

ALEXANDRA MARIA SOARES FERREIRA GALHANO

**UMA ABORDAGEM ESTATÍSTICA  
À  
MODELIZAÇÃO DE MANIPULADORES ROBÓTICOS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO**

**1992**

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

**Uma Abordagem Estatística  
à  
Modelização de Manipuladores Robóticos**

Alexandra Maria Soares Ferreira Galhano

Tese Submetida para Provas de  
Doutoramento em Engenharia  
Electrotécnica e de Computadores  
Porto, 1992

ao José António e ao José Pedro

## Agradecimentos

Ao meu orientador científico, Prof. Doutor J. L. Martins de Carvalho, desejo expressar o meu agradecimento sincero, pelo apoio e disponibilidade manifestados no desenvolvimento do trabalho aqui apresentado.

Aproveito também esta oportunidade, para manifestar o meu agradecimento ao INIC, JNICT, Fundação Calouste Gulbenkian e Fundação Gomes Teixeira, pelos apoios financeiros concedidos.

## RESUMO

A modelização de sistemas é um resultado da aplicação das leis da física e dos formalismos da matemática. Os manipuladores robóticos são sistemas mecânicos passíveis de uma descrição desse tipo; contudo, ocorrem sérias dificuldades no processo de obtenção e cálculo do respectivo modelo, devido não só à sua extensão mas também à sua complexidade. A fim de resolver estes problemas foram propostos diversos métodos. No entanto, uma análise mais profunda revela que os resultados obtidos não são mais do que *formas* diferentes de um mesmo modelo. Assim, uma modelização verdadeiramente alternativa passa pela reformulação de todo o processo.

Neste trabalho desenvolve-se um processo de modelização com base em conceitos estatísticos o que permite uma perspectiva experimentalista. De facto, o novo modelo está bem adaptado ao tratamento numérico de dados por computador e conduz a resultados claros e precisos. A aplicação do método estatístico à cinemática, à dinâmica e ao sistema cinemático-dinâmico de manipuladores robóticos revela não só as respectivas propriedades fundamentais, como ainda sugere novas orientações para o desenvolvimento de robots mais eficientes. Por outro lado, os manipuladores robóticos são estruturas mecânicas que apresentam fortes limitações face às capacidades evidenciadas pelo braço humano. O método estatístico é aplicado a um modelo do braço com actuadores biomecânicos. Os resultados mostram que fazer uma cópia das estruturas óssea e muscular é uma opção fundamental para o desenvolvimento de uma nova geração de manipuladores robóticos.

## RESUMÉ

La modélisation de systèmes est l'accomplissement de l'application des lois de la physique et des formalismes de la mathématique. Les manipulateurs robotiques, étant des systèmes mécaniques, ont une description pareille, mais le processus de son obtention et calcul est non seulement long mais aussi assez complexe. Pour résoudre ces problèmes, plusieurs méthodes ont été proposées, cependant elles ne sont que des formes différentes d'un même modèle. Ainsi, une modélisation nouvelle, reformulant tout le processus, est au jour. La modélisation présentée prend source dans les concepts de la statistique et est développée selon une perspective expérimentaliste. Elle est, ainsi, bien adaptée au traitement par ordinateur de données numériques et conduit à des résultats clairs et précis. L'application de cette méthode à la cinématique, à la dynamique et à l'ensemble cinématique-dynamique des manipulateurs robotiques s'est révélée non seulement par la démonstration des propriétés fondamentales de ces systèmes, mais aussi par la suggestion de nouvelles orientations pour le développement de robots plus efficaces.

Les manipulateurs robotiques sont fortement limités vis à vis du bras humain. Ainsi, la méthode précédente est aussi appliquée à un modèle de bras avec des actuateurs biomécaniques dans ses aspects cinématiques et dynamiques. Ce système mécanique, qui fait une mimique des structures musculaires et du squelette, s'est révélé une option fondamentale dans le sens du développement d'une nouvelle génération de manipulateurs robotiques.

## SUMMARY

The mathematical modelling of physical phenomena is an essential step towards the study of the world. Fundamental sciences like mathematics and physics provide a framework where basic concepts are formulated and general laws are derived. This blend of mathematical and physical considerations constitutes a model and, as such, it is an appropriate tool to investigate the system behaviour.

The study of robot manipulators is a typical example of the modelling process, but their kinematic and dynamic descriptions require laborious computations. Several approaches have been developed namely, recursive numerical computations, symbolic calculation and bond graphs; however, a deeper investigation of the fundamental concepts in use reveals that, in fact, we have merely different forms of the same model.

This study presents an alternative modelling method based on statistical concepts. In this line of thought, the kinematic, the dynamic and the kinematic-dynamic systems are analysed through the statistical formalism, which reveals, clearly, its fundamental properties. These conclusions suggest that superior performances require more sophisticated manipulator structures. The human arm may be considered as the ideal manipulator and, as such, constitutes a reference in order to develop new structures. The statistical analysis of the biomechanics of the arm in the sagittal plane conduces to important conclusions leading to the conception of a new generation of robotic manipulators.

## Índice

### 1. Introdução

1.1. Física: Uma Perspectiva do Universo	1.2
1.2. Modelização e Imaginação Matemática	1.2
1.3. Manipuladores Robóticos	1.4
1.4. Modelização Estatística <i>Versus</i> Modelização Determinística	1.5
1.4.1. Lançamento de uma Moeda	1.6
1.4.2. Tiro ao Alvo	1.7
1.5. Abordagem Estatística à Modelização de Manipuladores Robóticos	1.9
1.6. Referências	1.10

### 2. Modelização de Manipuladores Robóticos

2.1. Introdução	2.2
2.2. Sobre a Modelização de Sistemas Físicos	2.4
2.3. Modelização de Manipuladores Robóticos	2.5
2.4. Modelização Estatística de Manipuladores Robóticos	2.13
2.4.1. Sobre a Modelização Estatística de Sistemas	2.16
2.4.2. Modelização Estatística da Cinemática de Manipuladores	2.17
2.4.2.1. Desenvolvimento Numérico de um Modelo Estatístico para o Robot 2R	2.18
2.4.2.2. Desenvolvimento Analítico de um Modelo Estatístico para o Robot 2R	2.24
2.4.2.3. Optimização da Cinemática	2.26
2.5. Conclusões	2.29
2.6. Referências	2.30
Apêndice 1. Cinemática do Robot Puma	2.33
Apêndice 2. Modelo Dinâmico Completo do Robot PUMA	2.35



### **3. Modelização Estatística da Dinâmica de Manipuladores Robóticos**

3.1. Introdução	3.2
3.2. Sobre a Modelização Estatística da Dinâmica de Manipuladores	3.3
3.2.1. Estudo Preliminar dos Fenómenos Gravitacionais, Coriolis/centrípetos e Inerciais	3.4
3.2.2. Comparação dos Fenómenos Gravitacionais, Coriolis/centrípetos e Inerciais	3.8
3.3. A Dinâmica de Manipuladores	3.14
3.4. O Sistema Cinemático-Dinâmico de Manipuladores	3.17
3.5. Conclusões	3.27
3.6. Referências	3.28

### **4. Novas Estruturas para Manipuladores Robóticos**

4.1. Introdução	4.2
4.2. Algumas Considerações Sobre a Estrutura dos Manipuladores Robóticos	4.2
4.2.1. Caracterização Geométrica dos Manipuladores Robóticos	4.3
4.2.2. Cinemática e Dinâmica dos Manipuladores Robóticos com Estrutura RR	4.7
4.2.2.1. Manipulador RR com Accionamento Directo nas Articulações	4.8
4.2.2.2. Manipulador RR com Accionamento Centralizado na Base	4.12
4.2.2.3. Manipulador RR com Estrutura em Paralelogramo	4.13
4.2.3. Limitações dos Manipuladores Robóticos com Estrutura RR	4.14
4.3. Estrutura Biomecânica do Braço Humano e sua Influência na Formulação de Manipuladores Mecânicos	4.16
4.3.1. Estrutura Biomecânica do Braço Humano	4.16
4.3.2. Modelo Geométrico	4.20
4.3.2.1. O Ombro	4.21
4.3.2.2. O Cotovelo	4.24
4.4. Análise Estatística de Manipuladores com Actuadores Musculares	4.25
4.5. Conclusões	4.32
4.6. Referências	4.33

## 5. Conclusão

5.1. Modelos Matemáticos e Manipuladores Robóticos	5.2
5.2. Perspectivas de Desenvolvimento	5.3
5.2.1. Descrição Estatística de Algoritmos de Planeamento de Trajectórias	5.3
5.2.2. Estrutura Óssea do Cotovelo	5.3
5.2.3. Controlo Neuromotor do Braço	5.5
5.3. Comentário final	5.5
5.4. Referências	5.8

## 1. Introdução

*"A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro."*  
(Albert Einstein)

# 1. Introdução

## 1.1. Física: Uma Perspectiva do Universo

O Homem apercebe-se do mundo material pela acção que este exerce sobre os seus sentidos. A ciência, em geral, estuda e procura explicar os fenómenos assim observados. A física, em particular, é o ramo da ciência que investiga os fenómenos de natureza inanimada. No sentido de interligar as diferentes grandezas que intervêm nos fenómenos físicos, formulam-se *leis* que enunciam as relações de causa e efeito entre os fenómenos estudados e os factores que nele influem. Quando quantificadas, as grandezas mostram relações numéricas e as leis tornam-se quantitativas e passíveis de uma formulação matemática.

Ao longo das gerações a humanidade estudou a natureza e acumulou um conhecimento que se traduziu na formulação de um conjunto de "Leis fundamentais da física" (Tabela 1.1) [1.1]. Assim, qualquer fenómeno físico *obedece* às leis referidas e o seu comportamento pode ser previsto com rigor e precisão. As ciências da engenharia seguem esta filosofia e as suas realizações parecem comprovar a validade do paradigma. Na realidade, a visão do universo por Isaac Newton (1642-1727) ou por Pierre Simon de Laplace (1749-1827), qual máquina gigantesca de precisão funcionando segundo *leis* bem determinadas é, ainda hoje, um pressuposto frequente nas aplicações de engenharia. E, no entanto, no dealbar do século XX, a física quântica e a relatividade mostraram até que ponto eram frágeis certos conceitos fundamentais da física clássica. De facto, ao determinismo de Pierre Simon de Laplace contrapôs-se um ponto de vista probabilístico como, por exemplo, é patente no célebre "Princípio da incerteza de Heisenberg". No fundo, seja quando da formulação de descrições gerais (as leis físicas) seja durante a sua aplicação (a modelização) a questão que se põe é saber até que ponto os sentidos e a mente do Homem condicionam as suas descrições (científicas) do universo.

## 1.2. Modelização e Imaginação Matemática

Uma observação atenta das leis da física revela que os conceitos matemáticos envolvidos incidem nos cálculos vectorial, diferencial e integral.

**Tabela 1.1. Leis Fundamentais da Física Clássica**

*Equações de Maxwell*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

*Princípio da Conservação da Carga*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

*Lei da Força de Lorentz*

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

*Lei do Movimento de Newton com a correcção de Einstein*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \text{ onde } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

*Lei da Gravitação*

$$\mathbf{F} = - \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Legenda

$c$	Velocidade da luz	$\nabla$	Operador nãbla
$t$	Tempo	$\mathbf{E}$	Campo eléctrico
$q$	Carga do electrão	$\mathbf{B}$	Indução magnética
$\rho$	Densidade volumétrica de carga	$\mathbf{p}$	Momento
$\epsilon_0$	Permitividade eléctrica no vácuo	$\mathbf{F}$	Força
$\gamma$	Constante gravitacional	$\mathbf{v}$	Velocidade
$m$	Massa	$\mathbf{j}$	Densidade de corrente de condução

Assim, a aplicação destas equações a casos concretos, isto é a *modelização* requer, naturalmente, métodos usuais nestas áreas da matemática. No entanto, se, numa primeira fase, a condição humana condiciona a visão do universo, não será de questionar, numa segunda fase, até que ponto a dependência destas ferramentas matemáticas restringe, ainda mais, essa perspectiva?

Sabendo-se da abstracção e rigor da linguagem matemática é, então, lógico procurar uma resposta segundo essa perspectiva. Como refere Michael Guillen [1.2]: *'Ao contrário dos demais cientistas, que observam a natureza por intermédio de todos os cinco sentidos, os matemáticos usam quase exclusivamente o sentido da imaginação'*. Deste modo, abrir uma janela nova para a realidade, isto é, criar modelos físicos alternativos, requer o exercício da imaginação matemática. Os novos modelos a desenvolver não excluem, necessariamente, as descrições já conhecidas. A realidade tem matizes inesgotáveis, pelo que imaginar modelos alternativos ao invés de criar descrições mutuamente exclusivas corresponde a elaborar processos de raciocínio complementares.

### 1.3. Manipuladores Robóticos

A definição de robot tem originado controvérsia nos meios académicos. Se atentarmos [1.3] no Concise Oxford Dictionary encontramos *'Autómato aparentemente humano, obediente e inteligente mas máquina impessoal'*. Por outro lado, a Robot Institute of America propõe *'Manipulador reprogramável e multifuncional, projectado para o transporte de materiais, peças, ferramentas ou sistemas especializados, com vários movimentos programáveis, com o objectivo de desenvolver tarefas variadas'*. Diversas organizações ligadas à robótica têm sugerido outras definições, todavia, não se atingiu ainda uma plataforma de consenso. Sob um ponto de vista lato, um robot é uma máquina que copia o homem. É irrelevante quais os materiais constitutivos da máquina, qual o número de braços ou pernas ou quaisquer outros pormenores semelhantes. A cópia refere-se às capacidades de raciocínio e aprendizagem, de locomoção, de manipulação e assim por diante. Hoje em dia a ciência e a tecnologia restringem fortemente a "qualidade da cópia" e, a nível industrial, os sistemas mais frequentes consistem em manipuladores mecânicos. Poderá supor-se que copiar, somente, o braço humano, arredou questões metafísicas insondáveis conduzindo a temas restritos e bem dominados. Na realidade, uma avaliação desapaixonada dos feitos conseguidos

mostra quão pálida é a cópia e como problemas aparentemente simples se revelam complexos.

