0.10	228.21	0.005	0.13	1.02
	0.30	317.91	0.006	0.10	1.33
	0.50	46.00	0.03	0.24	1.08
q_3/x_{ref}	0.10	3.56	0.01	0.34	1.04
	0.30	6.21	0.002	0.35	1.22
	0.50	5.36	0.01	0.19	1.02
q_4/x_{ref}	0.10	30.29	0.005	0.53	1.05
	0.30	41.14	0.008	0.53	1.22
	0.50	16.94	0.03	0.44	1.07
q_5/x_{ref}	0.10	48.64	0.005	0.24	1.04
	0.30	58.20	0.005	0.25	1.22
	0.50	25.87	0.04	0.24	1.06

4.2.3.3. Resposta a perturbação com um sinal tipo ruído branco para o robot 5R

O terceiro conjunto de experiências diz também respeito a resposta em frequência, mas neste caso quando o sinal da perturbação é do tipo "ruído branco" distribuído ao longo de toda a trajectória (500 ciclos).

Neste caso os valores de α (tabela 4.8) são fraccionários ($1.0 < \alpha < 1.4$), em contraste com os resultados anteriores. Isto é devido ao facto da propriedade de "memória no tempo" intrínseca ao CF , já que captura os fenómenos dinâmicos ao longo de todo o tempo da experiência, em contraste com a derivada de ordem inteira que apenas captura os fenómenos dinâmicos "locais". Para $\frac{q_i(s)}{y_{ref}(s)}$ as conclusões são semelhantes.

Tabela 4.8: Parâmetros da função de transferência para o robot 5R e uma perturbação do tipo *ruído branco*.

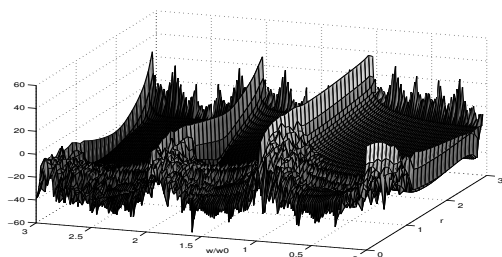
	ρ	a	b	k	α
q_1/x_{ref}	0.10	195	0.009	0.63	1.18
	0.30	3020	0.02	0.92	1.20
	0.50	925	0.02	34.8	1.03
q_2/x_{ref}	0.10	1680	0.009	0.13	1.08
	0.30	1130	0.002	13.7	1.02
	0.50	18300	0.001	0.41	1.50
q_3/x_{ref}	0.10	4710	0.05	0.009	1.05
	0.30	1610	0.007	3.56	1.10
	0.50	1260	0.002	34.3	1.02
q_4/x_{ref}	0.10	1610	0.02	0.28	1.02
	0.30	265	0.01	9.54	1.34
	0.50	9620	0.002	4.80	1.02
q_5/x_{ref}	0.10	186	0.002	1.00	1.16
	0.30	10300	0.006	1.00	0.97
	0.50	11200	0.004	1.00	1.17

4.2.3.4. Análise da influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária, para o robot 5R

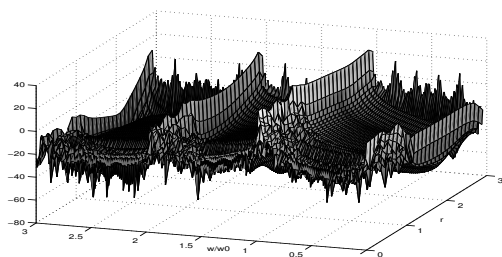
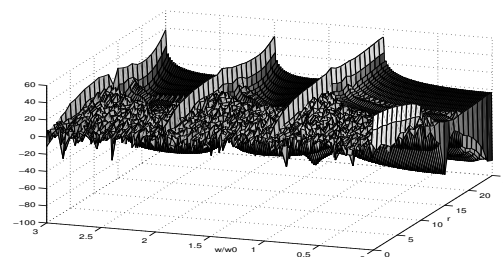
Numa terceira experiência, e após se ter dissipado o efeito do transitório inicial, calculou-se a transformada de Fourier das velocidades das juntas para um número de ciclos considerável (600 *ciclos* = 1200 *seg*) com uma frequência $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

A figura 4.34 mostra a transformada de Fourier *versus* distância radial r das juntas do robot 5R, para uma trajectória circular de raio $\rho \in \{0.10, 0.50\} \text{ m}$.

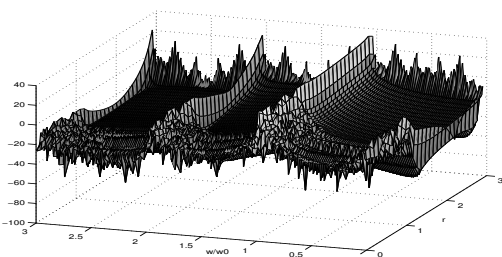
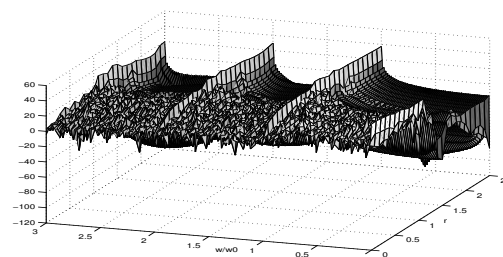
Uma vez mais se verifica que para $0 < r < r_s$ se obtém um sinal com a energia distribuída ao longo de todas as frequências (ω), enquanto para $r_s < r < 3 \text{ m}$ a maior parte da energia do sinal está concentrada no harmónico fundamental e nos harmónicos múltiplos. Contudo, a componente *DC*, responsável pelo deslizamento das posições, apresenta valores que variam com a distância radial r e com o raio ρ da trajectória. de acordo com a relação:



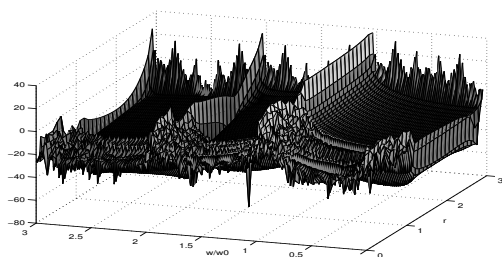
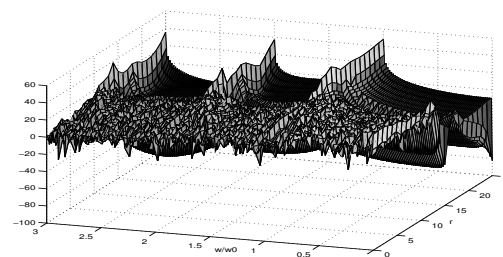
Junta 1



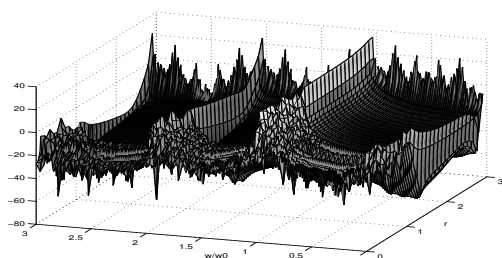
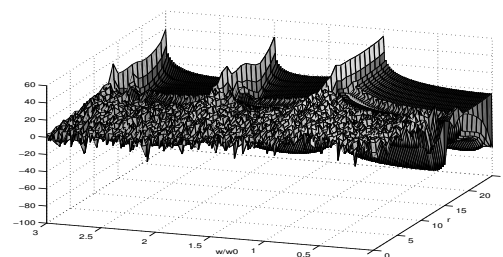
Junta 2



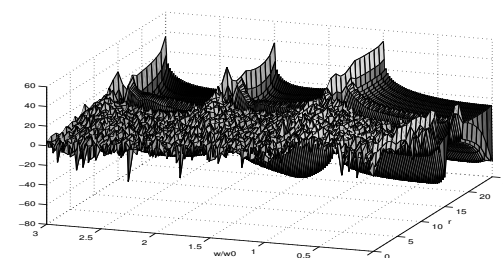
Junta 3



Junta 4



Junta 5



$$\rho = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 0.5 \text{ m}$$

Figura 4.34: Transformada de Fourier para a velocidades das juntas do robot 5R, para 600 ciclos, *vs* a distância radial *r* e uma frequência ω/ω_0 , para $\rho \in \{0.10, 0.50\} \text{ m}$ e $\omega_0 = 3 \text{ rad/seg}$.

$$|\dot{q}_i(\omega = 0)| \approx a\rho^d / (b + r^c), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.22)$$

A tabela 4.9 mostra os parâmetros correspondentes a (4.22).

Tabela 4.9: Parâmetros da componente *DC* para a transformada de Fourier das velocidades das juntas para o robot 5R.

	ρ	a	b	c	d
$\dot{q}_1(\omega = 0)$	0.005	460	0.15	1.80	2.10
	0.01	420	0.15	1.90	2.10
	0.05	335	0.05	2.50	2.10
	0.1	320	0.05	3.70	2.30
$\dot{q}_2(\omega = 0)$	0.005	370	2.50	0.05	1.90
	0.01	390	2.50	0.05	1.90
	0.05	345	0.15	1.50	2.10
	0.1	350	0.20	2.10	2.30
$\dot{q}_3(\omega = 0)$	0.005	445	0.05	0.70	2.30
	0.01	225	0.05	0.80	2.20
	0.05	475	0.05	4.30	2.70
	0.1	210	1.60	5.00	1.70
$\dot{q}_4(\omega = 0)$	0.005	470	2.50	0.50	2.00
	0.01	285	2.50	0.50	1.90
	0.05	310	0.05	0.80	2.40
	0.1	395	0.50	2.80	2.50
$\dot{q}_5(\omega = 0)$	0.005	410	2.50	0.50	2.00
	0.01	255	2.50	0.50	1.90
	0.05	345	0.10	1.50	2.30
	0.1	405	2.50	2.80	2.20

Nesta última experiência, analisou-se a influência da excitação sobre a função de transferência de ordem fraccionária. Inicialmente variou-se o período de tempo τ de perturbação com um sinal do tipo "ruído branco". Depois estimulou-se o sistema com uma perturbação do tipo "ruído rosa". Em ambos os casos, a resposta de ordem fraccionária é comparada com as experiências anteriores. A figura 4.35 mostra os valores de α em função do tempo de de perturbação τ , com um sinal do tipo "ruído branco". Neste caso, devido às variações de α , é difícil concluir sobre os valores de τ para os quais o sistema apenas revela uma natureza fraccionária. Provavelmente é necessário repetir a experiência com um maior número de ciclos.

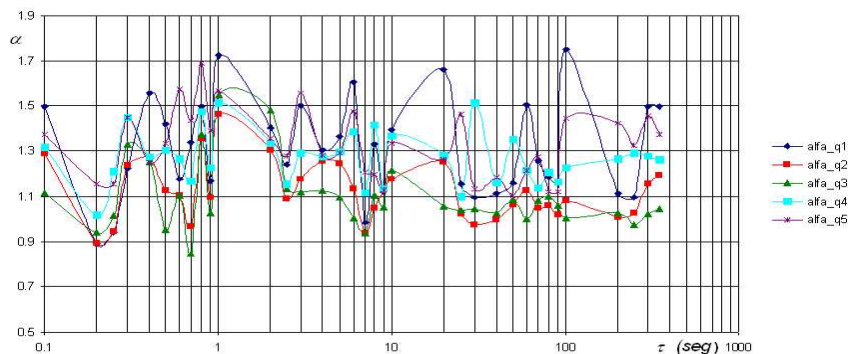


Figura 4.35: Ordem fraccionária α vs tempo de excitação τ para um tempo total de 600 seg, perturbação com sinal tipo *ruído branco* para o robot 5R.

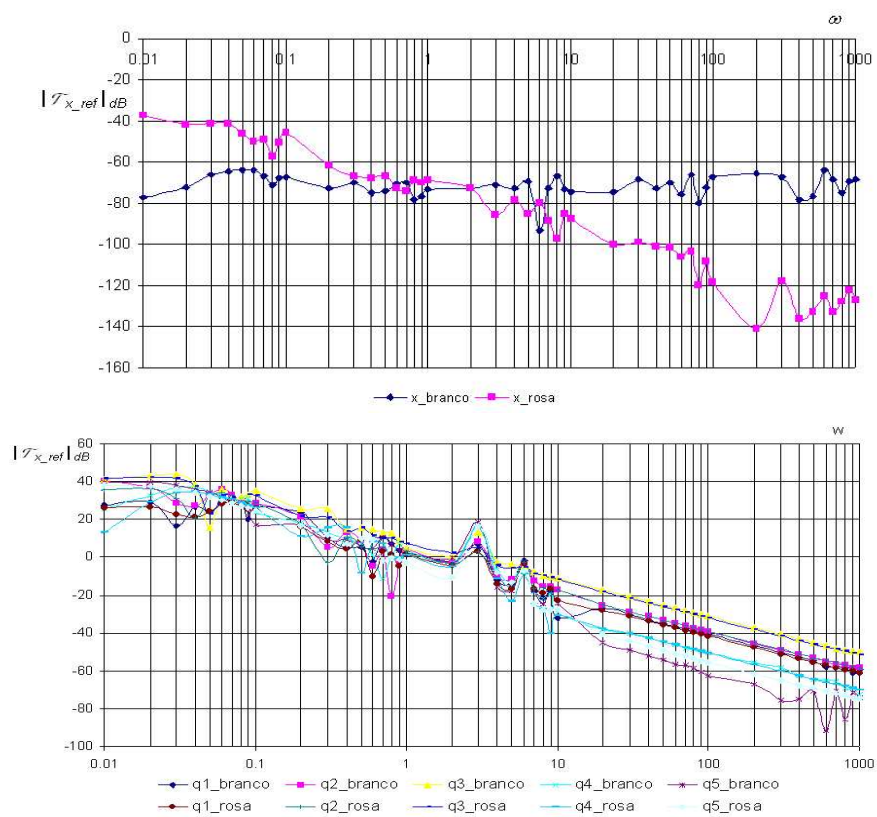


Figura 4.36: Comparação da transformada de Fourier para os sinais de entrada e de saída com perturbação com sinal tipo *ruído branco* e *ruído rosa* para o robot 5R.