Um manipulador robótico é composto por diversos elos mecânicos interligados por eixos (rotacionais ou lineares) que são accionados por motores apropriados. À primeira vista, um sistema deste tipo é perfeitamente descrito pela geometria Euclidiana e pela mecânica clássica. Assim, a partir de *leis* bem conhecidas é possível encontrar um modelo e, a partir dele, estudar as propriedades e as características do sistema físico. Contudo, a prática demonstrou que ocorrem dificuldades *a priori* inesperadas. De facto, os modelos (simbólicos) de manipuladores robóticos são de obtenção difícil ou até impossível por via manual. Recentemente, obtiveram-se as expressões para esses modelos através de meios automáticos, recorrendo a programas de manipulação simbólica implementados em Lisp correndo em sistemas informáticos sofisticados [1.4-1.6]. No entanto, as expressões resultantes são de tal modo complexas que qualquer análise das suas propriedades é manifestamente inviável. Aliás, o simples cálculo em tempo real das equações correspondentes ao modelo revela-se uma tarefa de peso considerável mesmo para computadores poderosos [1.7].

Em boa verdade, somos obrigados a admitir que estes problemas podem significar estratégias de ataque desadaptadas ao fenómeno em estudo. Nesta ordem de ideias, a imaginação matemática poderá dar resposta a estas questões. Assim, a estatística poderá ser *uma* abordagem que conduza à resolução de alguns dos problemas encontrados. A estatística é uma ferramenta matemática bem conhecida em áreas da física tais como a teoria cinética dos gases, a termodinâmica estatística ou a mecânica quântica. A sua utilização no estudo de manipuladores robóticos poderá dar respostas a alguns problemas e, porventura, abrir novas questões. Deste modo, a abordagem estatística constitui uma perspectiva de estudo que complementa a modelização clássica não excluindo a possibilidade de, mesmo assim, se conceberem modelos baseados noutras ferramentas matemáticas.

#### **1.4. Modelização Estatística Versus Modelização Determinística**

Nos capítulos introdutórios de muitos livros que versam estatística e teoria das probabilidades lê-se que os modelos são determinísticos ou probabilísticos. Esta afirmação considera, implicitamente, que só são possíveis estes dois tipos de modelização e que eles são mutuamente exclusivos. Todavia, numa perspectiva

global, não existe qualquer prova em abono de uma posição tão peremptória. O trabalho exposto nesta tese aborda esta problemática, isto é, investiga a possibilidade de se conceberem modelos estatísticos numa área tradicionalmente tida como determinística. A fim de se estimular a discussão que se pretende introduzem-se nesta secção dois sistemas simples cuja modelização apresenta alguns aspectos notáveis. Como é boa norma em questões desta natureza, entendeu-se por bem recorrer a sistemas muito simples de modo a que os resultados sejam claros e inequívocos.

#### 1.4.1. Lançamento de uma Moeda

A teoria das probabilidades nasceu com os estudos de Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) relativos a jogos [1.8-1.10]. A ligação entre estes dois campos persiste ainda hoje e muitos aspectos elementares das probabilidades são bem ilustrados através de jogos de sorte e azar. Assim, conforme sugere Ian Stewart [1.11] tomaremos como primeiro exemplo o lançamento de uma moeda ao ar.

Suponha-se uma moeda equilibrada, confinada a um plano vertical e sujeita à acção da gravidade. Considere-se que a moeda é lançada a partir do solo com velocidade inicial  $v$  e rotacional  $w$  (voltas/seg.). Quando regressa ao solo supõe-se que ocorre um choque inelástico, isto é, não se verificam ressalto. O resultado do experimento é considerado "cara" ou "coroa" consoante a face da moeda que fica para cima. Sendo  $g$  a aceleração da gravidade obtêm-se as expressões ( $k \in \mathbf{Z}$ ):

$$\text{Resultado} = \begin{cases} \text{cara} & \text{se} & k < \frac{2vw}{g} < \frac{2k+1}{2} \\ \text{coroa} & \text{se} & \frac{2k+1}{2} < \frac{2vw}{g} < k+1 \end{cases} \quad (1.1)$$

A Figura 1.1 mostra um gráfico correspondente ao jogo. Se se conhecer, exactamente, os valores de  $v$  e  $w$  então somos capazes de prever o resultado final com todo o rigor. Se os valores de  $v$  e  $w$  não forem conhecidos com exactidão então temos que admitir uma incerteza quanto ao resultado. Constata-se que, neste caso, o carácter determinístico ou aleatório do resultado não é devido ao sistema em si mesmo mas sim ao grau de exactidão com que são conhecidas as variáveis  $v$  e  $w$ .



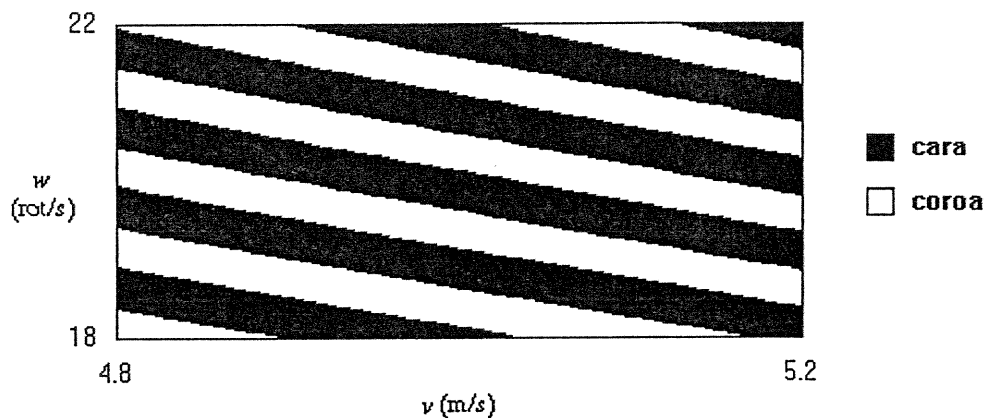


Fig. 1.1 Distribuição do resultado (cara ou coroa) do lançamento de uma moeda ao ar em função das velocidades inicial  $v$  e rotacional  $w$ .

Na realidade, verifica-se facilmente pela Figura 1.1 que a determinação do resultado final depende não só do conhecimento de  $v$  e  $w$ , mas também do domínio de variação e respectiva distribuição dessas variáveis.

Em conclusão, o experimento tem carácter determinístico ou aleatório consoante capitaliza o conhecimento exacto ou a incerteza das variáveis em jogo.

#### 1.4.2. Tiro ao Alvo

Na teoria dos sistemas é comum estudar-se as propriedades de um fenómeno a partir das equações diferenciais que o caracterizam. Em particular, os sistemas lineares são caracterizados pelas respostas transitória (ou livre) e forçada. Identicamente, no caso de um sistema ser descrito por um modelo probabilístico coloca-se também a questão de se encontrarem processos de caracterização do fenómeno correspondente. Vamos recorrer a um experimento aleatório simples a fim de ilustrar este tema.

Suponha-se que se pretenda dar um tiro num alvo circular de raio  $R$  centrado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Admita-se que as coordenadas  $(x,y)$  do ponto de impacto estejam uniformemente distribuídas sobre o círculo, isto é:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{se } (x,y) \text{ estiver sobre o círculo} \\ 0 & \text{nos restantes casos} \end{cases} \quad (1.2)$$

Devido à simetria do problema interessa exprimir o fenómeno num sistema de coordenadas polares  $(\theta,r)$ . Cálculos elementares mostram que:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Como é sabido, a função densidade de probabilidade (f.d.p.)  $f(x,y)$  do ponto de impacto no referencial cartesiano está relacionada com  $g(\theta,r)$ , a f.d.p. correspondente no sistema de coordenadas polares, através das equações:

$$g(\theta,r) = |J| f[x(\theta,r), y(\theta,r)] \quad (1.4a)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (1.4b)$$

onde  $J$  representa o jacobiano da transformação  $(x,y) \rightarrow (\theta,r)$ . Então, para o caso em estudo obtem-se:

$$g(\theta,r) = r \frac{1}{\pi R^2} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (1.5a)$$

$$J = r \quad (1.5b)$$

À primeira vista este exemplo trivial parece não revelar nenhuma propriedade particularmente notável. No entanto, se estudarmos as expressões (1.4a) e (1.5a) verificamos existirem dois factores com significados distintos. O factor  $f[x(\theta,r),y(\theta,r)]$  corresponde à caracterização estatística da pontaria do atirador, logo podendo variar consoante a experiência da pessoa que empunha a arma. Deste modo, a expressão (1.2) caracteriza uma classe de atiradores, e outras classes serão descritas (estatisticamente) por f.d.p.'s distintas. O segundo factor

corresponde ao jacobiano  $|J|$ , que só depende das propriedades intrínsecas do sistema, e que, neste caso, corresponde à estrutura geométrica do alvo. Assim, a expressão (1.5b) do jacobiano da transformação  $(x,y) \rightarrow (\theta,r)$  para um alvo circular, mostra que o sistema "privilegia" pontos de impacto afastados do centro (isto é, valores elevados de  $r$ ) e "evita" pontos de impacto perto do centro (isto é, valores baixos de  $r$ ).

Esta conclusão coincide com a nossa experiência e pode ser comprovada através de considerações geométricas elementares. Na realidade, a questão fundamental não se prende com este exemplo particular, mas com o papel desempenhado pelos dois factores que constituem a expressão (1.4a):

- A expressão  $f[x(\theta,r),y(\theta,r)]$  caracteriza a "excitação" do sistema.
- A expressão  $|J|$  caracteriza as propriedades intrínsecas do sistema.

## 1.5. Abordagem Estatística à Modelização de Manipuladores Robóticos

As secções precedentes debateram vários aspectos sobre a modelização, os sistemas robóticos e a estatística. Nesta ordem de ideias, tomou corpo um trabalho que explora vários meandros da abordagem estatística à modelização de manipuladores robóticos. A presente secção delinea a organização do trabalho e introduz as principais questões analisadas.

O capítulo 2 retoma e aprofunda a discussão relativa à modelização de manipuladores robóticos. Nesta perspectiva faz-se um levantamento dos problemas encontrados com a modelização clássica, introduz-se a abordagem estatística e faz-se a sua aplicação no estudo da cinemática de um manipulador com dois graus de liberdade.

A partir do conhecimento adquirido no estudo da cinemática avança-se, no capítulo 3, para o estudo da dinâmica de manipuladores robóticos. Os fenómenos dinâmicos são consideravelmente mais complexos que os cinemáticos, o que se traduz por uma maior dificuldade no respectivo estudo. No entanto, a modelização estatística permite não só uma via de estudo analítica, mas também uma via numérica e experimental. Tirando partido desta possibilidade, o estudo da dinâmica segue um trajecto "híbrido" no qual a componente analítica confere um rigor matemático enquanto a componente numérica permite adquirir uma intuição e, assim, testar várias ideias.

O capítulo 4 estuda novas estruturas para manipuladores robóticos. Para tal socorre-se da estrutura biomecânica do braço humano tomando-a como referência fundamental para a análise subsequente. Muitos aspectos biológicos, quer a nível muscular quer a nível nervoso, estão ainda inexplorados. Deste modo, é necessário formular diversas hipóteses simplificadas a fim de realçar os mecanismos básicos em jogo. Com base nos aspectos biomecânicos desenvolve-se um modelo geométrico para braços manipuladores que apresenta propriedades importantes. O estudo estatístico das características cinemáticas e dinâmicas revela o peso relativo destes fenómenos e clarifica os factores a ter em conta seja no planeamento de trajectórias seja na estrutura do manipulador e respectivos actuadores.

Um estudo deste teor faz luz sobre certas áreas mas, por outro lado, suscita novas perguntas. Este trabalho não é excepção e, de facto, algumas das respostas encontradas dão lugar a outras questões. Assim, o capítulo 5 traça as principais conclusões que decorrem do estudo efectuado e analisa as perspectivas de desenvolvimento futuro.

## 1.6. Referências

- [1.1] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton e Matthew Sands, "The Feynman Lectures on Physics", Addison-Wesley Publishing Company, 1964.
- [1.2] Michael Guillen, "Pontes para o Infinito: O Lado Humano das Matemáticas", Gradiva, 1967.
- [1.3] Phillippe Coiffet e Michel Chirouze, "An Introduction to Robot Technology", McGraw-Hill Book Company, 1983.
- [1.4] M. C. Leu e N. Hemati, "Automated Symbolic Derivation of Dynamic Equations of Motion for Robotic Manipulators", ASME J. Dynamic Syst. Meas. Contr., vol. 108, pp. 172-179, Sept., 1986.
- [1.5] J. Koplic e M. C. Leu, "Computer Generation of Robot Dynamic Equations and the Related Issues", J. of Robotic Systems, vol. 3, n. 3, pp. 301-319, Fall, 1986.
- [1.6] Charles P. Neuman e John J. Murray, "Customized Computational Robot Dynamics", J. of Robotic Systems, vol. 4, n. 4, pp. 503-526, Aug., 1987.
- [1.7] J.A. Tenreiro Machado, J.L. Martins de Carvalho e Alexandra M.S.F. Galhano, "Microcomputer Evaluation in Robot Control," 33rd Midwest

Symposium on Circuits and Systems, 12-15/Agosto/1990, Calgary, Alberta, Canadá.