A figura 4.36 compara a transformada de Fourier das posições das juntas, para uma perturbação com sinal tipo "ruído branco" e "ruído rosa", para um período de perturbação $\tau = 250 \text{ seg}$ num tempo total de 600 seg de experiência ($t = 600 \text{ seg}$). Pode-se concluir que o sistema se acomoda quando perturbado com um sinal tipo "ruído rosa" enquanto reage em relação à perturbação com um sinal tipo "ruído branco", transferindo energia para o espectro das frequências baixas.

4.3. Métodos de Controlo com Optimização de Índices

Como já foi amplamente referido um aspecto revelado pelo método *PMF* é que trajectórias repetitivas, no espaço operacional, não são traduzidas por trajectórias repetitivas, no espaço das juntas [84, 85]. Este facto torna-se um obstáculo no que respeita à solução de muitas tarefas já que as configurações resultantes da estrutura têm similaridades com as resultantes de um sistema caótico. No sentido de solucionar este problema outros métodos alternativos de controlo foram propostos, nomeadamente pelo aumento da dimensão do Jacobiano ou introduzindo um critério de optimização (por forma a tornar o Jacobiano uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$). Nesta secção será apresentado o método de optimização "Manipulabilidade em Malha Aberta" (*MMA*) [17, 18, 19, 20, 32] que apresenta superior resultados no que respeita à manipulabilidade (μ) e à repetitibilidade.

Assim, serão apresentados os resultados para as experiências feitas com optimização de μ , para cada uma das situações: trajectória circular no espaço livre sem obstáculos e trajectória num espaço de trabalho com obstáculos.

4.3.1. Trajectória circular num espaço sem obstáculos

4.3.1.1. O Método de Optimização da Manipulabilidade (MMA)

No método "Manipulabilidade em Malha Aberta" (*MMA*) as posições das juntas adoptadas, para uma posição do órgão terminal, no espaço operacional, depende do índice de manipulabilidade correspondente. Para analisar e quantificar essa capacidade foi proposta, por [90], a expressão $\mu = [\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)]^{1/2}$ como uma medida da capacidade de manipulação no estado \mathbf{q} que corresponde a determinada configuração da estrutura do

robot. O método *MMA* (Fig. 4.37) assenta as suas potencialidades na escolha da configuração que apresenta um μ máximo para a mesma localização do órgão terminal no espaço operacional. O algoritmo pode ser descrito como:

Para um determinado ponto do espaço operacional $\mathbf{r} = (x, y)$, fixa-se o ponto no espaço das juntas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ que maximiza o valor de μ , para determinada posição do órgão terminal no espaço operacional. Atendendo à simetria da cinemática, para este tipo de robots, μ apenas depende da distância radial (r) entre o ponto considerado e a origem das coordenadas. Assim, é calculado um conjunto $n - m$, de pontos no espaço das juntas que maximizem μ . A partir desses $n - m$ valores e usando o método dos mínimos quadrados, são calculadas $n - m$ funções \mathbf{r} -dependentes (funções polinomiais ou outras) que aproximem esses valores.

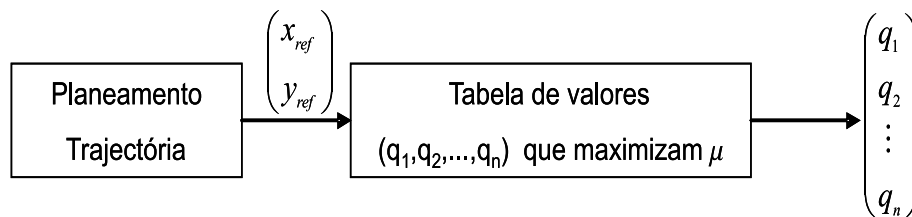


Figura 4.37: Diagrama de blocos para o método *MMA*

Uma vez "fixadas" essas $n - m$ variáveis no espaço das juntas, as restantes m posições das juntas podem ser calculadas através do algoritmo normal para o cálculo da cinemática inversa (3.14) de um robot não redundante.

4.3.1.1.1. Respostas com o método *MMA* para o robot $3R$

Experiências semelhantes às realizadas sob o método de controlo *PMF* foram repetidas usando o método de controlo *MMA*.

Para este método as funções \mathbf{r} -dependentes calculadas foram polinómios do terceiro grau.

Neste caso, robot $3R$ há necessidade de apenas aproximar uma das variáveis, neste estudo optou-se pela aproximação da variável q_3 , sendo a aproximação usada a seguinte:

$$q_3 = -2.078 + 0.957 r - 0.586 r^2 + 0.159 r^3 \quad (4.23)$$

sendo as restantes variáveis, q_1 , q_2 determinadas pela resolução da cinemática inversa de acordo com a equação (3.14).

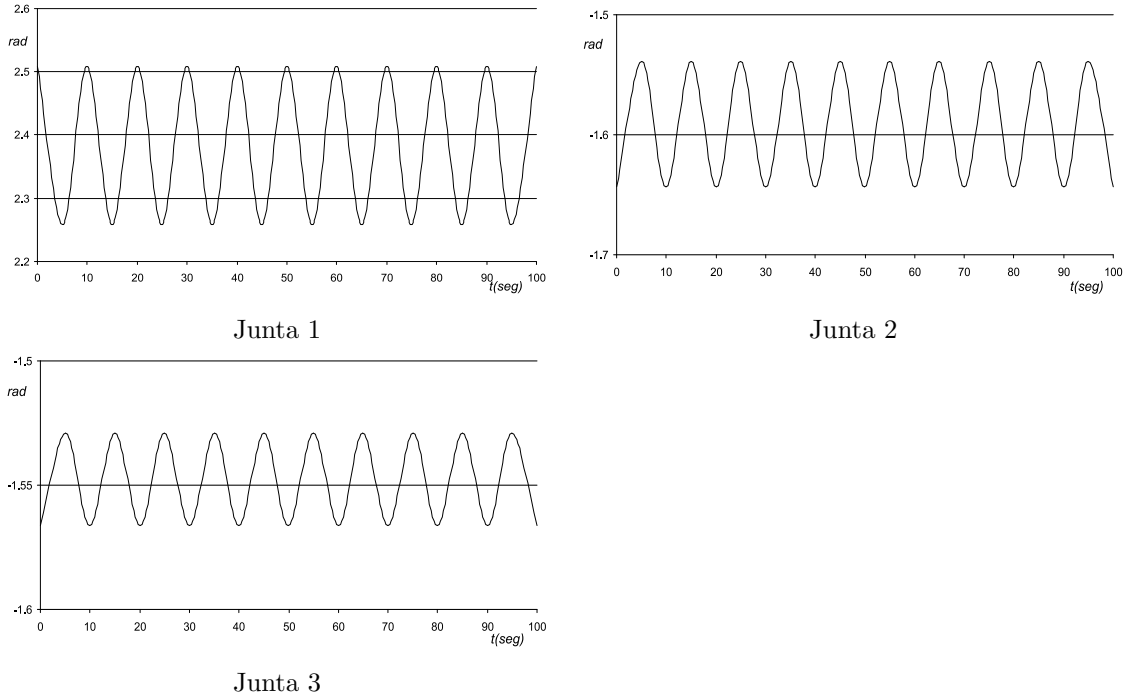


Figura 4.38: Posições das juntas na trajectória para o robot $3R$, sob controlo MMA para $r = 1 m$, $\rho = 0.5 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$.

Experiências, com resultados aproximadamente semelhantes, foram levadas a cabo usando, em vez de polinómios do terceiro grau, fracções racionais do tipo:

$$q_3 = \frac{-1.99 + 0.67 r}{1 - 0.11 r + 0.06 r^2} \quad (4.24)$$

4.3.1.1.2. Respostas com o método MMA para o robot $4R$

Para o robot $4R$ as funções r -dependentes adoptadas foram polinómios de grau dois, pois verificou-se conduzir a uma precisão "suficiente".

Neste caso, (robot $4R$), há necessidade de aproximar duas das variáveis. Assim, foi decidida a aproximação das variáveis q_4 e q_3 , sendo as aproximações usadas as seguintes:

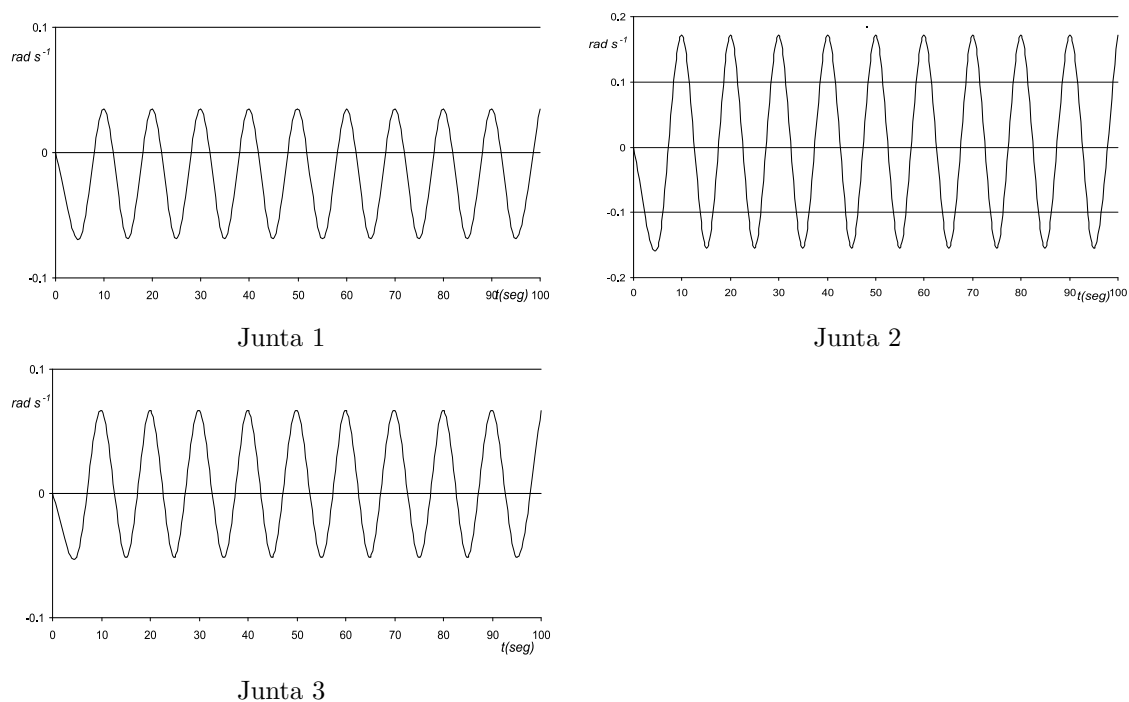


Figura 4.39: Velocidades das juntas na trajectória para o robot $3R$, sob controlo MMA para $r = 1 \text{ m}$, $\rho = 0.5 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