- [1.8] "Men of Modern Mathematics: A History Chart of Mathematicians From 1000 to 1900", Produced for IBM by the office of Charles Eames. Biographies and mathematical notes by Ray Redheffer, International Business Machines Corporation, 1966.
- [1.9] "The World of Mathematics: A Small Library of the Literature of Mathematics from A'h-mosé the Scribe to Albert Einstein", (Presented with Commentaries and Notes by James R. Newman), Tempus Books of Microsoft Press, 1988.
- [1.10] Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach, "A History of Mathematics", John Wiley & Sons, 1989.
- [1.11] Ian Stewart, "Deus Joga aos Dados?", Gradiva, 1991.

## 2. Modelização de Manipuladores Robóticos

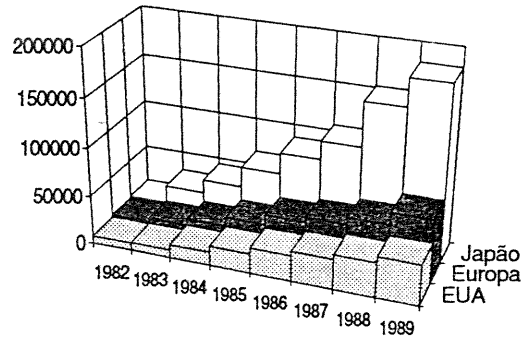
*"As ciências não tentam explicar; dificilmente tentam interpretar, apenas constroem modelos. Por um modelo entende-se uma construção matemática que, juntamente com certas interpretações verbais, descreve os fenómenos observados. A justificação de uma tal construção matemática é, única e exclusivamente, a de que se espera que funcione."*  
(John Von Neumann)

## 2. MODELIZAÇÃO DE MANIPULADORES ROBÓTICOS

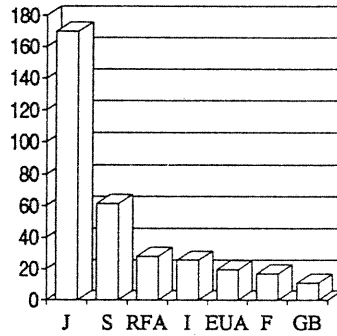
### 2.1. Introdução

Um manipulador robótico é um dispositivo mecânico constituído por diversos elos interligados por articulações lineares ou rotacionais accionadas por motores eléctricos, hidráulicos ou pneumáticos. Este sistema copia o braço humano nas suas capacidades de transporte e manipulação de peças ou ferramentas, pelo que se torna particularmente aliciante a sua utilização em tarefas que, dada a sua complexidade, são, muitas vezes, difíceis de realizar com as máquinas e automatismos convencionais. Assim, quando, em 1921, George C. Devol, com base na experiência adquirida nas máquinas-ferramenta de controlo numérico e nos telemanipuladores, concebeu e aplicou um robot Unimate numa máquina de fundição em molde, deu-se início a uma nova fase da automação industrial. De facto, a utilização crescente dos robots nos processos produtivos (Fig. 2.1) tem uma forte correlação com o desenvolvimento industrial e tecnológico [2.1-2.3]. Todavia, uma análise pormenorizada dos sistemas em uso mostra que a maioria das aplicações envolve uma interacção reduzida entre o manipulador e a peça. Deste modo, aplicações exigentes, que envolvem informação sensorial múltipla bem como a sua integração em controladores adequados, colocam problemas que ainda não estão completamente dominados o que, em certa medida, tem limitado as áreas de utilização dos manipuladores robóticos. Também, a comparação das capacidades dos manipuladores mecânicos, por um lado, e do braço humano, por outro lado, revela quão longe está a robótica das potencialidades evidenciadas pelos sistemas biológicos.

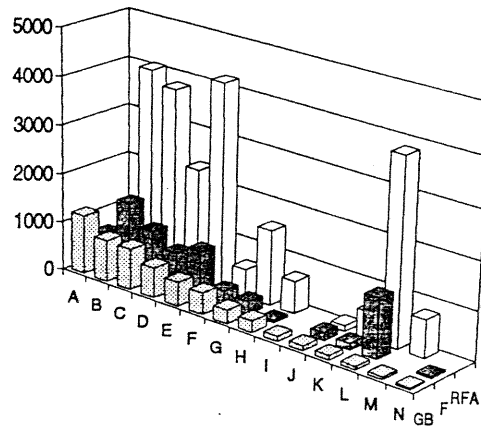
O desenvolvimento de robots mais eficientes passa pela reavaliação de todos os passos conducentes à concepção destes sistemas. Uma primeira possibilidade, que tem vindo a ser explorada, consiste no refinamento dos diversos componentes da estrutura mecânica (transmissões, engrenagens, ligas metálicas, servomotores), melhoramento do controlador (electrónica de "drive", algoritmos de controlo, etc) e integração mais eficiente dos vários tipos de sensores [2.4-2.6]. Este procedimento conduziu à mais recente geração de robots, no entanto, mantém, intrinsecamente, as mesmas limitações estruturais que afectavam as primeiras gerações de manipuladores. No sentido de se ultrapassarem as limitações referidas, estão em curso estratégias de investigação que incidem em aspectos fundamentais



a)



b)



c)

Fig. 2.1 a) Crescimento do número de robots em uso a nível industrial.  
 b) Número de robots industriais em uso para cada 10000 trabalhadores no Japão (J), Suécia (S), República Federal da Alemanha (RFA), Itália (I), Estados Unidos da América (EUA), França (F) e Grã-Bretanha (GB).  
 c) Distribuição do número de robots por tipo de aplicação na República Federal da Alemanha (RFA), França (F) e Grã-Bretanha (GB).  
 A - Moldagem sob pressão                      B - Soldadura por pontos  
 C - Soldadura por arco                         D - Carregamento de máquinas  
 E - Montagem                                      F - Investigação, teste e educação  
 G - Revestimento superficial                 H - Outras  
 I - Aplicação de colas e vedantes            J - Esmerilagem e rebarbagem  
 K - Carregamento de prensas e            L - Manipulação de componentes  
     máquinas de forjar  
 M - Fundição em molde                        N - Corte



da robótica e que, como tal, têm uma perspectiva mais ambiciosa e de longo prazo. Uma dessas estratégias retoma o velho sonho de copiar o homem nas máquinas. Este sonho remonta à antiguidade e é possível encontrá-lo em criações muitas das quais mantêm, ainda hoje, a sua actualidade [2.7]. Assim, a construção de manipuladores segundo "princípios biológicos", seja no que concerne o desenvolvimento de actuadores com propriedades similares às dos músculos [2.8, 2.9], seja no que diz respeito à concepção de estruturas mecânicas adequadas [2.10, 2.11], constitui hoje uma referência fundamental na robótica. Uma segunda estratégia de investigação consiste na formulação de modelos matemáticos, algoritmos computacionais e critérios de optimização, que possibilitem um estudo sistemático de todos os factores em jogo [2.12, 2.13]. O presente capítulo aborda esta estratégia começando por discutir, na secção 2.2, a filosofia envolvida no processo de modelização de sistemas físicos. A modelização de manipuladores robóticos (secção 2.3) constitui um caso particular dessa classe de problemas, pelo que toda uma panóplia de métodos propostos pode ser vista à luz das metodologias gerais de modelização. O levantamento dos problemas e métodos existentes conduz à formulação de um novo método de modelização de manipuladores baseado em conceitos estatísticos. Na secção 2.4 desenvolve-se o novo método e comparam-se os resultados com os dos processos clássicos. Por último, na secção 2.5, apresentam-se as conclusões que decorrem do estudo efectuado.

## **2.2. Sobre a Modelização de Sistemas Físicos**

A evolução da ciência conduziu a humanidade a uma melhor compreensão do mundo em que vive. O conhecimento é um património que é transmitido e enriquecido de geração para geração. Deste modo, nos dias de hoje, o estudo de um dado problema científico é não só o produto da imaginação criadora, disciplinada e sistematizada pelo método científico, mas também uma consequência do saber acumulado ao longo dos séculos.

Serve esta introdução para referir que a modelização de sistemas físicos adopta, naturalmente, as leis conhecidas da física e da matemática como ponto de partida para o exercício de descrever "cientificamente" um dado fenómeno. Nesta medida fica para trás a discussão das estratégias reducionista *versus* holística da ciência. Também, saber se o mundo físico segue, admiravelmente, um conjunto de leis matemáticas (conhecidas ou não) ou, inversamente, saber se essas leis não são

mais do que um espelho da natureza humana que condicionam a perspectiva adoptada, sendo a realidade mais indisciplinada e indomável, são questões que ficam normalmente restringidas aos formalismos da filosofia da ciência. Assim, a modelização de um sistema físico, consiste na aplicação das leis da física clássica e dos formalismos da matemática nomeadamente a geometria Euclideana e os cálculos integral, diferencial, matricial e vectorial. O resultado desta simbiose é um "modelo" que toma corpo através de um conjunto de equações integro-diferenciais. Apesar de tudo, mesmo neste domínio restrito, subsistem áreas inexploradas, e encontrar um modelo é tanto uma arte como um exercício científico. Esta problemática está intimamente associada ao método científico de estudar os fenómenos físicos, isto é, um modelo é um "subproduto" da física e da matemática pelo que, conseqüentemente, goza *mutatis mutantis* das mesmas propriedades. Na próxima secção ilustra-se este tema seguindo a modelização de manipuladores robóticos. Trata-se de um sistema particular mas suficientemente rico para suscitar o estudo que se pretende.

### 2.3. Modelização de Manipuladores Robóticos

A modelização de manipuladores robóticos consiste na obtenção dos modelos cinemático e dinâmico. O modelo cinemático trata as relações geométricas que se obtêm quando se descreve o robot através de um conjunto de coordenadas no espaço operacional m-dimensional  $\mathbf{p}=[p_1, \dots, p_m]^T$  ou, alternativamente, por um conjunto de coordenadas no espaço n-dimensional das articulações  $\mathbf{q}=[q_1, \dots, q_n]^T$ . A relação  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$  toma o nome de "cinemática directa", enquanto que a relação oposta, isto é,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$  toma o nome de "cinemática inversa". Por outro lado, o "modelo dinâmico (inverso)" relaciona ainda as forças/binários  $\mathbf{F}$ , fornecidas pelos actuadores das n articulações, com  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

Estes modelos são, conforme já foi referido, uma consequência da aplicação das leis da física e dos formalismos da matemática e, sob esse ponto de vista, a modelização de manipuladores traduz-se na aplicação de métodos bem conhecidos. Contudo, a prática revela alguns problemas *a priori* inesperados. De facto, para um robot industrial típico (Fig. 2.2), com seis graus de liberdade (g.d.l.'s), a cinemática (Apêndice 1) e a dinâmica (Apêndice 2) revelam uma grande complexidade [2.14, 2.15]. Particularmente no caso do modelo dinâmico verifica-se não só uma dificuldade no seu cálculo em tempo real, devido ao seu enorme peso

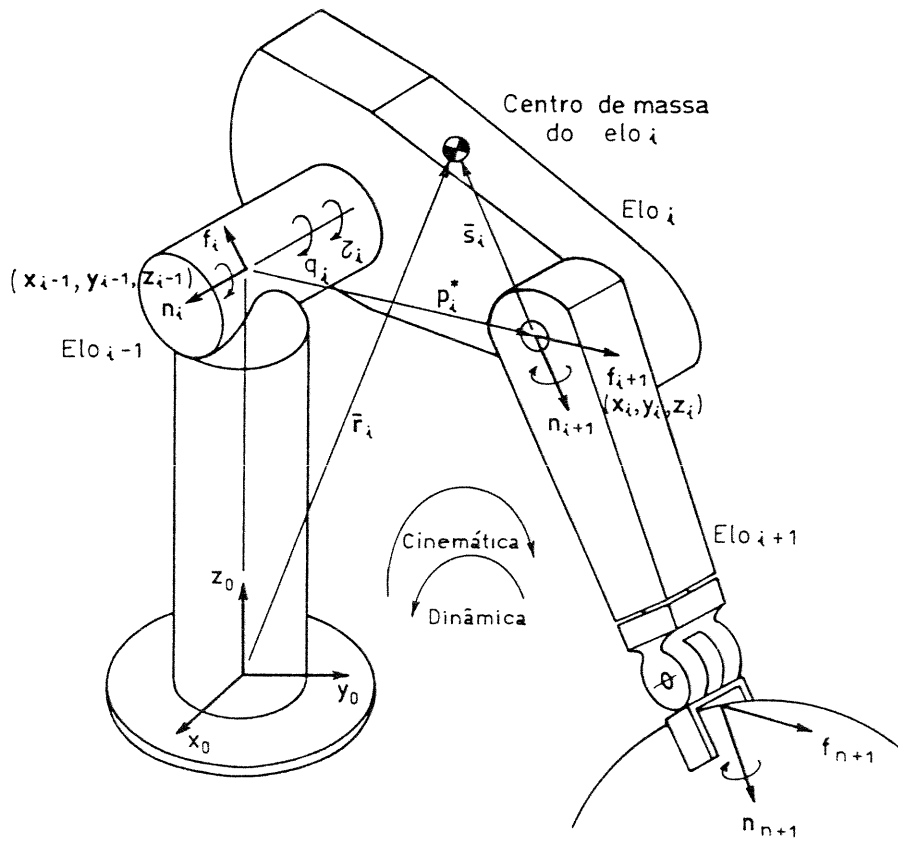
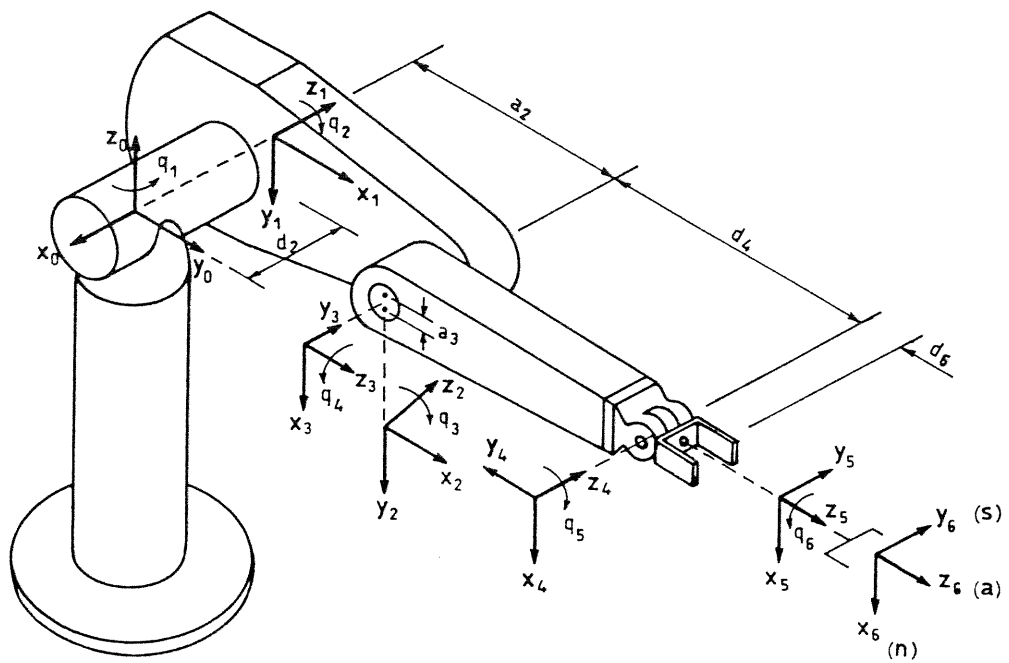


Fig. 2.2 O robot industrial Puma.