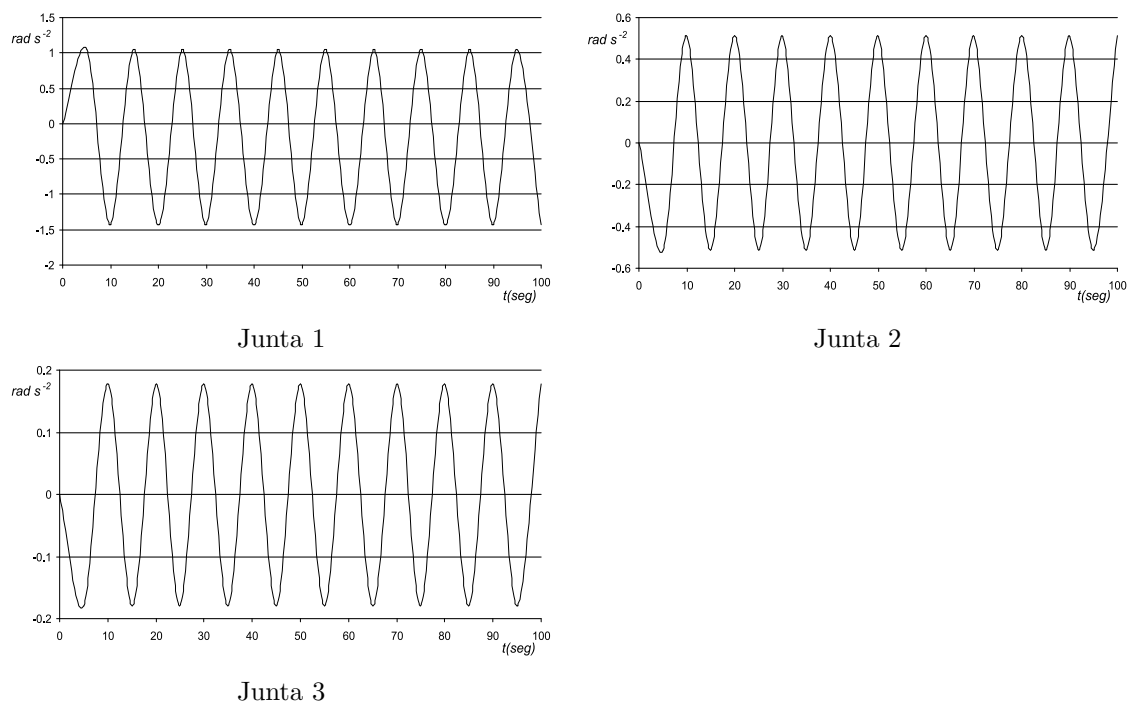


Figura 4.40: Acelerações nas juntas q_1 , q_2 , q_3 na trajectória para o robot $3R$, sob controlo MMA para $r = 1 \text{ m}$, $\rho = 0.5 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

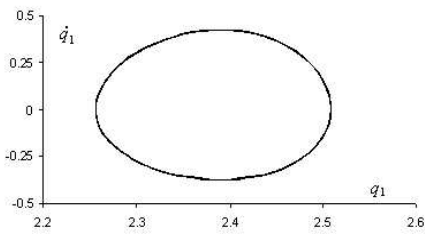
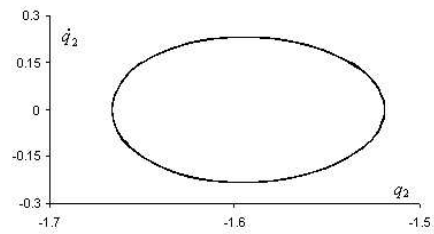
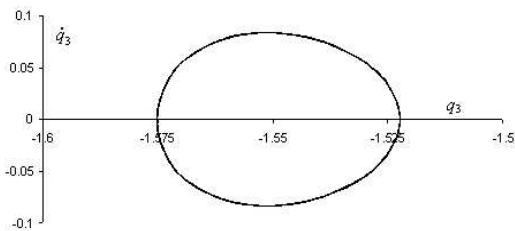
Junta 1, $dim_C = 0.99$, $dim_L = 1.02$ Junta 2, $dim_C = 0.99$, $dim_L = 1.02$ Junta 3, $dim_C = 0.98$, $dim_L = 1.02$

Figura 4.41: Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $3R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

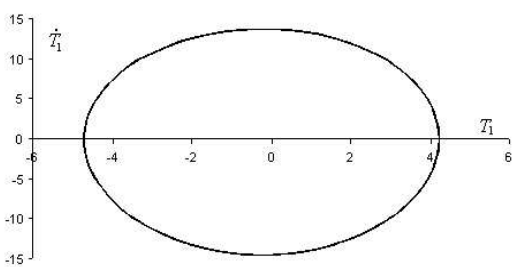
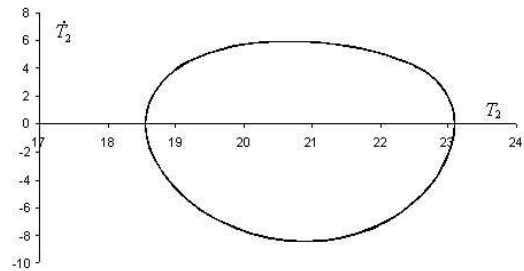
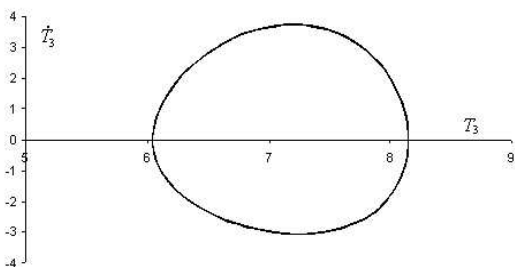
Junta 1, $dim_C = 1.08$ Junta 2, $dim_C = 1.02$ Junta 3, $dim_C = 1.06$

Figura 4.42: Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot $3R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

$$\begin{aligned} q_4 &= -1.608 + 0.914 r - 0.183 r^2 \\ q_3 &= -1.464 - 0.322 r - 0.258 r^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo as restantes variáveis, q_1 , q_2 determinadas pela resolução da cinemática inversa de acordo com a equação (3.14).

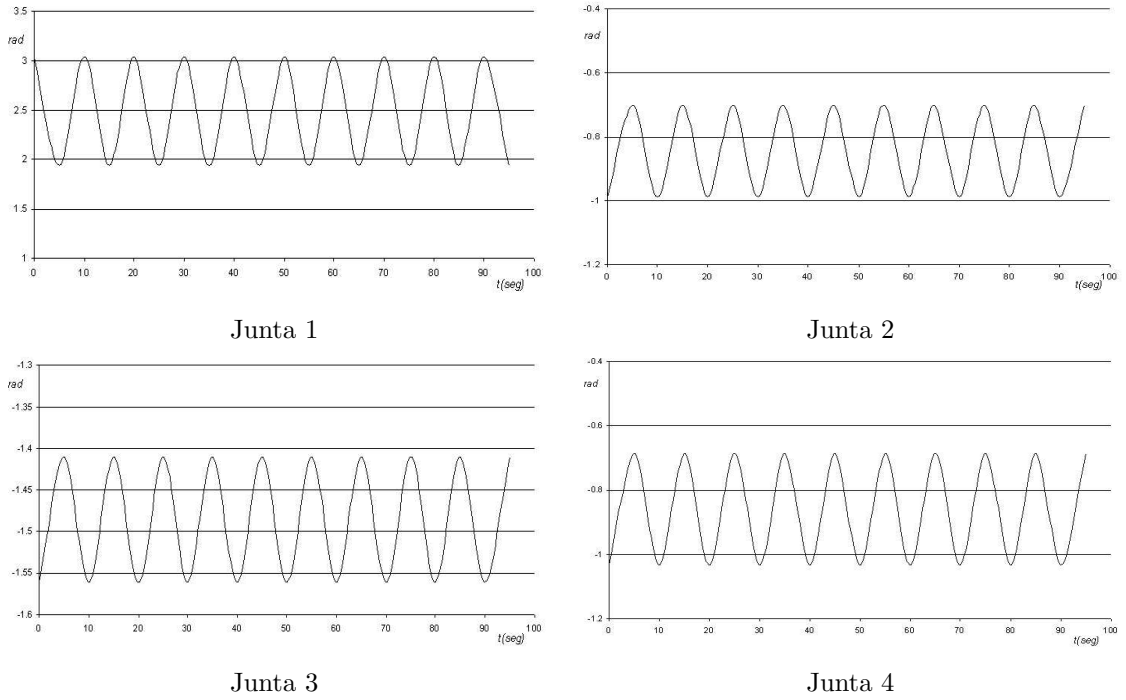


Figura 4.43: Posições das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo MMA para $r = 1 m$, $\rho = 0.5 m$, $\omega_0 = 3 rad s^{-1}$.

Foram também repetidas as experiências usando aproximações para as juntas q_4 e q_3 com fracções racionais para os seguintes valores dos parâmetros:

Foram também repetidas as experiências usando aproximações para as juntas q_4 e q_3 com fracções racionais para os seguintes valores dos parâmetros:

$$\begin{aligned} q_4 &= \frac{-0.04 - 75.86 r}{1 - 29.64 r + 58.81 r^2} \\ q_3 &= \frac{-2.17 + 0.74 r}{1 - 0.18 r - 0.01 r^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Neste caso os resultados finais foram menos exactos do que para a aproximação polinomial.

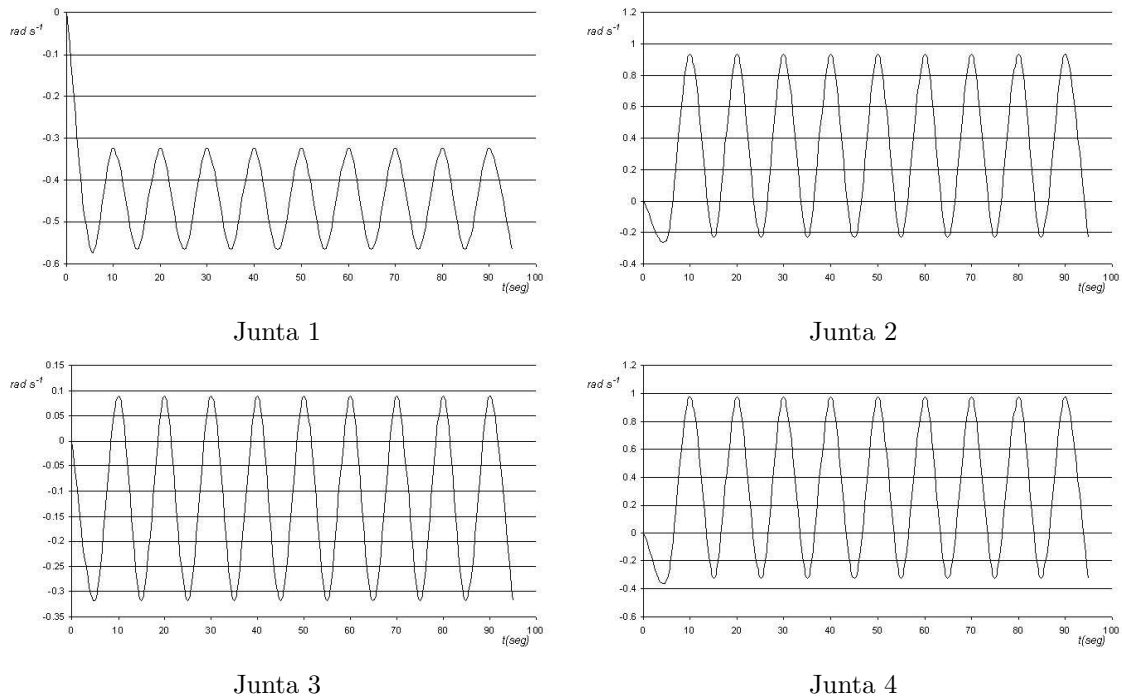


Figura 4.44: Velocidades das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

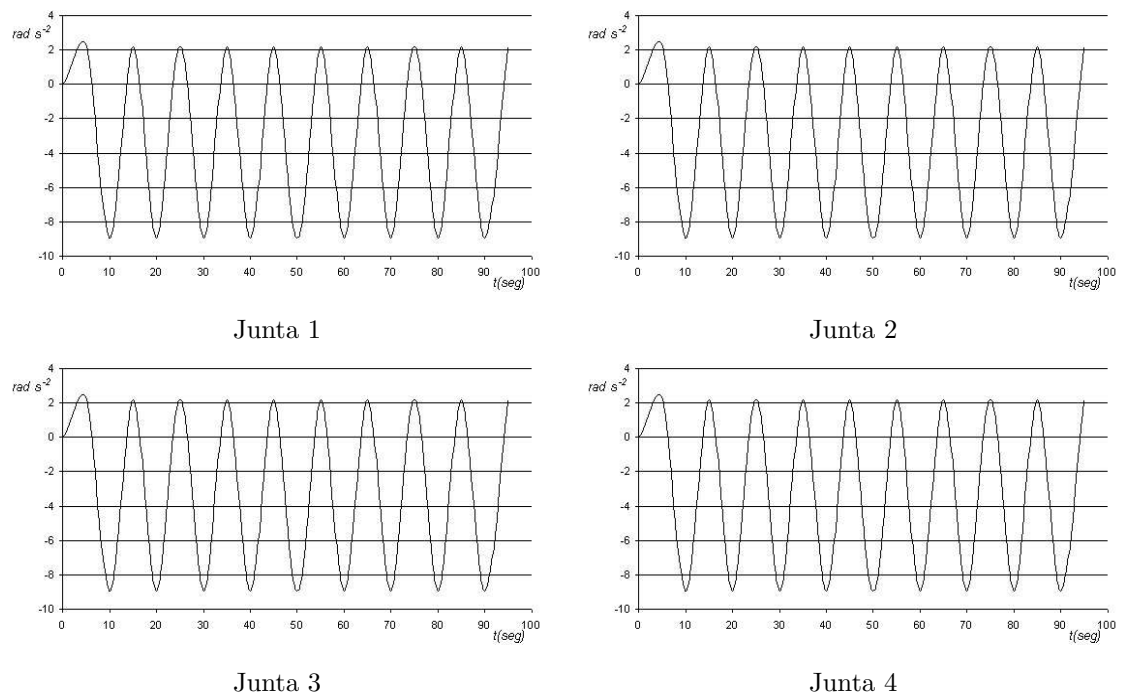


Figura 4.45: Acelerações das juntas na trajectória para o robot $4R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

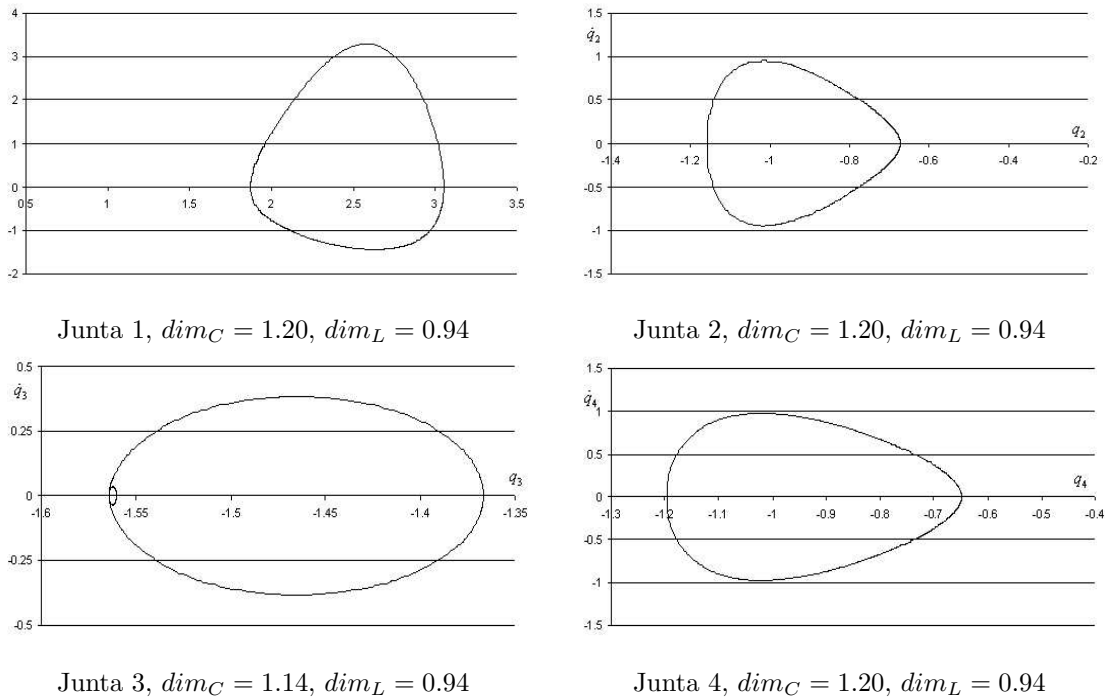


Figura 4.46: Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $4R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

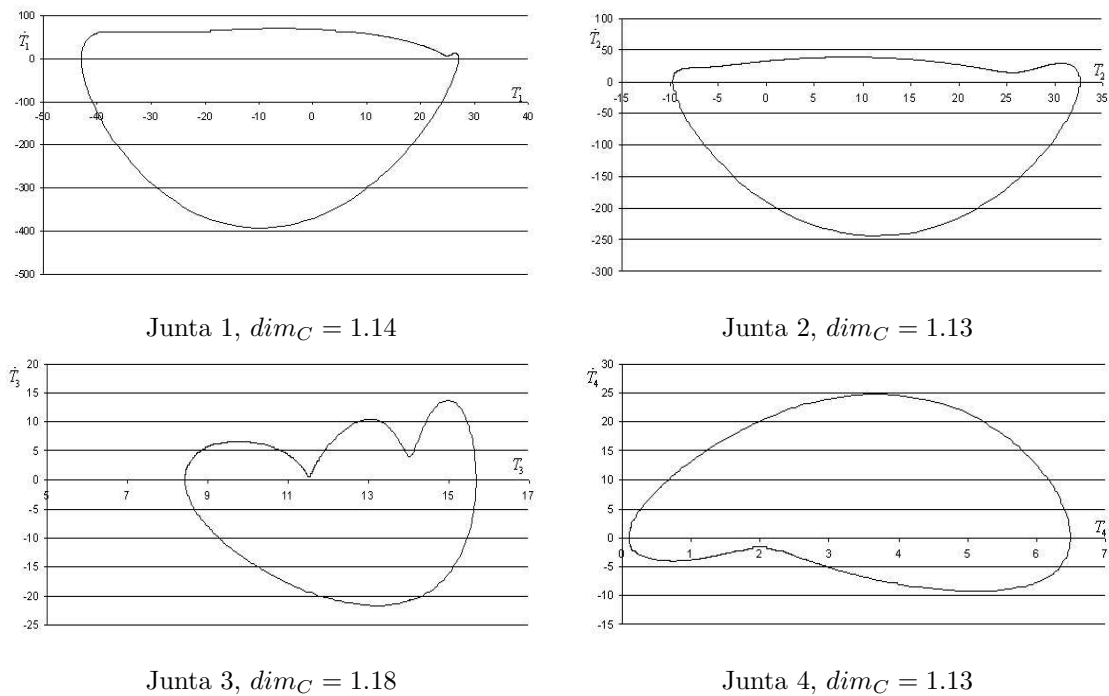


Figura 4.47: Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot $4R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

4.3.1.1.3. Respostas com o método MMA para o robot 5R

Para o robot 5R as funções \mathbf{r} -dependentes usadas foram polinómios cúbicos.

Neste caso (robot 5R) há necessidade de aproximar três das variáveis. Optou-se pela aproximação das variáveis q_5 , q_4 e q_3 :

$$\begin{aligned} q_5 &= -1.307 + 1.027 r - 1.220 r^2 + 0.259 r^3 \\ q_4 &= -1.409 - 0.037 r - 0.089 r^2 + 0.138 r^3 \\ q_3 &= -1.10 + 0.874 r - 0.644 r^2 + 0.177 r^3 \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo as restantes variáveis, q_1 , q_2 determinadas pela resolução da cinemática inversa de acordo com a equação (3.14).

Foram repetidas as experiências usando aproximações para as juntas q_5 , q_4 e q_3 com fracções racionais:

$$\begin{aligned} q_5 &= \frac{-2.03 + 0.89 r}{1 - 0.43 r + 0.07 r^2} \\ q_4 &= \frac{-1.53 + 0.58 r}{1 - 0.77 r + 0.28 r^2} \\ q_3 &= \frac{-1.74 + 0.72 r}{1 - 0.44 r - 0.07 r^2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Neste caso os resultados, em termos de precisão, foram da mesma ordem dos obtidos pela aproximação polinomial.

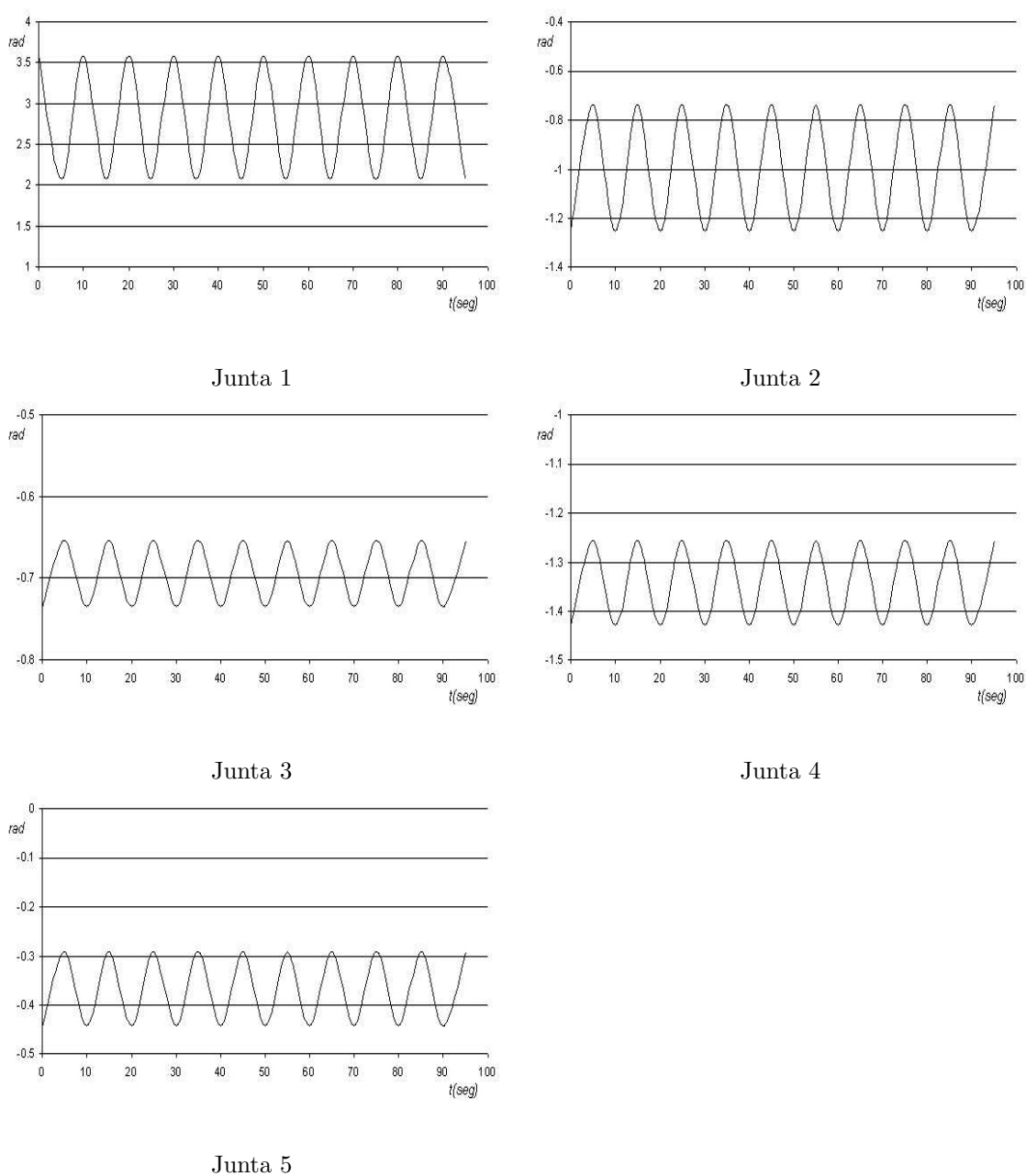
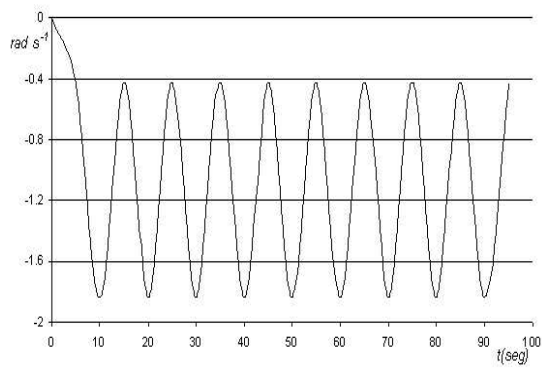
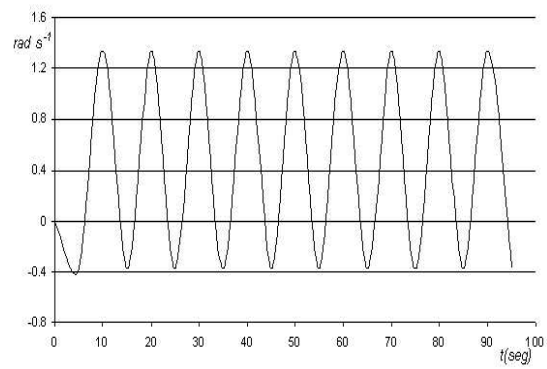


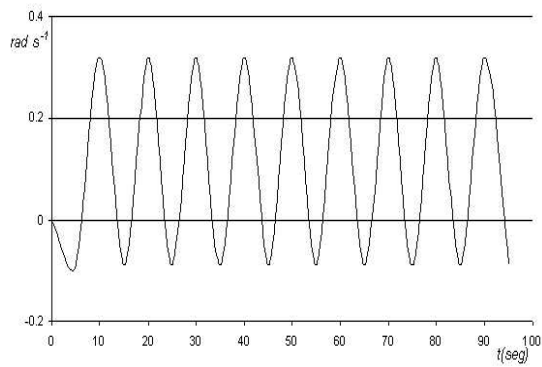
Figura 4.48: Posições das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.