**Tabela 2.1. Fórmulas Numéricas Recursivas da Dinâmica - Método de Newton-Euler**

Cinemática. Equações a calcular no sentido crescente:  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i = \begin{cases} \mathbf{A}_i^{i-1} (\mathbf{A}_{i-1}^0 \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{z}_0 \dot{q}_i) & \text{se o elo } i \text{ for rotacional} \\ \mathbf{A}_i^{i-1} (\mathbf{A}_{i-1}^0 \mathbf{w}_{i-1}) & \text{se o elo } i \text{ for linear} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_i^0 \dot{\mathbf{w}}_i = \begin{cases} \mathbf{A}_i^{i-1} [\mathbf{A}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{w}}_{i-1} + \mathbf{z}_0 \ddot{q}_i + (\mathbf{A}_{i-1}^0 \mathbf{w}_{i-1}) \times (\mathbf{z}_0 \dot{q}_i)] & \text{se o elo } i \text{ for rotacional} \\ \mathbf{A}_i^{i-1} (\mathbf{A}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{w}}_{i-1}) & \text{se o elo } i \text{ for linear} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_i^0 \dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} (\mathbf{A}_i^0 \dot{\mathbf{w}}_i) \times (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{p}_i^*) + (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times [(\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{p}_i^*)] + \mathbf{A}_i^{i-1} (\mathbf{A}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{v}}_{i-1}) & \text{se o elo } i \text{ for rotacional} \\ \mathbf{A}_i^{i-1} (\mathbf{z}_0 \ddot{q}_i + \mathbf{A}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{v}}_{i-1}) + (\mathbf{A}_i^0 \dot{\mathbf{w}}_i) \times (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{p}_i^*) + 2(\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times (\mathbf{A}_i^{i-1} \mathbf{z}_0 \dot{q}_i) + & \text{se o elo } i \text{ for linear} \\ + (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times [(\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{p}_i^*)] & \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_i^0 \ddot{\mathbf{v}}_i = (\mathbf{A}_i^0 \dot{\mathbf{w}}_i) \times (\mathbf{A}_i^0 \bar{\mathbf{s}}_i) + (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times [(\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times (\mathbf{A}_i^0 \bar{\mathbf{s}}_i)] + \mathbf{A}_i^0 \dot{\mathbf{v}}_i$$

Dinâmica. Equações a calcular no sentido decrescente:  $i = n, n-1, \dots, 1$

$$\mathbf{A}_i^0 \mathbf{f}_i = \mathbf{A}_i^{i+1} (\mathbf{A}_{i+1}^0 \mathbf{f}_{i+1}) + m_i \mathbf{A}_i^0 \ddot{\mathbf{v}}_i$$

$$\mathbf{A}_i^0 \mathbf{n}_i = \mathbf{A}_i^{i+1} [\mathbf{A}_{i+1}^0 \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{A}_{i+1}^0 \mathbf{p}_{i+1}^*) \times (\mathbf{A}_{i+1}^0 \mathbf{f}_{i+1})] + (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{p}_i^* + \mathbf{A}_i^0 \bar{\mathbf{s}}_i) \times (m_i \mathbf{A}_i^0 \ddot{\mathbf{v}}_i) + (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{J}_i \mathbf{A}_0^i) (\mathbf{A}_i^0 \dot{\mathbf{w}}_i) + (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i) \times [(\mathbf{A}_i^0 \mathbf{J}_i \mathbf{A}_0^i) (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{w}_i)]$$

$$\tau_i = \begin{cases} (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{n}_i)^T (\mathbf{A}_i^{i-1} \mathbf{z}_0) + b_i \dot{q}_i & \text{se o elo } i \text{ for rotacional} \\ (\mathbf{A}_i^0 \mathbf{f}_i)^T (\mathbf{A}_i^{i-1} \mathbf{z}_0) + b_i \dot{q}_i & \text{se o elo } i \text{ for linear} \end{cases}$$

onde:

$$\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

$$\mathbf{w}_0 = \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_0 = (g_x, g_y, g_z)^T \quad \text{tal que } |\mathbf{g}| = 9.8062 \text{ m/s}^2$$

## Legenda

O índice  $i$  representa o elo  $i$  do manipulador.

$m_i$	massa total do elo $i$ .
$\mathbf{p}_i^*$	origem do $i$ -ésimo sistema de coordenadas relativamente ao $(i-1)$ -ésimo sistema de coordenadas.
$b_i$	coeficiente de atrito viscoso da articulação $i$ .
$\mathbf{J}_i$	matriz $3 \times 3$ da inércia do elo $i$ relativamente ao seu centro de massa com referência ao sistema de coordenadas $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ .
$\mathbf{f}_i$	vector $3 \times 1$ da força exercida pelo elo $i-1$ sobre o elo $i$ no sistema de coordenadas $(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$ , de modo a suportar o elo $i$ e seguintes.
$\mathbf{n}_i$	vector $3 \times 1$ do momento exercido pelo elo $i-1$ sobre o elo $i$ , no sistema de coordenadas $(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$ .
$\tau_i$	força/binário fornecido pelo actuador da articulação $i$ .
$\mathbf{v}_i$	vector $3 \times 1$ da velocidade linear do elo $i$ relativamente ao sistema de coordenadas da base $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ .
$\mathbf{w}_i$	vector $3 \times 1$ da velocidade angular do elo $i$ relativamente ao sistema de coordenadas da base $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ .
$\mathbf{A}_{i-1}^i$	matriz $3 \times 3$ de rotação de um vector expresso no sistema de coordenadas $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ para o sistema de coordenadas com a mesma origem $(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$ .
$\mathbf{A}_i^0 \bar{\mathbf{s}}_i$	vector $3 \times 1$ do centro de massa do elo $i$ relativamente ao seu próprio sistema de coordenadas $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ .

computacional, mas também a impossibilidade prática da sua obtenção por meios manuais, dada a sua extensão. Este problema levou a que só recentemente fossem obtidos, através de computador, modelos dinâmicos completos sob a forma simbólica para robots com seis g.d.l.'s [2.16-2.18]. O processo mais expedito de modelização da dinâmica e que, conseqüentemente, foi desenvolvido em primeiro lugar, baseia-se na avaliação da dinâmica através de um conjunto de fórmulas numéricas recursivas. O formalismo de Lagrange permite deduzir um conjunto de fórmulas recursivas correspondentes à dinâmica (método de Lagrange-Euler) [2.19]. Não obstante, é também possível deduzir um outro conjunto de fórmulas a partir das equações fundamentais da física (método de Newton-Euler) [2.20]. Se bem que, na essência, os dois métodos recursivos sejam equivalentes [2.21], estudos recentes [2.22, 2.23] mostram que o algoritmo de Newton-Euler (Tabela 2.1) é, computacionalmente, o mais eficiente, não só para o cálculo numérico recursivo mas também face à avaliação simbólica, desde que sejam simplificadas as somas com 0, as multiplicações com 0 ou 1 e todas as expressões com senos e cossenos que conduzam a igualdades trigonométricas ("customized computing").

**Tabela 2.2. Equações Simbólicas Simplificadas da Dinâmica do Robot Puma 560**

$$\begin{array}{lll}
 S_2 = \text{Sen}(q_2) & C_5 = \text{Cos}(q_5) & C_2S_{23} = C_2 * S_{23} \\
 C_2 = \text{Cos}(q_2) & q_{23} = q_2 + q_3 & C_2C_{23} = C_2 * C_{23} \\
 S_3 = \text{Sen}(q_3) & S_{23} = \text{Sen}(q_{23}) & S_4S_5 = S_4 * S_5 \\
 C_3 = \text{Cos}(q_3) & C_{23} = \text{Cos}(q_{23}) & C_4S_5 = C_4 * S_5 \\
 S_4 = \text{Sen}(q_4) & C_{223} = \text{Cos}(q_2 + q_{23}) & S_4C_5 = S_4 * C_5 \\
 C_4 = \text{Cos}(q_4) & SS_{23} = S_{23} * S_{23} & C_4C_5 = C_4 * C_5 \\
 S_5 = \text{Sen}(q_5) & SC_{23} = S_{23} * C_{23} & C_{23}C_4C_5 = C_{23} * C_4C_5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 v_1v_1 = \dot{q}_1 * \dot{q}_1 & v_2v_2 = \dot{q}_2 * \dot{q}_2 & v_3v_4 = \dot{q}_3 * \dot{q}_4 \\
 v_1v_2 = \dot{q}_1 * \dot{q}_2 & v_2v_3 = \dot{q}_2 * \dot{q}_3 & v_3v_5 = \dot{q}_3 * \dot{q}_5 \\
 v_1v_3 = \dot{q}_1 * \dot{q}_3 & v_2v_4 = \dot{q}_2 * \dot{q}_4 & v_4v_4 = \dot{q}_4 * \dot{q}_4 \\
 v_1v_4 = \dot{q}_1 * \dot{q}_4 & v_2v_5 = \dot{q}_2 * \dot{q}_5 & v_4v_5 = \dot{q}_4 * \dot{q}_5 \\
 v_1v_5 = \dot{q}_1 * \dot{q}_5 & v_3v_3 = \dot{q}_3 * \dot{q}_3 & v_5v_5 = \dot{q}_5 * \dot{q}_5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 v_2v_3v_3v_3 = v_2v_3 + 0.5 * v_3v_3 \\
 v_2v_4v_3v_4 = v_2v_4 + v_3v_4 \\
 v_2v_5v_3v_5 = v_2v_5 + v_3v_5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \zeta_1 = -8.4 * S_{23} \\
 \zeta_2 = -0.134 * C_{23} \\
 \zeta_3 = -0.0025 * S_5 \\
 \zeta_4 = [0.00164 + 0.0003 * (1 - 2 * S_4 * S_4)] * S_{23} - 0.0025 * C_{23} * C_4S_5 \\
 \zeta_5 = -(0.0025 * C_5 + 0.000642) * C_{23} * S_4 \\
 \zeta_6 = 0.6 * SC_{23} - 0.0213 * (1 - 2 * SS_{23}) \\
 \zeta_7 = 0.022 * S_3 + 0.744 * C_3
 \end{array}$$

***Coefficientes Inerciais***

$$\begin{array}{l}
 D[1,1] = 2.57 + 1.38 * C_2 * C_2 + 0.3 * SS_{23} + 0.744 * C_2S_{23} \\
 D[1,2] = 0.69 * S_2 + \zeta_2 + 0.0238 * C_2 \\
 D[1,3] = \zeta_2 - 0.00397 * S_{23} \\
 D[2,2] = 6.79 + 0.744 * S_3 \\
 D[2,3] = 0.333 + 0.372 * S_3 - 0.011 * C_3 \\
 D[3,3] = 1.16 \\
 D[3,4] = -0.00125 * S_4S_5 \\
 D[3,5] = 0.00125 * C_4C_5 \\
 D[4,4] = 0.2 \\
 D[5,5] = 0.18 \\
 D[6,6] = 0.19
 \end{array}$$