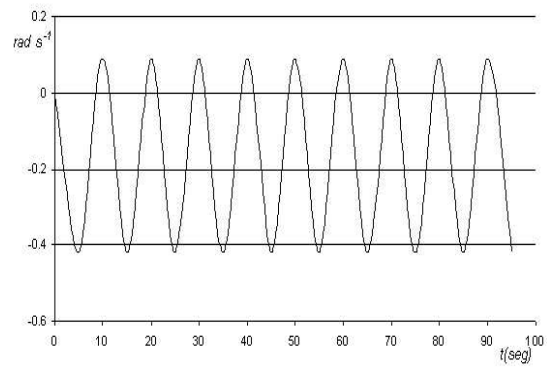
Junta 1



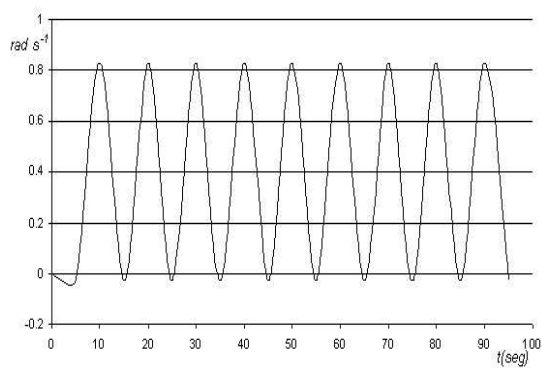
Junta 2



Junta 3



Junta 4



Junta 5

Figura 4.49: Velocidades das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1 \text{ m}$, $\rho = 0.5 \text{ m}$, $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$.

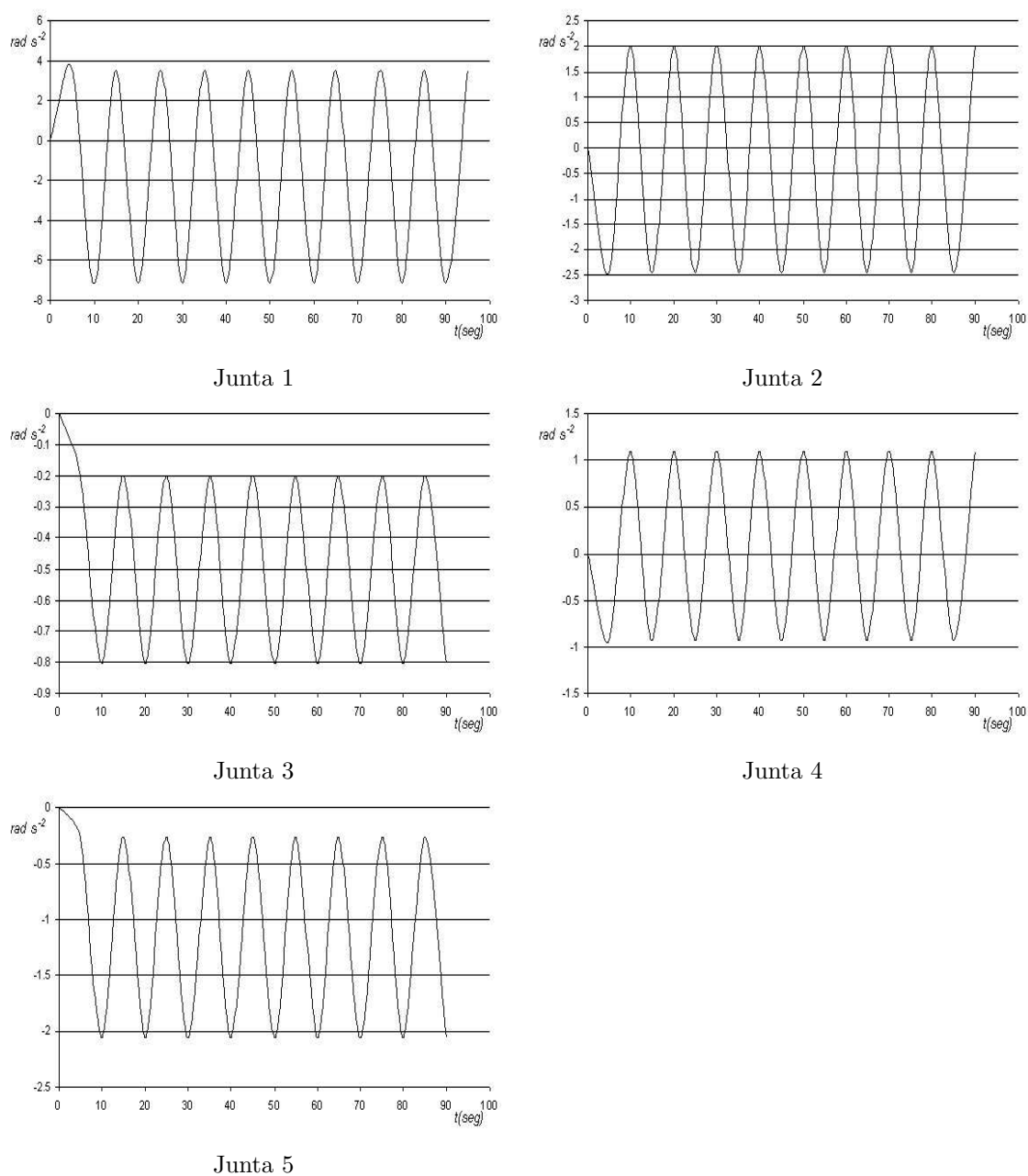


Figura 4.50: Acelerações das juntas na trajectória para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

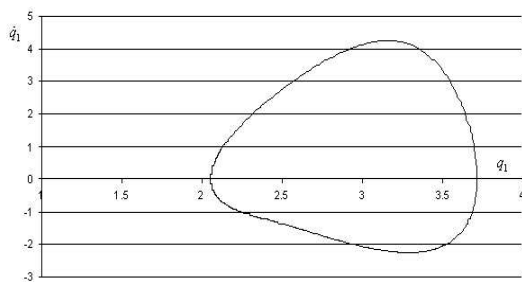
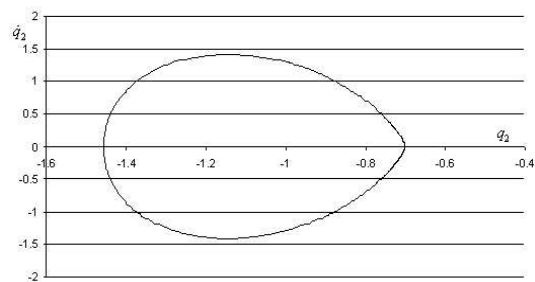
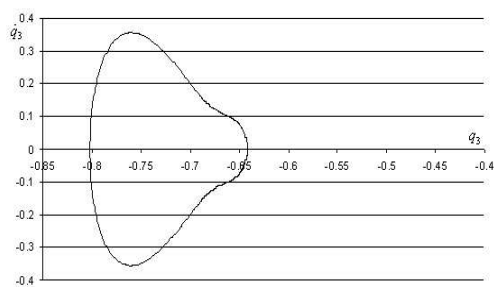
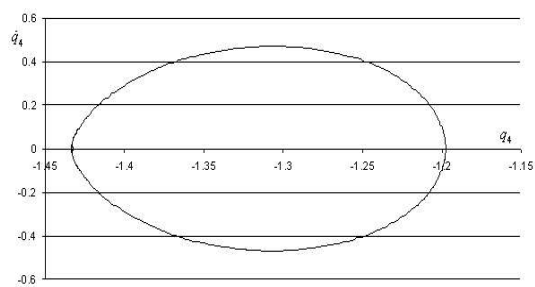
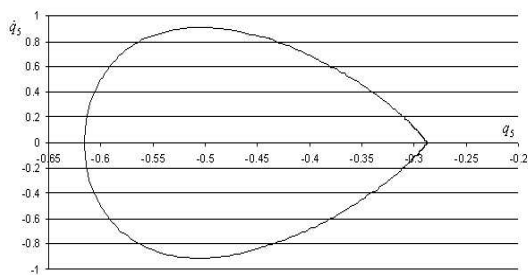
Junta 1, $dim_C = 1.17$, $dim_L = 0.87$ Junta 2, $dim_C = 1.15$, $dim_L = 0.87$ Junta 3, $dim_C = 1.18$, $dim_L = 0.87$ Junta 4, $dim_C = 1.13$, $dim_L = 0.87$ Junta 5, $dim_C = 1.14$, $dim_L = 0.87$

Figura 4.51: Plano de fase da cinemática das trajectórias das juntas para o robot $5R$, sob controlo MMA para $r = 1\text{ m}$, $\rho = 0.5\text{ m}$, $\omega_0 = 3\text{ rad s}^{-1}$.

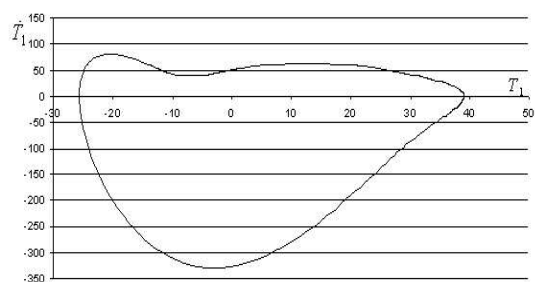
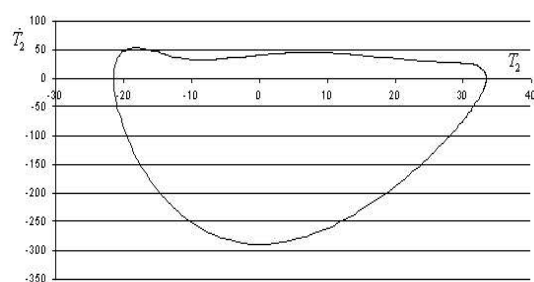
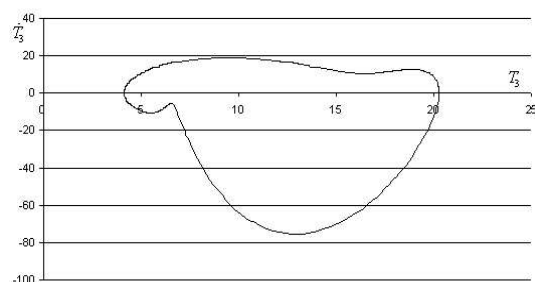
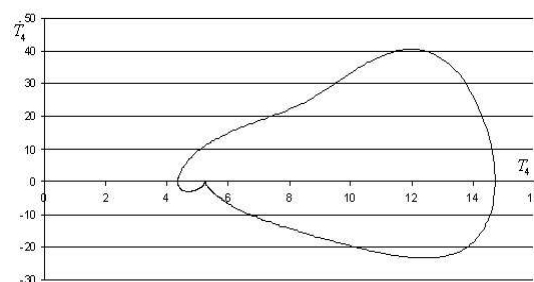
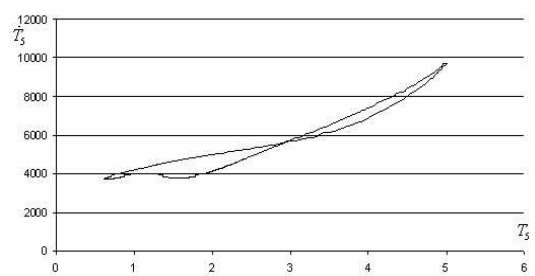
Junta 1, $dim_C = 1.14$ Junta 2, $dim_C = 1.14$ Junta 3, $dim_C = 1.15$ Junta 4, $dim_C = 1.16$ Junta 5, $dim_C = 1.12$

Figura 4.52: Plano de fase da dinâmica das trajectórias das juntas para o robot 5R, sob controlo MMA para $r = 1$ m, $\rho = 0.5$ m, $\omega_0 = 3$ rad s⁻¹.

4.3.2. Trajectória com obstáculos

Como foi referido nestas experiências pretendia-se que o órgão terminal robot $3R$ percorresse uma trajectória num espaço com obstáculos evitando os obstáculos, isto é, sem que qualquer parte do braço colida com os obstáculos, otimizando a manipulabilidade μ . A figura 4.53 mostra o espaço operacional com a localização dos obstáculos e a trajectória que o robot terá de seguir.

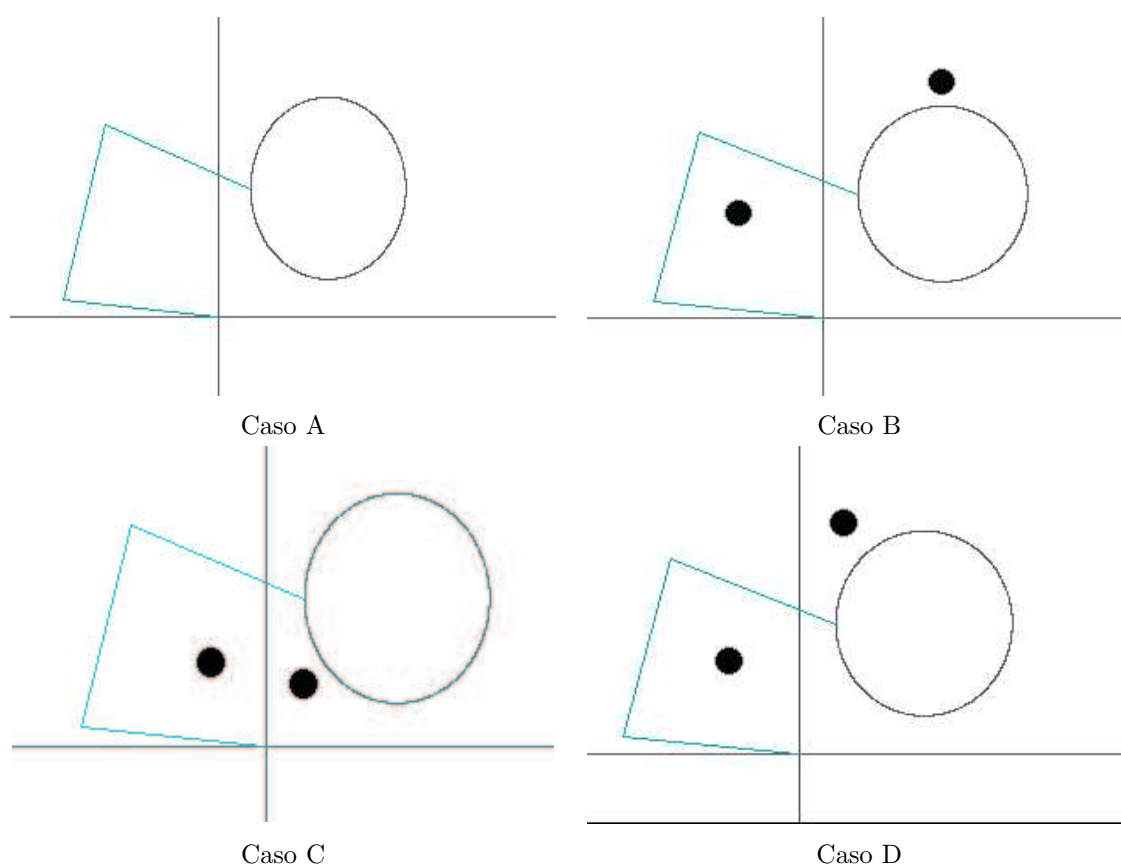


Figura 4.53: Trajectória para o robot $3R$ num espaço sem obstáculos (caso A) e com obstáculos (casos B-D).