### *Coeficientes Coriolis/Centrípetos*

$$2C_1[1,2] = -2.76 * S_2 * C_2 + 0.744 * C_{223} + \zeta_6$$

$$C_1[1,2] = 0.5 * 2C_1[1,2]$$

$$2C_1[1,3] = 0.744 * C_2C_{23} + 0.022 * C_2S_{23} + \zeta_6$$

$$C_1[1,3] = 0.5 * 2C_1[1,3]$$

$$2C_1[1,4] = -0.0025 * SC_{23} * S_4S_5 + 0.00086 * C_4S_5 - 0.00248 * C_2C_{23} * S_4S_5$$

$$2C_1[1,5] = -0.0025 * (SS_{23} * S_5 - SC_{23} * C_4C_5) - 0.00248 * C_2 * (S_{23} * S_5 - C_{23}C_4C_5) + 0.00086 * S_4C_5$$

$$C_1[2,2] = 0.69 * C_2 + 0.134 * S_{23} - 0.0238 * S_2$$

$$2C_1[2,3]v_2v_3 + C_1[3,3]v_3v_3 = (0.267 * S_{23} - 0.00758 * C_{23}) * v_2v_3v_3v_3$$

$$2C_2[1,4] = \zeta_4 + 0.00248 * S_2 * C_4S_5$$

$$2C_2[1,5] = \zeta_5 + 0.00248 * S_2 * S_4C_5$$

$$C_2[2,3] = 0.5 * \zeta_7$$

$$2C_2[2,3]v_2v_3 + C_2[3,3]v_3v_3 = \zeta_7 * v_2v_3v_3v_3$$

$$2C_2[2,4] = -0.00248 * C_3 * S_4S_5$$

$$2C_2[2,4]v_2v_4 + 2C_2[3,4]v_3v_4 = 2C_2[2,4] * v_2v_4v_3v_4$$

$$C_1[1,4]v_1v_1 + C_2[2,4]v_2v_2 = 0.5 * (2C_1[1,4] * v_1v_1 + 2C_2[2,4] * v_2v_2)$$

$$2C_2[2,5]v_2v_5 + 2C_2[3,5]v_3v_5 = [\zeta_3 + 0.00248 * (C_3 * C_4C_5 - S_3 * S_5)] * v_2v_5v_3v_5$$

$$C_1[1,5]v_1v_1 + C_2[2,5]v_2v_2 = 0.5 * (2C_1[1,5] * v_1v_1 + 2C_2[2,5] * v_2v_2)$$

$$2C_3[1,4] = \zeta_4$$

$$2C_3[1,5] = \zeta_5$$

$$2C_3[4,5] = -0.0025 * S_4C_5$$

$$C_3[4,4]v_4v_4 + C_3[5,5]v_5v_5 = -0.00125 * C_4S_5 * (v_4v_4 + v_5v_5)$$

$$2C_4[1,5] = -0.000642 * S_{23} * C_4$$

$$2C_3[2,5]v_2v_5 + 2C_3[3,5]v_3v_5 = \zeta_3 * v_2v_5v_3v_5$$

$$2C_3[2,5]v_2v_3 + C_3[3,5]v_3v_3 = \zeta_3 * v_2v_3v_3v_3$$

$$2C_4[2,5] = 0.000642 * S_4$$

$$2C_4[2,5]v_2v_5 + 2C_4[3,5]v_3v_5 = 2C_4[2,5] * v_2v_5v_3v_5$$

$$2C_4[2,5]v_2v_4 + 2C_4[3,5]v_3v_4 = -2C_4[2,5] * v_2v_4v_3v_4$$

### *Forças/Binários Gravitacionais*

$$G[2] = -37.2 * C_2 + \zeta_1 + 1.02 * S_2$$

$$G[3] = \zeta_1 + 0.25 * C_{23}$$

$$G[4] = 0.028 * S_{23} * S_4S_5$$

$$G[5] = -0.028 * (C_{23}S_5 + S_{23} * C_4C_5)$$

### *Forças/Binários nas Articulações*

$$\begin{aligned} \tau[1] = & D[1,1] * \ddot{q}_1 + D[1,2] * \ddot{q}_2 + D[1,3] * \ddot{q}_3 + 2C_1[1,2] * v_1v_2 + 2C_1[1,3] * v_1v_3 + \\ & + 2C_1[1,4] * v_1v_4 + 2C_1[1,5] * v_1v_5 + (2C_1[2,3]v_2v_3 + C_1[3,3]v_3v_3) + \\ & + C_1[2,2] * v_2v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau[2] = & D[1,2] * \ddot{q}_1 + D[2,2] * \ddot{q}_2 + D[2,3] * \ddot{q}_3 + 2C_2[1,4] * v_1v_4 + 2C_2[1,5] * v_1v_5 + \\ & + (2C_2[2,3]v_2v_3 + C_2[3,3]v_3v_3) + (2C_2[2,4]v_2v_4 + 2C_2[3,4]v_3v_4) + \\ & + (2C_2[2,5]v_2v_5 + 2C_2[3,5]v_3v_5) - C_1[1,2] * v_1v_1 + G[2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau[3] = & D[1,3] * \ddot{q}_1 + D[2,3] * \ddot{q}_2 + D[3,3] * \ddot{q}_3 + D[3,4] * \ddot{q}_4 + D[3,5] * \ddot{q}_5 + \\ & + 2C_3[1,4] * v_1v_4 + 2C_3[1,5] * v_1v_5 + (2C_3[2,5]v_2v_5 + 2C_3[3,5]v_3v_5) + \\ & + 2C_3[4,5] * v_4v_5 - C_1[1,3] * v_1v_1 - C_2[2,3] * v_2v_2 + \\ & + (C_3[4,4]v_4v_4 + C_3[5,5]v_5v_5) + G[3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau[4] = & D[3,4] * \ddot{q}_3 + D[4,4] * \ddot{q}_4 - 2C_2[1,4] * v_1v_2 - 2C_3[1,4] * v_1v_3 + \\ & + 2C_4[1,5] * v_1v_5 + (2C_4[2,5]v_2v_5 + 2C_4[3,5]v_3v_5) - \\ & - (C_1[1,4]v_1v_1 + C_2[2,4]v_2v_2) + G[4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau[5] = & D[3,5] * \ddot{q}_3 + D[5,5] * \ddot{q}_5 - 2C_2[1,5] * v_1v_2 - 2C_3[1,5] * v_1v_3 - \\ & - 2C_4[1,5] * v_1v_4 - (2C_3[2,5]v_2v_3 + C_3[3,5]v_3v_3) - \\ & - (2C_4[2,5]v_2v_4 + 2C_4[3,5]v_3v_4) - (C_1[1,5]v_1v_1 + C_2[2,5]v_2v_2) + G[5] \end{aligned}$$

$$\tau[6] = D[6,6] * \ddot{q}_6$$

Peso computacional: 5 senos, 6 cosenos, 89 somas e 151 multiplicações

Critério de simplificação das equações simbólicas: 1% do valor significativo

$S_i = \text{Sen}(q_i)$ ,  $C_i = \text{Cos}(q_i)$ ,  $S_{ii} = \text{Sen}(q_i + q_i)$ , e  $C_{ii} = \text{Cos}(q_i + q_i)$

Por outro lado, tendo em vista a simplificação das equações simbólicas (e o seu cálculo) foi proposta a eliminação de parcelas com valor pouco significativo. As expressões resultantes [2.24], após alguns melhoramentos suplementares [2.25, 2.26] (Tabela 2.2), são consideravelmente mais simples; todavia, o seu peso computacional é ainda elevado conforme se pode constatar pelo gráfico representado na Figura 2.3.

Esta linha de raciocínio, isto é, o desenvolvimento de técnicas para melhorar o cálculo do modelo, poderia estender-se à cinemática, ao planeamento de trajectórias, ao CAD da estrutura do manipulador, etc. Semelhante problemática parece não ter a ver com a concepção de modelos, mas somente com a sua avaliação por computador. Todavia, sob outro ponto de vista, podemos interpretar as dificuldades apontadas como um sinal da desadaptação entre o tipo de modelo encontrado e algumas das aplicações pretendidas. Deve-se notar que, para o caso da dinâmica atrás mencionado, as equações simbólicas e as fórmulas numéricas recursivas correspondem, tão somente, a "formas" diferentes de um mesmo modelo. Se bem que o fácies seja diferente, ambos os métodos se baseiam numa



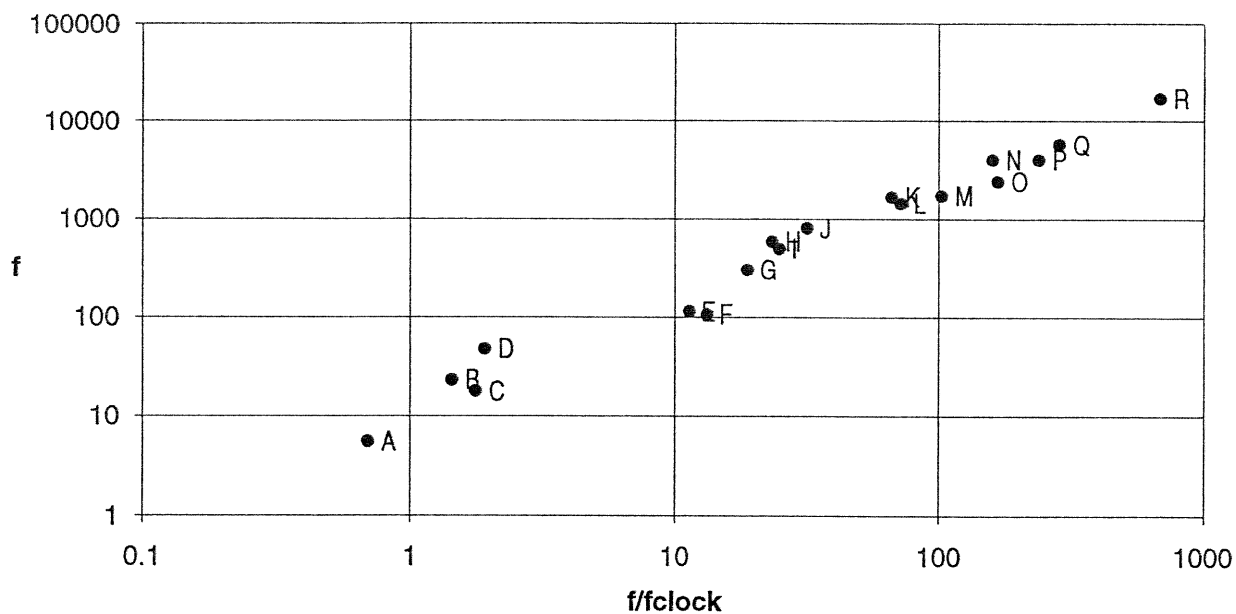


Fig. 2.3 Comparação das frequências de cálculo ( $f$ ) das equações simplificadas da dinâmica do robot Puma 560 *versus* o índice  $f/f_{clock}$ , para vários computadores.

$f$  representa a frequência "absoluta" de cálculo e  $f/f_{clock}$  representa a frequência "normalizada" de cálculo ( $f_{clock}$ : frequência do relógio). As operações foram avaliadas em vírgula flutuante, com precisão de 8 bytes.

A	IBM PS/2	8086	8 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
B	IBM PS/2	80386 SX	16 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
C	IBM PS/2	80286	10 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
D	IBM PS/2	80386	25 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
E	IBM PS/2	80286/80287	10 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
F	IBM PS/2	8086/8087	8 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
G	IBM PS/2	80386 SX/80387 SX	16 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
H	IBM PS/2	80386/80387	25 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
I	SUN 3/60	68020/6881	20 MHz	UNIX 4.2	GNU C V1.25
J	Apollo DN3500	68030/68882	25 MHz	BSD 4.2 Do/IX	System C
K	IBM PS/2	80486	25 MHz	MSDOS 3.3	TC V2.0
L	T800-20, Occam 2	IMS T800-20	20 MHz		Occam 2
M	AViiON AVX 300	88100	16.7 MHz	DG/UX 4.2	System C
N	NEXT CUBE	68040	25 MHz	Nextstep 2.1 Mach 2.5	GNU C V1.36
O	SUN 4/110	SPARC	14.3 MHz	UNIX 4.3.2	System C
P	DECSTATION 3100	MIPS 2000/2010	16.7 MHz	Ultrix 3.1	System C
Q	SUN 4/60 SPARCst.1	SPARC	20 MHz	SUN 4.0.3	System C
R	IBM 6000 st.530	IBM Power Syst/6000	25 MHz	AIX V3.1	System C

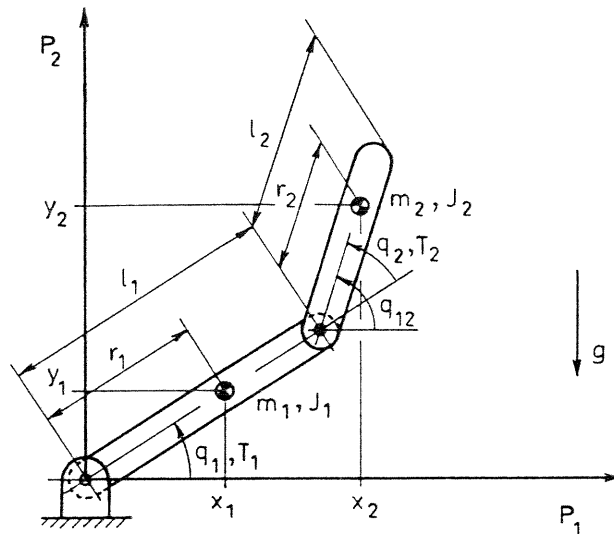


Fig. 2.4 O robot 2R.

descrição matemática convencional da física clássica. Assim, na secção seguinte é levantada a possibilidade e, conseqüentemente, estudada a concepção de um modelo alternativo que adopta um novo conjunto de formalismos matemáticos.

#### 2.4. Modelização Estatística de Manipuladores Robóticos

Na secção anterior mostrou-se que a modelização de manipuladores robóticos através dos métodos clássicos acarreta sérias dificuldades operacionais. Devido a esta razão, os estudos teóricos sobre esta matéria adoptam, muitas vezes, como protótipo o robot 2R (2 g.d.l.'s rotacionais) representado na Figura 2.4. Para este caso os modelos cinemático directo e inverso e o modelo dinâmico inverso estão representados na Tabela 2.3. Conforme já se referiu as equações simbólicas representadas são, somente, uma "forma" do modelo. Assim, a título de exemplo, representa-se na Figura. 2.5 uma modelização do robot 2R através de gráficos de ligação energética ("bond graphs") [2.27]. As fórmulas simbólicas e este gráfico são equivalentes e pode-se obter um a partir do outro. Este exemplo sublinha, mais uma vez, o papel fundamental das leis da física clássica nos aspectos da modelização.

Nesta secção apresenta-se um método de modelização cujo desenvolvimento é independente do conhecimento das leis da física. Esta posição científica requer que se "esqueçam" os conhecimentos existentes, de um modo em tudo semelhante àquele que Bertrand Russell [2.28] prescreve ao estudioso para

**Tabela 2.3. Cinemática e Dinâmica do Robot 2R**

***Cinemática Directa***

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{pmatrix}$$

***Cinemática Inversa***

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$$

$$C_2 = \frac{p_1^2 + p_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

$$q_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{l_2 S_2}{l_1 + l_2 C_2}\right)$$

***Dinâmica (inversa)***

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 + (m_0 + m_2)l_1^2 + m_0 l_2^2 + 2l_1 A_2 C_2 & J_2 + m_0 l_2^2 + l_1 A_2 C_2 \\ J_2 + m_0 l_2^2 + l_1 A_2 C_2 & J_2 + m_0 l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} -l_1 A_2 S_2 (2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ l_1 A_2 S_2 \dot{q}_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} g \{ [m_1 r_1 + (m_0 + m_2) l_1] C_1 + A_2 C_{12} \} \\ g A_2 C_{12} \end{pmatrix}$$

onde:

$$A_2 = m_2 r_2 + m_0 l_2 \quad (\text{momento estático do segundo elo})$$

$$J_i = I_i + m_i r_i^2 \quad i=1,2$$

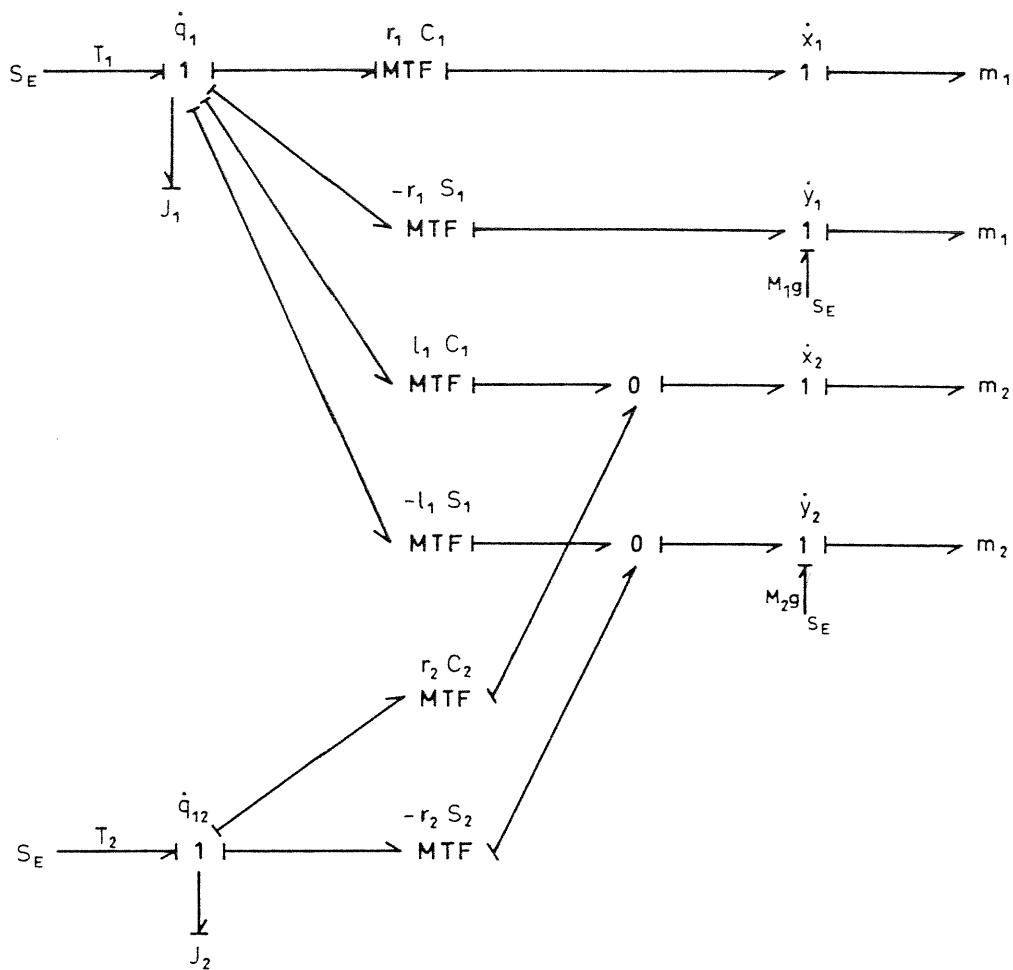


Fig. 2.5 Gráfico de ligação energética ("Bond graph") do robot 2R.

este se libertar dos pressupostos da física clássica e compreender, cabalmente, a relatividade. Assim, Bertrand Russell imagina a experiência seguinte:

*'... suponhamos que se deu a uma pessoa uma droga capaz de a deixar temporariamente inconsciente e também que ao despertar ela perdeu a memória, embora mantenha a faculdade de raciocinar. Admitamos ainda que, enquanto inconsciente, ela foi levada num balão e que só acordou quando este tiver sido arrastado pelo vento e numa noite escura, por exemplo a 5 de Novembro em Inglaterra ou em 4 de Julho nos Estados Unidos.*

*O nosso viajante poderá ver os fogos de artifício disparados do solo, bem como de comboios ou de aviões que se deslocam em todas as direcções, mas não conseguirá descortinar o solo, nem os comboios ou aviões, em virtude da escuridão. Nesta hipótese, qual será a sua concepção do mundo? Sem dúvida,*

*pensará que nada é permanente: há apenas lampejos que, durante a sua efémera existência, se deslocam no vazio, formando as mais variadas e bizarras curvas. Não lhe é possível tocar nesses lampejos, tendo apenas de limitar-se a vê-los. Como é evidente, a sua geometria, a sua física ou a sua metafísica serão muito diferentes das dos mortais comuns. Se um destes também se encontrasse a bordo do balão, a sua linguagem havia de parecer incompreensível ao nosso imaginário viajante. ...'*

No nosso caso pretendemos estudar um dado fenómeno físico - os manipuladores robóticos - "desconhecendo" as leis da física, isto é, mobilizando para tal somente conhecimentos matemáticos. Por outro lado, pressupondo o desconhecimento das leis da física, estamos dispostos a assumir uma posição experimentalista similar à que James Gleick [2.29] refere no estudo do caos:

*'Para os investigadores do caos a matemática tornou-se uma ciência experimental, com o computador a substituir os laboratórios cheios de tubos de ensaio e de microscópios.'*

Esta filosofia é debatida, segundo uma perspectiva de modelização, no parágrafo 2.4.1. Uma vez definido o método científico, no parágrafo 2.4.2 passa-se ao seu desenvolvimento e respectiva aplicação à cinemática de manipuladores.

#### **2.4.1. Sobre a Modelização Estatística de Sistemas**

Neste parágrafo pretende-se desenvolver um método de modelização que:

- Não requeira o conhecimento *a priori* das leis da física, não lhe ficando assim condicionado o seu desenvolvimento.
- Adopte um conjunto de formalismos matemáticos capazes de, por si só, isto é, obedecendo ao ponto anterior, revelarem as diversas relações entre as variáveis do sistema.
- Possibilite um tratamento numérico e "experimentalista" bem adaptado ao cálculo por computador.

A estatística satisfaz estes requerimentos e de facto, hoje em dia, é usada para modelizar numerosos fenómenos de índole social, económica, biológica, física e outra, que muitas vezes são de difícil descrição através de outras ferramentas

matemáticas. Na realidade, a própria física, como no caso da mecânica quântica, dá-nos exemplos de fenómenos para os quais a estatística é a ferramenta de eleição. Por outro lado, existem ainda outros fenómenos, como no caso da termodinâmica, onde se pode recorrer quer à metodologia clássica quer ao método estatístico. Segundo esta ordem de ideias, o desenvolvimento de um modelo estatístico para manipuladores robóticos requer, em primeiro lugar, uma caracterização adequada (leia-se de acordo com os formalismos da estatística) das diversas variáveis em jogo. Em segundo lugar, é necessário estabelecer as relações estatísticas entre essas variáveis. Por último, devem analisar-se as relações obtidas a fim de se revelarem eventuais critérios de optimização. No parágrafo seguinte aplica-se esta metodologia ao estudo da cinemática do robot 2R [2.30, 2.31]. A extensão destes conceitos à dinâmica e à optimização da estrutura mecânica [2.32, 2.33] será apresentada nos capítulos seguintes e segue passos idênticos.

#### 2.4.2. Modelização Estatística da Cinemática de Manipuladores

A cinemática <sup>inversa</sup> (directa) relaciona as posições, velocidades e acelerações  $\{\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}\}$  exigidas ao manipulador no espaço operacional, com as posições, velocidades e acelerações  $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$  solicitadas aos actuadores das articulações. Deste modo, o desenvolvimento de um modelo estatístico deve considerar:

- A descrição estatística do conjunto  $\{\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}\}$  de variáveis independentes ou variáveis aleatórias de entrada (v.a.e.'s).
- A descrição estatística do conjunto  $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$  de variáveis dependentes ou variáveis aleatórias de saída (v.a.s.'s).
- Um conjunto de parâmetros cinemáticos (dimensões dos elos, tipos de articulações, etc.) que influenciam o desempenho do manipulador pelo que requerem uma optimização na fase de projecto da estrutura do manipulador.

Deve notar-se que o modelo estatístico não entra em consideração com a variável "tempo". Assim, variáveis que estejam relacionadas pela operação  $d/dt$  como  $\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  ou  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  são consideradas independentes entre si. Este pressuposto alivia o modelo da formulação dessas relações, mas implica a inexistência de informação temporal no tratamento subsequente. Isto quer dizer que o modelo estatístico resulta mais simples que a modelização clássica com base em equações diferenciais ficando, contudo, limitado a aplicações onde o tempo não é

fundamental. Assim, por exemplo, este método é aplicável à optimização da estrutura do manipulador mas não ao seu controlo.

Nesta perspectiva, o ponto 2.4.2.1 começa por introduzir "experimentalmente", isto é, por simulação numérica, o modelo estatístico do robot 2R. Uma vez estabelecido o novo método, o ponto 2.4.2.2. apresenta um desenvolvimento analítico, que complementa a via numérica. Com base nas conclusões obtidas, em 2.4.2.3. é avaliada a optimização dos diversos factores cinemáticos em jogo.

### 2.4.2.1. Desenvolvimento Numérico de um Modelo Estatístico para o Robot 2R

O desenvolvimento do modelo estatístico requer a caracterização das v.a.e.'s e das v.a.s.'s através de funções densidade de probabilidade (f.d.p.'s) apropriadas. A ausência de conhecimento, *a priori*, sobre o comportamento típico do sistema em estudo sugere o estabelecimento cuidadoso de hipóteses que permitam, uma vez aplicado o novo modelo, concluir sobre as características dos seus desempenhos. Em face das conclusões assim obtidas será então possível modificar convenientemente essas hipóteses no sentido de otimizar os desempenhos cinemáticos do robot manipulador. Desta maneira, para a variável posição  $\mathbf{p}=[p_1, p_2]^T$  considera-se uma f.d.p. uniforme bidimensional:

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & p_1^2 + p_2^2 < (l_1 - l_2)^2 \\ \frac{1}{4\pi l_1 l_2} & (l_1 - l_2)^2 \leq p_1^2 + p_2^2 \leq (l_1 + l_2)^2 \\ 0 & (l_1 + l_2)^2 < p_1^2 + p_2^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Segundo a mesma ordem de ideias, para a velocidade  $\dot{\mathbf{p}} = [\dot{p}_1, \dot{p}_2]^T$  e a aceleração  $\ddot{\mathbf{p}} = [\ddot{p}_1, \ddot{p}_2]^T$  escolheram-se f.d.p.'s gaussianas bidimensionais com média nula:

$$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (2.2)$$

$$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (2.3)$$

Tabela 2.4. Requisitos de  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$ .

Categorias	$\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}$	$\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}$
1	0.1	0.1
2	0.1	1
3	0.1	10
4	1	0.1
5	1	1
6	1	10
7	10	0.1
8	10	1
9	10	10

Esta escolha define algumas propriedades das v.a.e.'s *a priori* razoáveis, nomeadamente:

- As variáveis aleatórias  $\mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  são independentes umas das outras.
- Os vectores de  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  são constituídos por duas componentes independentes, isto é,  $\dot{p}_1$  é independente de  $\dot{p}_2$  e  $\ddot{p}_1$  é independente de  $\ddot{p}_2$ .

Tendo em atenção estas considerações efectuaram-se (por simulação) várias experiências numéricas:

- Mantendo constante o comprimento total do manipulador, isto é, fazendo  $L = l_1 + l_2 = 0.6$  m.
- Estabelecendo sete estruturas a estudar, com relações de comprimento dos elos um e dois ( $\mu = l_1/l_2$ ) iguais a 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4 e 1.6 respectivamente.
- Definindo nove categorias de exigências no espaço operacional correspondentes a combinações de velocidades e acelerações "baixas", "médias" e "altas", conforme indicado na Tabela 2.4.

Nestas condições, diversas tentativas preliminares, com vista a estabelecer um compromisso entre a rapidez e a precisão da experimentação numérica, conduziram à excitação da cinemática através de uma amostra aleatória de 4000 pontos no espaço operacional, obedecendo às f.d.p.'s (2.1)-(2.3).



A análise das v.a.s.'s passa pelo estudo dos respectivos histogramas. Dado que  $g_Q(\mathbf{q})$ ,  $g_{Q\dot{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e  $g_{Q\dot{Q}\ddot{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  atingem dimensão  $n$ ,  $2n$  e  $3n$ , respectivamente, o seu estudo através de gráficos torna-se inoportuno. Contudo, esta dificuldade pode ser torneada já que, sob o ponto de vista dos actuadores, em cada articulação só é relevante a informação que à mesma diz respeito. Assim, é possível uma análise simples e eficiente dos resultados através dos gráficos das f.d.p.'s marginais de cada v.a.s.. Contudo, deve referir-se, desde já, o carácter distinto de  $\mathbf{q}$  face a  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$ . De facto,  $\mathbf{q}$  traduz a configuração do manipulador pelo que não é possível, *a priori*, atribuir um significado particular a um dado conjunto de valores. Todavia, para  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  a situação é diferente, pois valores elevados correspondem a um "esforço" dos actuadores das articulações que deve ser evitado. Deste modo, decidiu-se estudar  $\mathbf{q}$  directamente nos histogramas e  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  através de um índice numérico que reflectisse o "esforço" correspondente a amplitudes elevadas. Por este motivo, tomou-se como índice característico dos histogramas de  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  a diferença entre os percentis de 97.5% e de 2.5%, isto é, o interpercentil de 95% (IP<sub>95</sub>). Como é óbvio, são possíveis muitos outros índices de dispersão, contudo, adoptou-se o índice referido não só pela sua facilidade de cálculo, mas também por coincidir, nas f.d.p.'s gaussianas, com uma medida bem conhecida. Por outro lado, em termos físicos, o valor de 95% é razoável pois corresponde à "maioria dos casos". Não obstante, várias experiências demonstram que se obtêm conclusões idênticas para outros valores da mesma ordem de grandeza do interpercentil, ou seja, a adopção de um valor particular não influencia as conclusões subsequentes.