Nesta experiência pretende-se que o robot percorra a trajectória, apresentando, para cada um dos pontos, a máxima manipulabilidade possível. Assim, o robot começa com os ângulos das juntas que maximizam μ e vai percorrendo a trajectória até encontrar um obstáculo que seja impossível de ultrapassar com a configuração de μ máximo. Nesse caso é "reconfigurada" a estrutura, diminuindo o valor de μ , no sentido do obstáculo ser ultrapassado. Com este método de optimização consegue-se um bom desempenho para

as capacidades do robot.

As figuras 4.54 e 4.55 apresentam, respectivamente, os valores da manipulabilidade e das posições das juntas quando o robot percorre a trajectória durante 3 ciclos (6 *seg*), seja no espaço livre seja na presença de obstáculos.

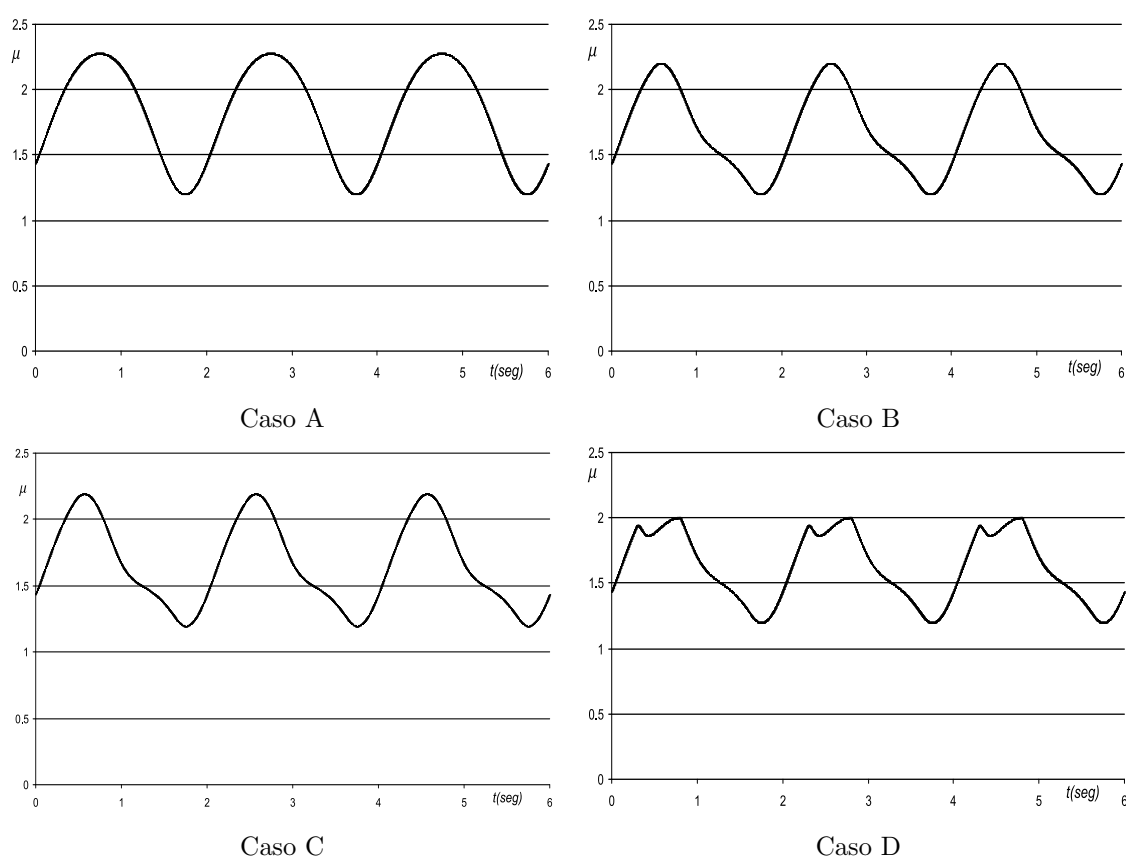


Figura 4.54: Manipulabilidade máxima para o robot $3R$ quando percorre a trajectória num espaço sem obstáculos (caso A) e com obstáculos (casos B-D).

Constata-se que, à medida que os obstáculos condicionam a escolha das configurações óptimas, o algoritmo tem que optar por valores angulares que conduzem a uma manipulabilidade inferior ao valor máximo. Em qualquer caso, o algoritmo é de fácil implementação e revela-se robusto conduzindo a trajectórias repetitivas.

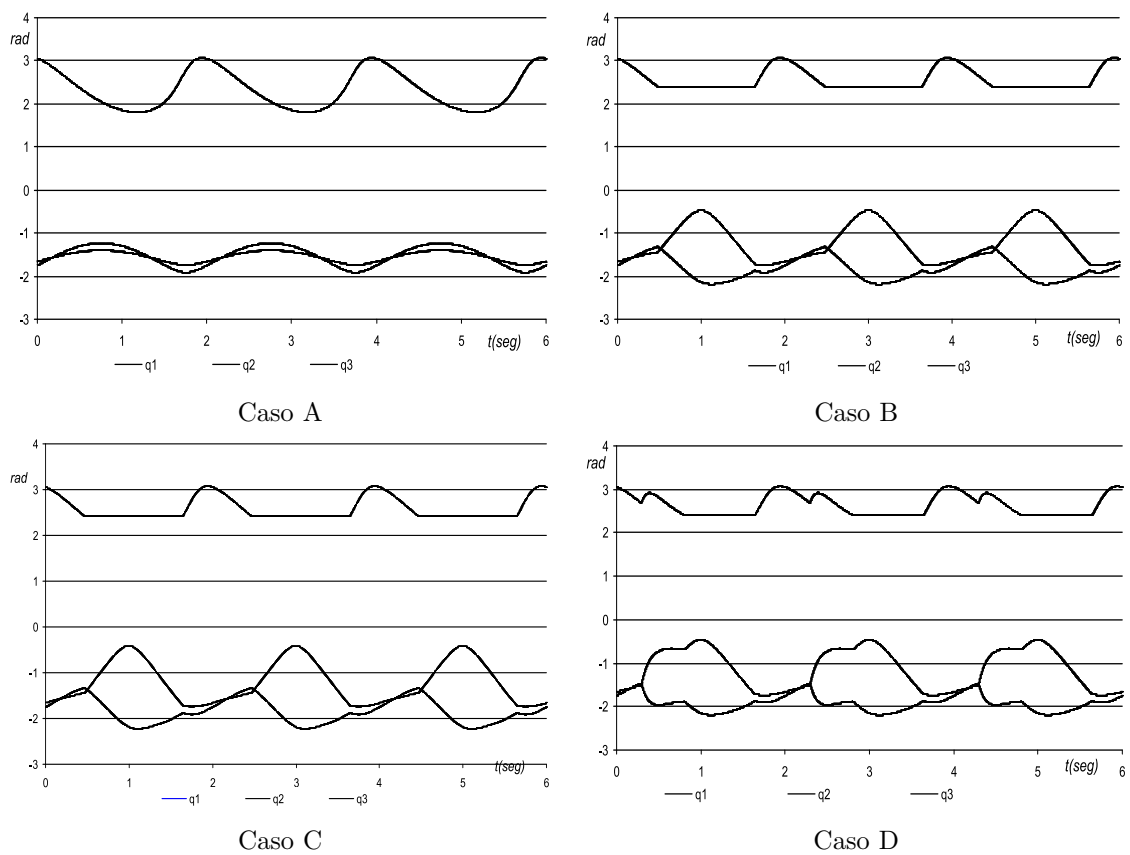


Figura 4.55: Posição das juntas para o robot $3R$ quando percorre a trajectória num espaço sem obstáculos (caso A) e com obstáculos (casos B-D).

4.4. Resumo do capítulo

Neste capítulo foi apresentado o planeamento de trajectórias de robots redundantes. Assim, foram descritos e implementados os métodos *MMA* e *PMF* e apresentados os resultados obtidos na realização de trajectórias com e sem obstáculos. Além disso, foi também estudado o comportamento caótico obtido com o método *PMF*. O estudo abordou a dimensão fractal dos traçados no plano de fase da cinemática e dinâmica, a distribuição estatística e resposta em frequência do sistema. Verificou-se que o método *PMF* revela uma dinâmica fraccionária quando excitado ao longo de um grande intervalo de tempo em contraste com os resultados obtidos com uma excitação localizada num intervalo de tempo muito limitado.

Capítulo 5

Conclusões

A modelização de um sistema reflecte as leis da física e as ferramentas matemáticas que foram adoptadas. O paradigma científico resulta desta metodologia e os seus resultados têm-se revelado correctos e significativos. Neste sentido parece não existirem razões que apontem a necessidade de se repensar todo o processo. Tomemos como exemplo os manipuladores robóticos. A sua modelização requer as conhecidas leis da física clássica e o cálculo integral e matricial pelo que se trata de um problema aparentemente bem dominado. No entanto, a análise do modelo resultante e a sua utilização revelam problemas inesperados. Estas dificuldades podem ser interpretadas como um sinal. O sinal não alerta, necessariamente, para algo de *errado*, antes pode sugerir que existe algo *desadaptado*. De facto, é comum considerar-se a evolução científica como um processo contínuo onde o paradigma em vigor se vê substituído por um novo, quando a experiência demonstra ser necessário incluir novos conhecimentos, não compatíveis com os anteriores. Consequentemente, a abordagem clássica pressupõe somente um paradigma ou está *certo* ou está *errado*. Uma perspectiva alternativa consiste em considerar que se pode evoluir, incorporando novos conceitos e ferramentas sem, assim, romper com o paradigma em uso.

Os sistemas biológicos, em geral, e o ser humano em particular, providenciam exemplos onde as questões relativas à elaboração de modelos matemáticos se levantam com muita pertinência. Tarefas simples que o ser humano realiza facilmente colocam problemas delicados quando se tenta implementá-las com os manipuladores existentes. Uma análise detalhada dos problemas envolvidos mostra quão longe está o conhecimento científico das capacidades evidenciadas pelos sistemas biológicos. O controlo do braço humano apresenta uma complexidade "insignificante" para o sistema neuromotor, contudo a cópia tecnológica confronta-se com problemas que estão ainda longe de ser totalmente desven-

dados. Os capítulos três e quatro mostram como contornar algumas dessas dificuldades. No fundo os problemas residem num nível mais abstracto, nomeadamente nos modelos que se adoptam para tratar os fenómenos em estudo. Grande parte da física contemporânea com implicações na engenharia, assenta em leis que jogam com os conceitos dos cálculos diferencial e integral, matricial e vectorial. Como a teoria dos sistemas deriva desses conceitos base, é natural o seu envolvimento prioritário com as mesmas álgebras. Curiosamente alguns ramos da física têm sido estudados a partir de diferentes modelos. Tal é o caso da termodinâmica onde existem os pontos de vista da chamada termodinâmica clássica e da termodinâmica estatística. Assim, parece razoável questionarmo-nos sobre a excessiva dependência da teoria dos sistemas dum tipo restrito de matemática.

Como é natural esta estratégia de abordagem no estudo dos manipuladores não é a única resposta. Todavia, é certamente uma perspectiva que, para além dos resultados apresentados, sugere diversas outras pistas de investigação. Por outras palavras, tendo em atenção as limitações da matemática predominante no tratamento dos fenómenos em estudo, podem-se conceber estratégias mais eficientes desde que se caminhe na direcção de uma mudança (ou, pelo menos, da coexistência) de vários paradigmas. Quais os paradigmas mais adequados às realidades a investigar é uma pergunta ambiciosa, constituindo o presente trabalho um mero degrau no caminho a percorrer. Nesta perspectiva, o trabalho desenvolvido é consequência da abertura científica a novos conceitos, os quais, tal como o que tem acontecido em muitas outras encruzilhadas da investigação, fomentaram não só algumas respostas mas também um número assinalável de novas questões.