A simulação numérica adoptada no início deste parágrafo conduz à transformação  $f_P(p_1, p_2) \rightarrow g_Q(q_1, q_2)$ , onde  $g_Q(q_1, q_2)$  é a f.d.p. conjunta de  $\{q_1, q_2\}$ , representada nos histogramas da Figura 2.6.

Observa-se que:

- As v.a.s.'s  $q_1$  e  $q_2$  têm domínio de variação  $[-\pi, \pi]$ .
- A v.a.s.  $q_1$  é independente da v.a.s.  $q_2$ , isto é:

$$g_Q(q_1, q_2) = g_{Q_1}(q_1) g_{Q_2}(q_2) \quad (2.4)$$

- $g_{Q_1}(q_1)$  é uma f.d.p. uniforme, enquanto que  $g_{Q_2}(q_2)$  tem máximos em  $q_2 = \pm\pi/2$  e mínimos em  $q_2 = 0$  e  $q_2 = \pm\pi$ .

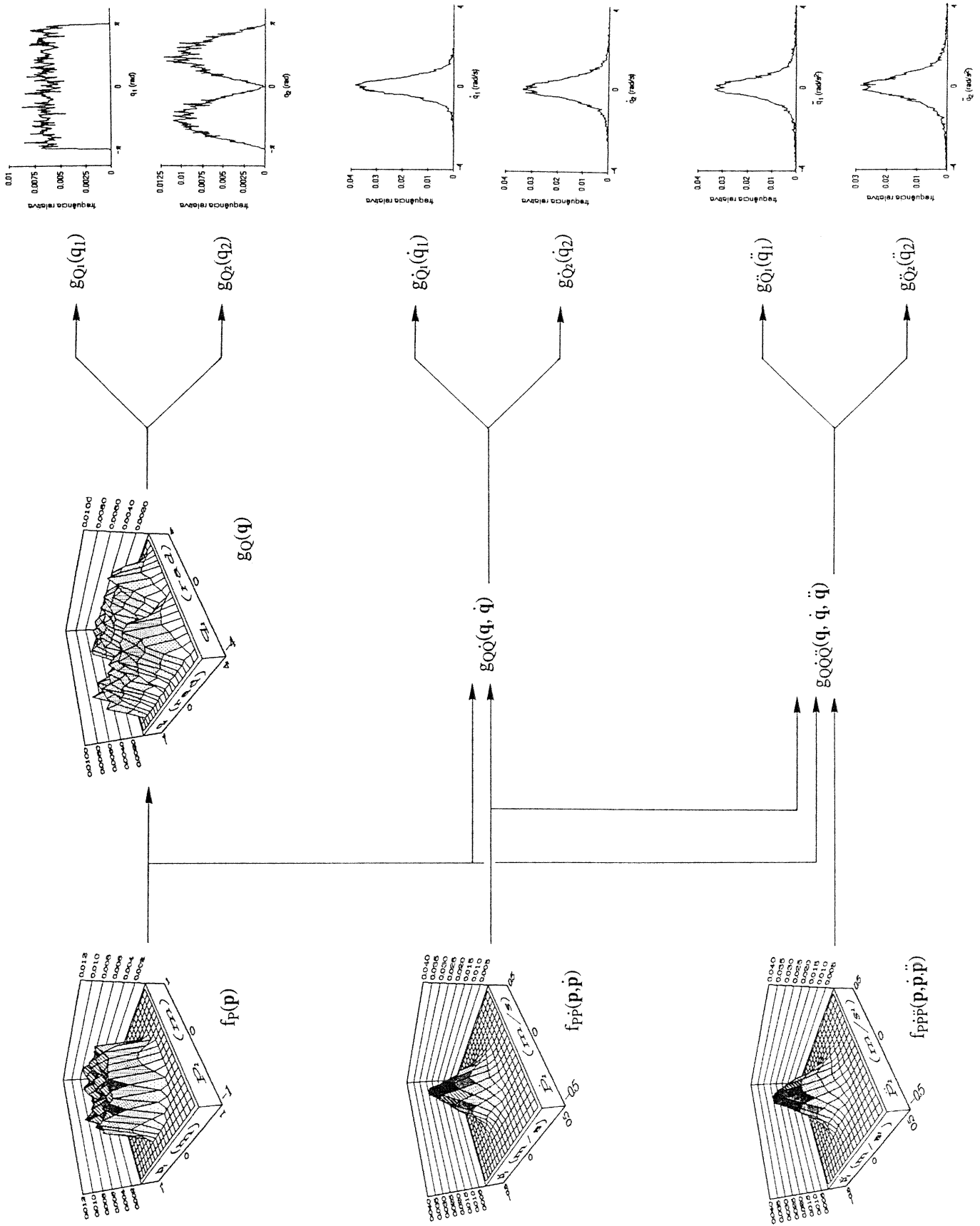


Fig. 2.6 Diagrama sinóptico da modelização estatística da cinemática ( $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ ), com as v.a.e.'s obedecendo às f.d.p.'s (2.1)-(2.3) com  $\sigma \dot{\mathbf{p}} = 0.1 \text{ ms}^{-1}$  e  $\sigma \ddot{\mathbf{p}} = 0.1 \text{ ms}^{-2}$ , para qualquer das sete estruturas ( $\mu = I_1/I_2$ ) do robot 2R.

Isto quer dizer que o manipulador 2R "privilegia" configurações próximas de  $q_2 = \pm\pi/2$  e "evita" configurações com  $q_2 = 0$  ou  $q_2 = \pm\pi$ . Por outras palavras,  $g_Q(q_1, q_2)$  revela que o sistema cinemático assume, maioritariamente, determinadas configurações em detrimento de outras. Dado que a "excitação"  $f_P(p_1, p_2)$  definida em (2.1) não é responsável por esta situação, então a propriedade referida resulta, única e exclusivamente, das características intrínsecas da cinemática. Assim, surge, naturalmente, um critério de definição de configurações cinemáticas óptimas, assunto que será retomado nos pontos seguintes.

No que concerne os histogramas de  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$  ou, mais concretamente, a sua interpretação através do IP<sub>95</sub> (Fig. 2.7) pode observar-se que:

- Os histogramas de  $\dot{q}_1$  e  $\ddot{q}_1$  tomam valores elevados para  $\mu < 1$  mas estabilizam para  $\mu \geq 1$ , enquanto que os histogramas de  $\dot{q}_2$  e  $\ddot{q}_2$  têm um mínimo para  $\mu = 1$ . Então,  $\mu = 1$  ( $l_1 = l_2$ ) corresponde à estrutura do manipulador 2R que minimiza, simultaneamente, as exigências cinemáticas nas duas articulações.
- Quer para  $\dot{q}_1$  quer para  $\dot{q}_2$ , as categorias {1,2,3}, {4,5,6} e {7,8,9} apresentam valores similares, respectivamente. Isto quer dizer, como seria de esperar, que  $\dot{q}_1$  e  $\dot{q}_2$  não dependem de  $\ddot{p}$ .
- $\ddot{q}_1$  e  $\ddot{q}_2$  dependem quer de  $\dot{p}$  quer de  $\ddot{p}$ . No tocante a  $\dot{p}$  existe uma influência notável conforme se pode constatar pela comparação dos três grupos de categorias {1,2,3}, {4,5,6} e {7,8,9}. Relativamente a  $\ddot{p}$  verifica-se uma grande sensibilidade para as categorias 1, 2 e 3, enquanto que, pelo contrário, a influência é pouco significativa nas restantes categorias 4 a 9.

Portanto, pode inferir-se que, em "média", solicitações de  $\dot{p}$  são mais desfavoráveis que solicitações de  $\ddot{p}$  no que concerne as exigências colocadas aos actuadores das articulações. Esta conclusão é, aliás, coerente com a nossa experiência, pois os manipuladores são máquinas de funcionamento em regime transitório, com elevadas acelerações/desacelerações. De facto, funcionamento a velocidades elevadas durante períodos de tempo razoáveis (isto é, em regime permanente) constitui um modo anómalo de trabalho e que, como tal, deve ser evitado.

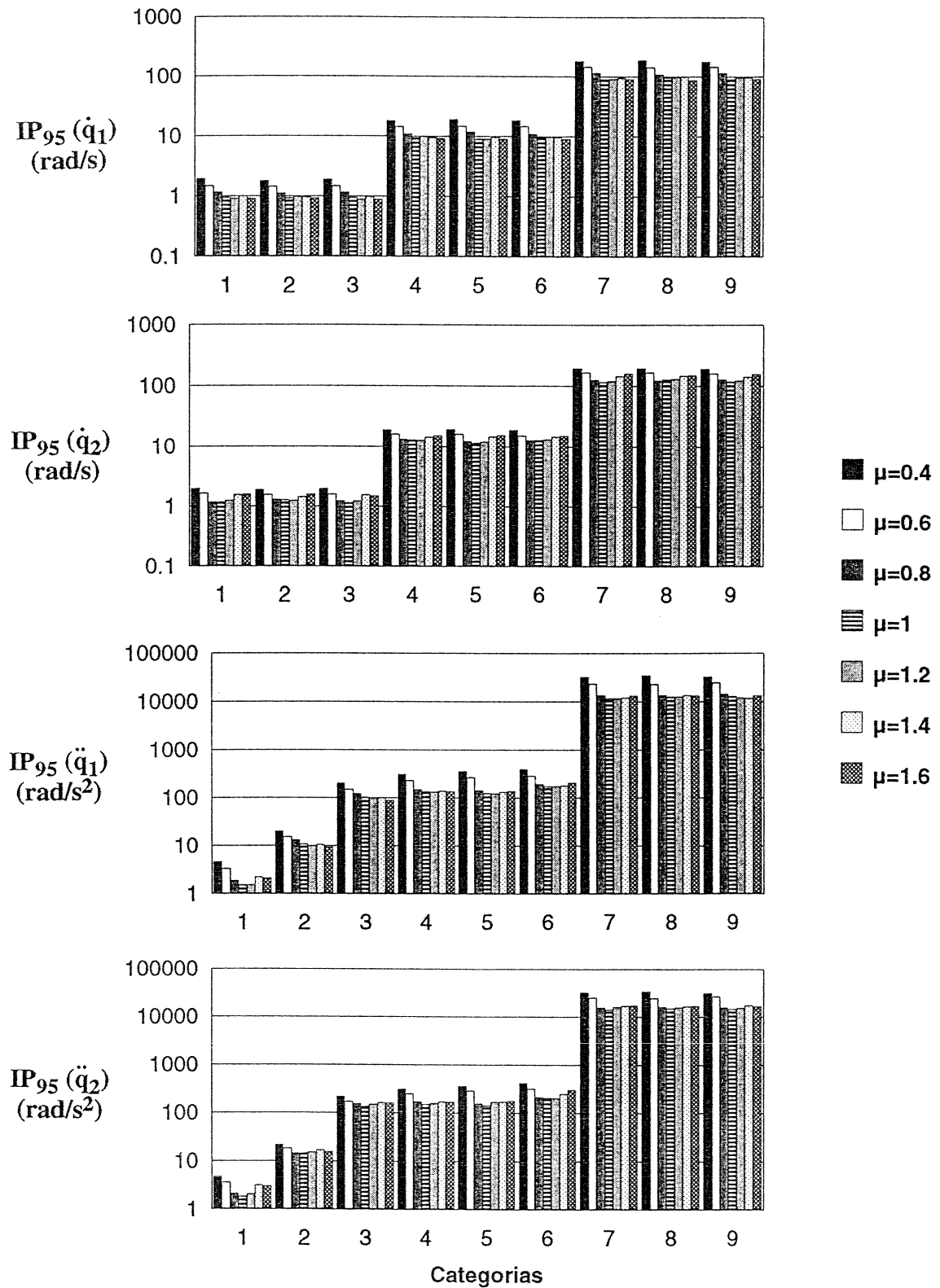


Fig. 2.7 Comparação do  $IP_{95}$  para  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$ ,  $\ddot{q}_1$  e  $\ddot{q}_2$  para sete estruturas ( $\mu$ ) do robot 2R. As v.a.e.  $\mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  obedecem às f.d.p.'s definidas em (2.1), (2.2) e (2.3).

### 2.4.2.2. Desenvolvimento Analítico de um Modelo Estatístico para o Robot 2R

O modelo estatístico foi introduzido por simulação numérica. Esta opção "experimentalista" não está condicionada à simulação e, na realidade, está também vocacionada para o tratamento de dados provenientes de sensores. No entanto, o modelo estatístico pode ser tratado analiticamente conforme é abordado neste ponto. Esta estratégia complementa o tratamento numérico e estabelece laços com a modelização clássica como se verá de seguida.