Em conclusão, pode afirmar-se que a robótica coloca problemas científicos tanto mais complexos quanto mais próximo se está da concepção de uma cópia do ser humano. A maior dificuldade consiste em vencer as barreiras que tendem a divorciar diferentes ramos da ciência como a física, a biologia ou a matemática. À medida que se forem superando estes obstáculos será possível conceber sistemas robóticos á imagem do ser humano e, simultaneamente, descobrir fenómenos dinâmicos e conceber modelos matemáticos progressivamente mais complexos e sofisticados.

Referências

- [1] Thomas J. Anastasio, “The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons,” *Phys. stat. sol. (b)*, vol. 133, pp. 425–430, 1986.
- [2] Jorge Angeles, “Iterative kinematic inversion of general five-axis robot manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 4, no. 4, pp. 59–69, 1986.
- [3] Haruhiko Asada e Jean-Jacques Slotine, *Robot Analysis and Control*, John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [4] R. L. Bagley e R. A. Calico, “Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures,” *ASME Journal of Guidance*, vol. 14, no. 2, pp. 304–311, 1991.
- [5] Ronald L. Bagley e Peter J. Torvik, “Fractional calculus-a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures,” *AIAA Journal*, vol. 21, no. 5, pp. 741–748, 1983.
- [6] Ronald L. Bagley e Peter J. Torvik, “On the fractional calculus model of viscoelastic behaviour,” *Journal of Rheology*, vol. 30, no. 1, pp. 133–155, 1986.
- [7] J. Baillieul, “Kinematic programming alternatives for redundant manipulators,” in *1995 IEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA95*, St. Louis, USA, 1995, pp. 722–728.
- [8] L. M. B. C. Campos, *Fractional Calculus of Analytic and Branched Functions, Recent Advances in Fractional Calculus*, Global Pub. Company, 1993.
- [9] François Chaumette e Éric Marchand, “A new redundancy-based iterative scheme for avoiding joint limits application to visual servoing,” in *2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA2000*, 2000, pp. 1720–1725.

-
- [10] I-Ming Chen e Guilin Yang, “Inverse kinematics for modular reconfigurable robots,” in *1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA98*, 1998, pp. 1647–1652.
- [11] Pasquale Chiacchio e Mariano Concilio, “The dynamic manipulability ellipsoid for redundant manipulators,” in *1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA98*, 1998, pp. 95–100.
- [12] S. Chiaverini, “Singularity-robust task-priority redundancy resolution for real time kinematic control of manipulators,” *IEEE Trans. Robotics Aut.*, vol. 13, pp. 398–410, 1997.
- [13] Chi Young Chung e Beom Hee Lee, “An approach to torque optimizing control for a redundant manipulator,” in *2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA2001*, 2001, pp. 4066–4071.
- [14] M. C. Constantinou e M. D. Symans, “Experimental study of seismic response of buildings with supplemental fluid dampers,” *The Structural Design of Tall Buildings*, vol. 2, pp. 93–132, 1993.
- [15] Ramiro de Sousa Barbosa, “Algoritmos de controlo de ordem não-inteira,” Tese de mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 1999.
- [16] J. B. Diaz e Thomas J. Osler, “Differences of fractional order,” *Mathematics of Computation*, vol. 28, no. 125, pp. 185–202, 1974.
- [17] Fernando B. Duarte e J. A. Tenreiro Machado, “Kinematic optimization of redundant and hyper-redundant robot trajectories,” in *5th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, ICECS’98*, Lisboa, Portugal, 1998.
- [18] Fernando B. Duarte e J. A. Tenreiro Machado, “On the optimal configuration of redundant manipulators,” in *9th IEEE Int. Conf. on Intelligent Engineering Systems, INES’98*, Vienna, Austria, 1998.
- [19] Fernando B. Duarte e J. A. Tenreiro Machado, “Chaotic phenomena and performance optimization in the trajectory control of redundant manipulators,” in *Recent Advances in Mechatronics*, O. Kaynak et al, Ed. 1999, Springer-Verlag.

-
- [20] Fernando B. Duarte e J. A. Tenreiro Machado, “Chaos dynamics in the trajectory control of redundant manipulators,” in *2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA00*, S. Francisco, USA, 2000, pp. 500–506.
- [21] D. Dubois, J.-P. Brienne, L. Pony e H. Baussart, “Study of a system described by an implicit derivative transmittance of non integer order with or without delay time,” in *IEEE-SMC/IMACS Symposium on Control, Optimization and Supervision*, Lille, France, 1996, pp. 826–830.
- [22] Åsa Fenander, “Modal synthesis when modeling damping by use of fractional derivatives,” *AIAA Journal*, vol. 34, no. 5, pp. 1051–1058, 1996.
- [23] K. S. Fu, R. C. Gonzalez e C. S. G. Lee, *Robotics-Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [24] L. Gaul e C. M. Chen, *Modeling of Viscoelastic Elastomer Mounts in Multibody Systems, Advanced Multibody System Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [25] L. Gaul e M. Schanz, “Dynamics of viscoelastic solids treated by boundary element approaches in time domain,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 13, no. 4-suppl, pp. 43–59, 1994.
- [26] Andrew Gemant, “A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies,” *Physics*, vol. 7, pp. 311–317, 1936.
- [27] J. R. M. Hosking, “Fractional differencing,” *Biometrika*, vol. 68, no. 1, pp. 165–176, 1981.
- [28] Min-Hsiung Hung, Fan-Tie Cheng e Jen-Kuei Ting, “A novel quantitative measure of redundancy for kinematically redundant manipulators,” in *2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA2001*, 2001, pp. 4060–4065.
- [29] Theodore Kaplan, L. J. Gray e S. H. Liu, “Self-affine fractal model for a metal-electrolyte interface,” *Physical Review B*, vol. 35, no. 10, pp. 5379–5381, 1987.
- [30] M. Kircanski e M. Vukobratovic, “Contribution to control of redundant robotic manipulators in a environment with obstacles,” *Journal of Robotics Research*, vol. 5, pp. 112–119, 1986.

-
- [31] Charles A. Klein e Bruce E. Blaho, “Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 2, pp. 72–83, 1987.
- [32] Charles. A. Klein e C. C. Huang, “Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-13, no. 3, pp. 245–250, 1983.
- [33] R. C. Koeller, “Polynomial operators, stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics,” *Acta Mechanica*, vol. 58, pp. 251–264, 1986.
- [34] Chan Ghee Koh e James M. Kelly, “Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 19, pp. 229–241, 1990.
- [35] Anti J. Koivo, *Fundamental for Control of Robotic Manipulators*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [36] F. L. Lewis, C. T. Abdallah e D. M. Dawson, *Control of Robot Manipulators*, Macmillan, New York, 1993.
- [37] B. S. Liebst e P. J. Torvik, “Asymptotic approximations for systems incorporating fractional derivative damping,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 118, pp. 572–579, 1996.
- [38] Lovass-Nagy e N. Schilling, “Control of kinematically redundant robots using {1}-inverses,” *IEEE Trans. Syst. Man Cyber*, vol. 17, 1987.
- [39] Alessandro De Luca, L. Lanardi e Giuseppe Oriolo, “Control of redundant robots on cyclic trajectories,” in *1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA92*, 1992, pp. 500–506.
- [40] J. A. Tenreiro Machado, “Analysis and design of fractional-order digital control systems,” *SAMS - Journal Systems Analysis-Modelling-Simulation*, vol. 27, pp. 107–122, 1997.

-
- [41] J. A. Tenreiro Machado, “Fractional-order derivative approximations in discrete-time control systems,” *SAMS - Journal Systems Analysis-Modelling-Simulation*, vol. 00, pp. 1–16, 1998.
- [42] J. Tenreiro Machado, *Gestão dos Recursos Estruturais no Controlo de Robots Manipuladores*, Tese de doutoramento, Faculdade de Engenharia, Univ. Porto, Porto, 1988.
- [43] J.A. Tenreiro Machado, “Theory of fractional integrals and derivatives: Application to motion control,” in *1995 IEEE/IFAC/ASME/JSME International Conference on Recent Advances in Mechatronics, ICRAM95*, 1995, pp. 1086–1091.
- [44] J.A. Tenreiro Machado, “Design of fractional-order digital controllers,” in *1996 2th Portuguese Conference on Automatic Control, Controlo96*, 1996, pp. 511–516.
- [45] Francesco Mainardi, “Fractional relaxation in anelastic solids,” *Journal of Alloys and Compounds*, vol. 211/212, pp. 534–538, 1994.
- [46] Francesco Mainardi, “Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 7, no. 9, pp. 1461–1477, 1996.
- [47] Nicos Makris, M. C. Constantinou e G. F. Dargush, “Analytical model of viscoelastic fluid dampers,” *Journal of Structural Engineering*, vol. 119, no. 11, pp. 3310–3325, 1993.
- [48] Nicos Makris, G. F. Dargush e M. C. Constantinou, “Dynamic analysis of viscoelastic-fluid dampers,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, no. 10, pp. 1114–1121, 1995.
- [49] Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman and Company, 1988.
- [50] Benoit Mathieu, Ludovic Le Lay e Alain Oustaloup, “Identification of non integer order systems in the time domain,” in *IEEE-SMC/IMACS Symposium on Control, Optimization and Supervision*, Lille, France, 1996.
- [51] Denis Matignon e Brigitte A. Novel, “Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems,” in *IEEE-SMC/IMACS*

- Symposium on Control, Optimization and Supervision*, Lille, France, 1996, pp. 952–956.
- [52] A. Le Méhauté, “Transfer processes in fractal media,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 36, no. 5/6, pp. 665–676, 1984.
- [53] A. Le Méhauté, “From dissipative and to non-dissipative processes in fractal geometry: The janals,” *New Journal of Chemistry*, vol. 14, no. 3, pp. 207–215, 1990.
- [54] A. Le Méhauté, F. Héliodore, D. Cottevaille e F. Latreille, “Introduction to wave phenomena and uncertainty in a fractal space,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 3, no. 5, 1993.
- [55] Alain Le Méhauté, *Fractal Geometries: Theory and Applications*, Penton Press, 1991.
- [56] Kenneth S. Miller e Bertram Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1993.
- [57] Yoshihiko Nakamura, *Advanced Robotics- Redundancy and Optimization*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1991.
- [58] Dragomi N. Nenchev, “Redundancy resolution trough local optimization: A review,” *Journal of Robotics Resarch*, vol. 6, pp. 769–798, 1989.
- [59] R. R. Nigmatullin, “The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry,” *Biological Cybernetics*, vol. 72, pp. 69–79, 1994.
- [60] Katsuyuki Nishimoto, *Fractional Calculus (Volume IV): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order*, Descartes Press, Japan, 1991.
- [61] Keith B. Oldham e Jerome Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, 1974.
- [62] K. O’Neil e Y.-C. Chen, “Instability of pseudoinverse acceleration control of redundant mechanisms,” in *2000 IEEE International Conference on Robotiscs & Automation, ICRA2000*, 2000, pp. 2575–2582.

-
- [63] Manuel D. Ortigueira, “Fractional discrete-time linear systems,” in *2000 IEEE International Conference On Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP’97*, Munich, Germany, 1997, pp. 20–24.
- [64] Thomas J. Osler, “Leibniz rule for fractional derivatives generalized and its application to infinite series,” *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 18, no. 3, pp. 658–674, 1970.
- [65] Thomas J. Osler, “Taylor’s series generalized for fractional derivatives and applications,” *SIAM Journal of Mathematics Analysis*, vol. 2, no. 1, pp. 37–48, 1971.
- [66] A. Oustaloup, B. Mathieu e P. Lanusse, “The crone control of resonantplants: Application to a flexible transmission,” *European Journal of Control*, vol. 1, no. 22, pp. 113–121, 1995.
- [67] Alain Oustaloup, “Fractional order sinusoidal oscillators: Optimization and their use in highly linear fm modulation,” *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 10, pp. 1007–1009, 1981.
- [68] Alain Oustaloup, *La Commande CRONE: Commande Robuste d’Ordre Non Entier*, Hermes, 1991.
- [69] Alain Oustaloup, *La dérivation non entière: Théorie, synthèse et applications*, Hermes, 1995.
- [70] Haldun M. Ozaktas, Orhan Arikan, M. Alper Kutay e Gözde Bozdagi, “Digital computation of the fractional fourier transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 9, pp. 2141–2150, 1996.
- [71] J. Padovan, “Computational algorithms for formulations involving fractional operators,” *Computational Mechanics*, vol. 2, no. 4, pp. 271–287, 1987.
- [72] Jonghoon Park, Youngjin Choi e Wan Kyun Chung, “Multiple tasks kinematics using weighred pseudo-inverse for kinematically redundant manipulators,” in *2001 IEEE International Conference on Robotiscs & Automation, ICRA2001*, 2001, pp. 4041–4047.

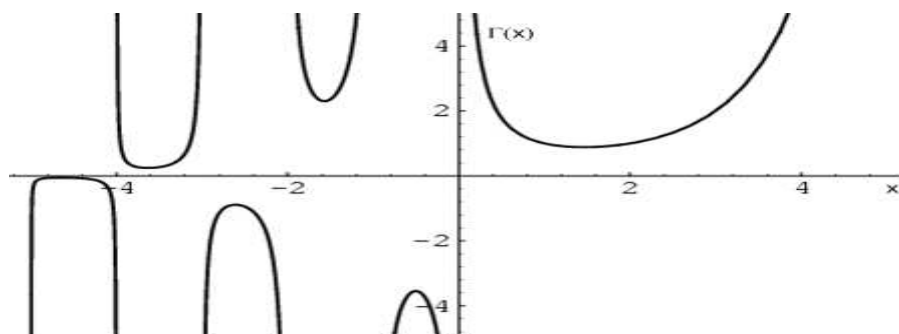
-
- [73] Jonghoon Park, Wankyun Chung e Youngil Youm, “Unified motion specification and control of kinematically redundant manipulators,” in *2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, ICRA2000*, 2000, pp. 3946–3952.
- [74] Seo W. Park e Jun H. Oh, “An inverse kinematics algorithm for robot manipulators using incremental unit computation method,” *Robotica*, vol. 10, pp. 435–446, 1991.
- [75] R. Paul, B. Shimano e G. Mayer, “Kinematic control equations for simple manipulators,” *IEEE Trans. Syst. Man Cyber*, vol. 11, 1981.
- [76] Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional derivatives, Fractional Differential equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*, Academic Press, New York, 1999.
- [77] Rodney G. Roberts e Anthony A. Maciejewski, “Singularities, stable surfaces and the repeatable behaviour of kinematically redundant manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 13, no. 1, pp. 70–81, 1994.
- [78] Lynn Rogers, “Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations,” *Journal of Rheology*, vol. 27, no. 4, pp. 351–372, 1983.
- [79] Bertrand Ross, *Fractional Calculus and Its Applications*, Lecture Notes in Mathematics 457. Springer-Verlag, 1974.
- [80] Bertrand Ross, “Fractional calculus,” *Mathematics Magazine*, vol. 50, no. 3, pp. 15–122, 1977.
- [81] Stefan G. Samko, “Fractional integration and differentiation of variable order,” *Analysis Mathematica*, vol. 21, no. 4, pp. 213–236, 1995.
- [82] Stefan G. Samko, Anatoly A. Kilbas e Oleg I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [83] Lorenzo Sciavicco e Bruno Siciliano, “On the solution of inverse kinematics of redundant manipulators,” in *NATO Advanced Research Workshop, ARW*, Italy, 1988, pp. 1–15.

-
- [84] Sanjev Seereeram e Jonh T. Wen, “A global approach to path planning for redundant manipulators,” *IEEE Tran Robotics Automat.*, vol. 11, pp. 152–159, 1995.
- [85] Bruno Siciliano, “Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 3, pp. 201–212, 1990.
- [86] Michael Stiassnie, “On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models,” *Applied Mathematics Modelling*, vol. 3, pp. 300–302, 1979.
- [87] James Theiler, “Estimating fractal dimension,” *Journal Optical Society of America*, vol. 7, no. 6, pp. 1055–1073, 1990.
- [88] Itzhak Webman, “Propagation and trapping of excitations on percolation clusters,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 6, no. 5/6, pp. 603–614, 1984.
- [89] D. Whitney, “Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses,” *IEEE Trans. Syst. Man Cyber*, vol. 10, pp. 47–53, 1969.
- [90] Tsuneo Yoshikawa, *Foundations of Robotics: Analysis and Control*, MIT Press, Massachusetts, 1988.

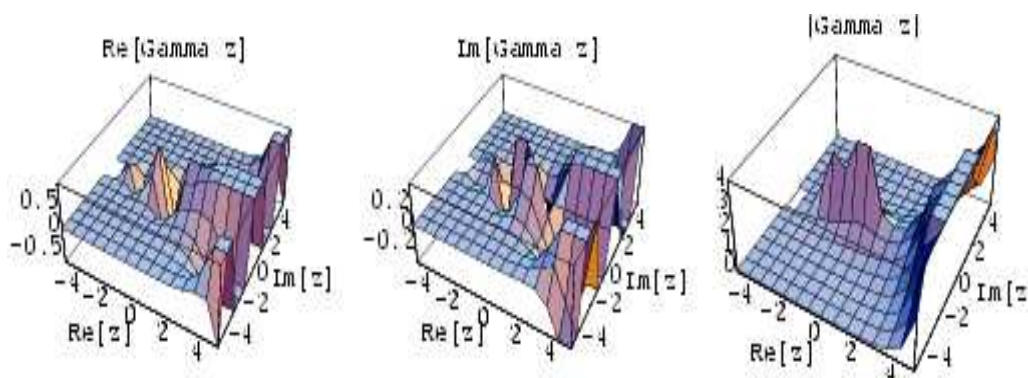
Apêndice A

Função Gamma de Euler

Uma das funções básicas do cálculo fraccionário é a função Gama de Euler, $\Gamma(z)$, que generaliza o conceito do factorial de $n!$ a valores reais e complexos de n . Trata-se de uma função analítica em todos os pontos excepto para $z = 0, -1, -2, \dots$ (Fig. A.1).



a) $\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$



b) $\text{Re}\{\Gamma(z)\}, \text{Im}\{\Gamma(z)\}, |\Gamma(z)|$, $z \in \mathbb{C}$

Figura A.1: Ilustração da função Gama.

A função Gama pode ser definida através do integral definido:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (\text{A.1})$$

Para valores reais do argumento e integrando por partes (A.1) resulta [Old74]:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= (x-1) \cdot \Gamma(x-1) \\ \Gamma(x+1) &= x \cdot \Gamma(x) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dado que $\Gamma(1) = 1$, e usando a definição (A.2) para valores inteiros de x (*i.e.* $x = 1, 2, 3, \dots$) obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

O que permite generalizar a função para:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = (n-1) \cdot (n-2)! = (n-1)! \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Em conclusão, a função Gama de um argumento inteiro positivo é, assim, reduzida ao cálculo do factorial.

A função Gama satisfaz as relações recorrentes:

$$\begin{aligned} \Gamma(1+z) &= z \cdot \Gamma(z) \\ \Gamma(1-z) &= -z \cdot \Gamma(-z) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A Tabela A.1 fornece algumas expressões da função Gama e a Tabela A.2 mostra alguns valores importantes da função Gama.

Tabela A.1: Algumas expressões envolvendo a Função Gama.

$\Gamma(x) \cdot \Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \cdot \sin(\pi x)}$
$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{x \cdot \sin(\pi x)}$
$\ln[\Gamma(x+iy+1)] = \ln(x^2+y^2) + i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln[\Gamma(x+iy)]$

Tabela A.2: Alguns dos valores particulares da função Gama.

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma(m+1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}, m = 1, 2, 3, \dots$
$\Gamma(-m+1/2) = \frac{(-1)^m \cdot 2^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \sqrt{\pi}, m = 1, 2, 3, \dots$

Apêndice B

Aproximações de primeira e segunda ordem da Cinemática

Aproximação de primeira ordem para o robot $2R$

$$\begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^2 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^2 l_i C_{1i} \\ -l_2 S_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^2 l_i S_{1i} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Aproximação de segunda ordem para o robot $2R$

$$\begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} l_2 C_{12} & -\frac{1}{2} l_2 S_{12} \\ -l_2 C_{12} & -l_2 S_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1^2 \\ dq_2^2 \\ dq_1 dq_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^2 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^2 l_i C_{1i} \\ -l_2 S_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^2 l_i S_{1i} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Aproximação de primeira ordem para o robot $3R$

$$\begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^3 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^3 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=2}^3 l_i S_{1i} & \sum_{i=2}^3 l_i C_{1i} \\ -l_3 S_{13} & l_3 C_{13} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^3 l_i S_{1i} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Aproximação de segunda ordem para o robot 3R

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} l_3 C_{13} & -\frac{1}{2} l_3 S_{13} \\ -\sum_{i=2}^3 l_i C_{1i} & -\sum_{i=2}^3 l_i S_{1i} \\ -l_3 C_{13} & -l_3 S_{13} \\ -l_3 C_{13} & -l_3 S_{13} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1^2 \\ dq_2^2 \\ dq_3^2 \\ dq_1 dq_2 \\ dq_1 dq_3 \\ dq_2 dq_3 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^3 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^3 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=2}^3 l_i S_{1i} & \sum_{i=2}^3 l_i C_{1i} \\ -l_3 S_{13} & l_3 C_{13} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^3 l_i S_{1i} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Aproximação de primeira ordem para o robot 4R

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^4 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^4 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=2}^4 l_i S_{1i} & \sum_{i=2}^4 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=3}^4 l_i S_{1i} & -\sum_{i=3}^4 l_i C_{1i} \\ -l_4 S_{14} & l_4 C_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^4 l_i S_{1i} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Aproximação de segunda ordem para o robot 4R

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^4 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^4 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=3}^4 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=3}^4 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} l_4 C_{14} & -\frac{1}{2} l_4 S_{14} \\ -\sum_{i=2}^4 l_i C_{1i} & -\sum_{i=2}^4 l_i S_{1i} \\ -\sum_{i=3}^4 l_i C_{1i} & -\sum_{i=3}^4 l_i S_{1i} \\ -l_4 C_{14} & -l_4 S_{14} \\ -\sum_{i=3}^4 l_i C_{1i} & -\sum_{i=3}^4 l_i S_{1i} \\ -l_4 C_{14} & -l_4 S_{14} \\ -l_4 C_{14} & -l_4 S_{14} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1^2 \\ dq_2^2 \\ dq_3^2 \\ dq_4^2 \\ dq_1 dq_2 \\ dq_1 dq_3 \\ dq_1 dq_4 \\ dq_2 dq_3 \\ dq_2 dq_4 \\ dq_3 dq_4 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^4 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^4 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=2}^4 l_i S_{1i} & \sum_{i=2}^4 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=3}^4 l_i S_{1i} & \sum_{i=3}^4 l_i C_{1i} \\ -l_4 S_{14} & l_4 C_{14} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^4 l_i S_{1i} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Aproximação de primeira ordem para o robot 5R

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^5 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=2}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=2}^5 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=3}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=3}^5 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=4}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=4}^5 l_i C_{1i} \\ -l_5 S_{15} & l_5 C_{15} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^5 l_i S_{1i} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Aproximação de segunda ordem para o robot 5R

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^5 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^5 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=3}^5 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=3}^5 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=4}^5 l_i C_{1i} & -\frac{1}{2} \sum_{i=4}^5 l_i S_{1i} \\ -\frac{1}{2} l_5 C_{15} & -\frac{1}{2} l_5 S_{15} \\ -\sum_{i=2}^5 l_i C_{1i} & -\sum_{i=2}^5 l_i S_{1i} \\ -\sum_{i=3}^5 l_i C_{1i} & -\sum_{i=3}^5 l_i S_{1i} \\ -\sum_{i=4}^5 l_i C_{1i} & -\sum_{i=4}^5 l_i S_{1i} \\ -l_5 C_{15} & -l_5 S_{15} \\ -\sum_{i=3}^5 l_i C_{1i} & -\sum_{i=3}^5 l_i S_{1i} \\ -\sum_{i=4}^5 l_i C_{1i} & -\sum_{i=4}^5 l_i S_{1i} \\ -l_5 C_{15} & -l_5 S_{15} \\ -\sum_{i=4}^5 l_i C_{1i} & -\sum_{i=4}^5 l_i S_{1i} \\ -l_5 C_{15} & -l_5 S_{15} \\ -l_5 C_{15} & -l_5 S_{15} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1^2 \\ dq_2^2 \\ dq_3^2 \\ dq_4^2 \\ dq_5^2 \\ dq_1 dq_2 \\ dq_1 dq_3 \\ dq_1 dq_4 \\ dq_1 dq_5 \\ dq_2 dq_3 \\ dq_2 dq_4 \\ dq_2 dq_5 \\ dq_3 dq_4 \\ dq_3 dq_5 \\ dq_4 dq_5 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=1}^5 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=2}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=2}^5 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=3}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=3}^5 l_i C_{1i} \\ -\sum_{i=4}^5 l_i S_{1i} & \sum_{i=4}^5 l_i C_{1i} \\ -l_5 S_{15} & l_5 C_{15} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 l_i C_{1i} \\ \sum_{i=1}^5 l_i S_{1i} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Apêndice C

Determinação dos acréscimos das juntas no método *MMA*

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx - J_{11}dq_1 \\ dy - J_{21}dq_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{13} \\ J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{23}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}} & \frac{-J_{13}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}} \\ \frac{-J_{22}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}} & \frac{J_{12}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx - J_{11}dq_1 \\ dy - J_{21}dq_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{bmatrix} dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{23}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}}(dx - J_{11}dq_1) - \frac{J_{13}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}}(dy - J_{21}dq_1) \\ \frac{-J_{22}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}}(dx - J_{11}dq_1) + \frac{J_{12}}{J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}}(dy - J_{21}dq_1) \end{bmatrix}$$