A "excitação" do sistema cinemático por  $f_p(\mathbf{p})$ ,  $f_{p\dot{p}}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$  e  $f_{p\dot{p}\ddot{p}}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}})$  produz v.a.s.'s  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$ , com f.d.p.'s que estão relacionadas com as iniciais do seguinte modo:

$$g_Q(\mathbf{q}) = |J_P| f_p[\mathbf{p}(\mathbf{q})] \quad (2.5a)$$

$$g_{Q\dot{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = |J_{P\dot{P}}| f_{p\dot{p}}[\mathbf{p}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \quad (2.5b)$$

$$g_{Q\dot{Q}\ddot{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = |J_{P\dot{P}\ddot{P}}| f_{p\dot{p}\ddot{p}}[\mathbf{p}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})] \quad (2.5c)$$

em que os jacobianos são:

$$J_P = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.6a)$$

$$J_{P\dot{P}} = \frac{\partial(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})}{\partial(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \quad (2.6b)$$

$$J_{P\dot{P}\ddot{P}} = \frac{\partial(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}})}{\partial(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})} \quad (2.6c)$$

O segundo membro das equações (2.5) é constituído por dois factores distintos, os quais podem ser interpretados segundo uma perspectiva de teoria de sistemas:

- O primeiro factor - os jacobianos  $J_P$ ,  $J_{P\dot{P}}$  e  $J_{P\dot{P}\ddot{P}}$  - depende, somente, das propriedades cinemáticas do manipulador e corresponde à caracterização estatística do sistema.
- O segundo factor - as f.d.p.'s das v.a.e.'s, expressas nas variáveis  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $f_p[\mathbf{p}(\mathbf{q})]$ ,  $f_{p\dot{p}}[\mathbf{p}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$  e  $f_{p\dot{p}\ddot{p}}[\mathbf{p}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})]$  - constitui uma "medida" das exigências impostas pelas tarefas a desempenhar no espaço

operacional e corresponde à "resposta forçada" do sistema ao estímulo das v.a.e.'s.

Dado que as f.d.p.'s das v.a.s.'s têm, sempre, área unitária, as fórmulas (2.5) implicam que um aumento do primeiro factor é equivalente à diminuição, na mesma proporção, da área envolvida no segundo factor. Assim, o jacobiano funciona como um "factor de escala" que, à medida que toma valores superiores, faz aproximar o segundo factor de um conjunto de impulsos de Dirac ( $\delta(\cdot)$ ). Diversas experiências confirmam este raciocínio e mostram que a maximização dos jacobianos, segundo condições a estabelecer seguidamente, conduz a histogramas de  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  com menor dispersão em torno da origem, isto é, que traduzem uma menor probabilidade de solicitações de amplitudes elevadas de  $\dot{\mathbf{q}}$  ou  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

O cálculo de  $J_p$ ,  $J_{p\dot{p}}$  e  $J_{p\dot{p}\ddot{p}}$  em (2.6) requer o conhecimento do modelo cinemático clássico. Se utilizarmos as expressões da Tabela 2.3 - estabelecendo, assim, uma ponte entre a modelização estatística e a modelização clássica - então verificamos que os jacobianos são potências sucessivas da expressão  $l_1 l_2 S_2$ . Consequentemente, a maximização de  $J_p$ ,  $J_{p\dot{p}}$  e  $J_{p\dot{p}\ddot{p}}$  requer procedimentos iguais. Então para:

$$L = l_1 + l_2 \quad (2.7a)$$

$$\mu = l_1 / l_2 \quad (2.7b)$$

ocorre um máximo quando:

$$\mu = 1 \quad (2.8a)$$

$$q_2 = \pm\pi/2 \quad (2.8b)$$

Este resultado coincide com as conclusões obtidas em estudos anteriores [2.12, 2.13] por aplicação da modelização clássica. Por outro lado, é ainda de sublinhar a coincidência destes resultados obtidos analiticamente, com os resultados numéricos obtidos no ponto anterior. Deste modo fica demonstrada a validade do método estatístico na sua perspectiva numérica, como um método eficiente de modelização, o que é particularmente útil em situações complexas, nomeadamente na dinâmica e para robots com mais g.d.l.'s. Deve ainda referir-se que as equações (2.8a) e (2.8b) têm significados distintos. A equação  $\mu=1$  corresponde à optimização da estrutura cinemática do manipulador, pelo que influencia o seu desenho. A equação  $q_2=\pm\pi/2$

equivale à configuração óptima, pelo que tem implicações no planeamento de trajectórias.

Uma vez encontrado um critério de optimização cinemática resta avaliar, no ponto seguinte, os resultados da sua utilização.

### 2.4.2.3. Optimização da Cinemática

Para obter uma optimização de todos os factores que influenciam a cinemática é necessário não só utilizar um manipulador com estrutura  $\mu=1$ , mas também seleccionar f.d.p.'s das v.a.e.'s que obedeçam à condição (2.8b). Apesar de existir um número infinito de f.d.p.'s com essas características, a escolha a efectuar não influencia o estudo subsequente. Por este motivo foi adoptada a seguinte família de f.d.p.'s para  $\mathbf{p}$ :

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \frac{\chi}{\pi l_1 l_2} \left\{ 1 - \left[ \frac{p_1^2 + p_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right]^2 \right\}^{\frac{K-1}{2}} \quad (2.9a)$$

onde:

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } K = 1 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 2; 4; 6 \dots \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots K}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{4} & \text{se } K = 3; 5; 7 \dots \end{cases} \quad (2.9b)$$

No espaço das articulações esta f.d.p. corresponde a:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |S_2|^K \quad (2.10)$$

É de notar que para  $K=1$  se tem a f.d.p. uniforme (2.1), enquanto que para  $K \rightarrow \infty$  se obtem a f.d.p. óptima segundo (2.8) cuja expressão no espaço operacional e no espaço das articulações é, respectivamente:

**Tabela 2.5. Funções densidade de probabilidade consideradas no parágrafo 2.4.2.3.**

	caso 1	caso 2	caso 3
$f_p(\mathbf{p})$	expressão (2.1)	expressão (2.10) com $K=3$	expressão (2.10) com $K=3$
$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}})$	expressão (2.2)	expressão (2.2)	expressão (2.12)
$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}})$	expressão (2.3)	expressão (2.3)	expressão (2.13)

$$f_p(\mathbf{p}) = \delta[p_1^2 + p_2^2 - (l_1^2 + l_2^2)] \quad (2.11a)$$

$$g_Q(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} [\delta(q_2 + \pi/2) + \delta(q_2 - \pi/2)] \quad (2.11b)$$

No que diz respeito a  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$ , o estudo anterior não aponta nenhuma classe óptima de f.d.p.'s. No entanto, estas variáveis também sofrem a influência desfavorável dos desvios de  $\mathbf{q}$  em relação à configuração óptima  $q_2 = \pm\pi/2$ . Deste modo decidiu-se considerar f.d.p.'s para  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  "melhoradas" no sentido de (2.8b):

$$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}}, q_2) = \frac{1}{2\pi[\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}(q_2)]^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2[\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}(q_2)]^2} \right\} \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}(q_2) = \begin{cases} 2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}|q_2}/\pi & \text{se } 0 \leq |q_2| \leq \pi/2 \\ 2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}|q_2-\pi}/\pi & \text{se } \pi/2 < |q_2| \leq \pi \end{cases} \quad (2.12b)$$

$$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}}, q_2) = \frac{1}{2\pi[\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}(q_2)]^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2[\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}(q_2)]^2} \right\} \quad (2.13a)$$

$$\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}(q_2) = \begin{cases} 2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}|q_2}/\pi & \text{se } 0 \leq |q_2| \leq \pi/2 \\ 2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}|q_2-\pi}/\pi & \text{se } \pi/2 < |q_2| \leq \pi \end{cases} \quad (2.13b)$$

Por outras palavras, estabeleceu-se um conjunto de f.d.p.'s que caracterizam um planeamento de trajectórias melhorado no sentido definido pela condição (2.8b).

O estudo numérico do comportamento cinemático do manipulador 2R com  $\mu=1$  compara os três casos, com graus de optimização crescente, indicados na



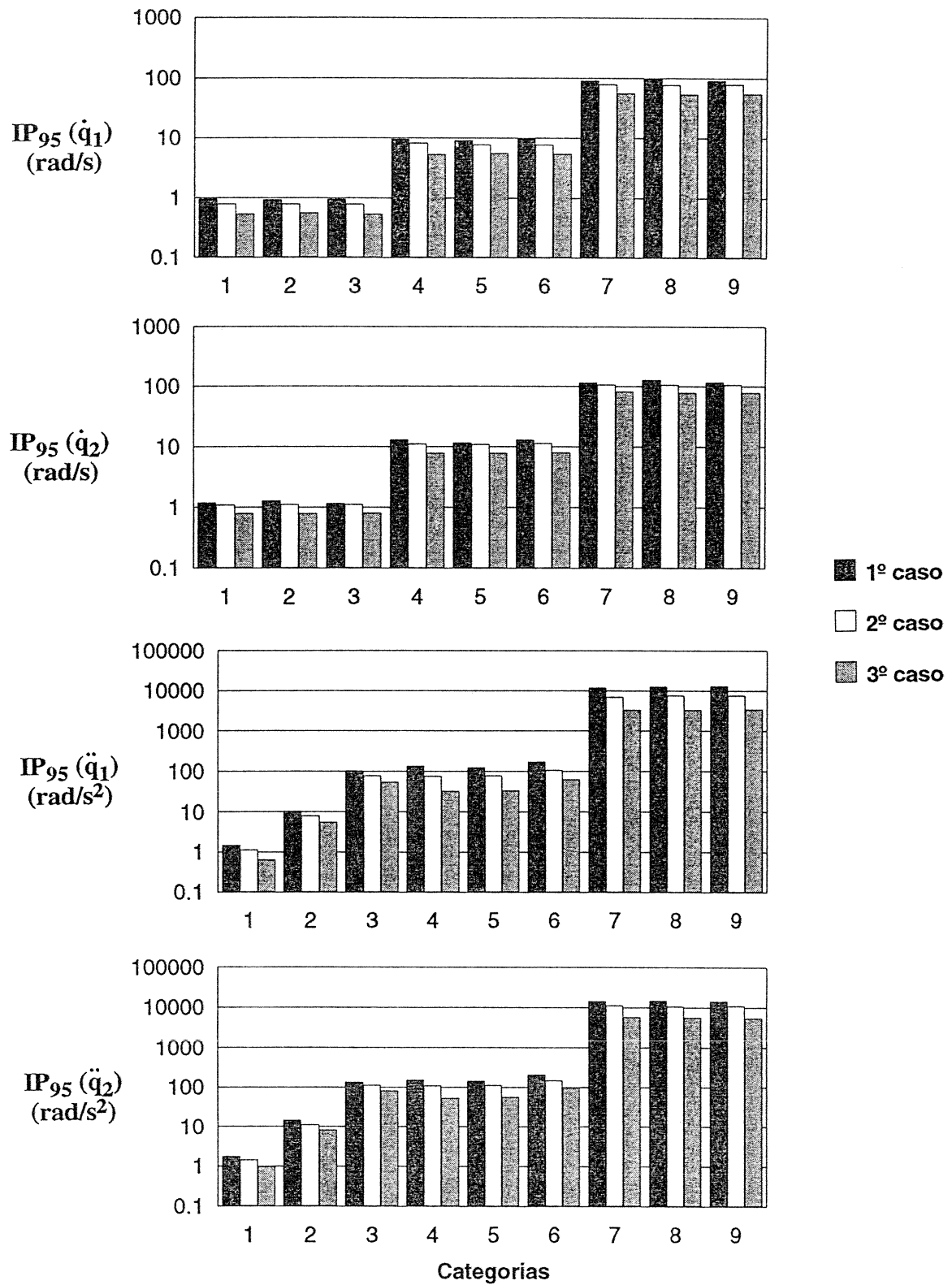


Fig. 2.8 Comparação do IP<sub>95</sub> para  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$ ,  $\ddot{q}_1$  e  $\ddot{q}_2$  para o robot 2R com estrutura  $\mu=1$ . As v.a.e.  $\mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  obedecem às f.d.p.'s definidas na Tabela 2.5.

Tabela 2.5, para as nove situações de  $\sigma_{\dot{p}}$  e  $\sigma_{\dot{q}}$  (Tabela 2.4) já consideradas anteriormente.

Comparando os histogramas de  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$  através do  $IP_{95}$  obtêm-se os gráficos da Figura 2.8. Estes gráficos revelam desempenhos sucessivamente melhorados o que demonstra, mais uma vez, a legitimidade dos conceitos estatísticos.

Em conclusão, a optimização do desempenho cinemático tem lugar quer na estrutura mecânica quer no planeamento de trajectórias. Dado o carácter estatístico da modelização, a optimização das trajectórias não aponta, tal como se esperava, qualquer relação temporal entre  $p$ ,  $\dot{p}$  e  $\ddot{p}$  ou  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$ . No entanto, as conclusões são claras e fáceis de obter por tratamento numérico, características sobremaneira importantes quando se tem em mente a complexidade dos estudos que adoptam a modelização clássica.

## 2.5. Conclusões

A modelização de sistemas é um exercício que toma como ponto de partida as leis da física e que adopta como ferramentas operacionais os formalismos da matemática. O resultado desta acção conjunta é um "modelo" que descreve a realidade física. Como é sabido, as leis da física clássica adoptam uma formulação com base nos cálculos diferencial, matricial e vectorial. Assim, a modelização recorre, naturalmente, ao mesmo tipo de cálculo e o modelo toma corpo sob a forma de um conjunto de equações integro-diferenciais. Os manipuladores robóticos são sistemas passíveis de uma descrição deste tipo. No entanto, o desenvolvimento de modelos adequados é confrontado com dificuldades operacionais devido à extensão, e conseqüente complexidade, das expressões correspondentes. Por esta razão, foram propostas diversas metodologias de formulação do modelo, como alternativas à descrição usual por expressões simbólicas. A tradução do modelo por expressões simbólicas, fórmulas numéricas recursivas ou gráficos de ligação energética, não é mais do que a apresentação de uma mesma descrição através de "formas" diferentes.

As dificuldades na obtenção do modelo bem como na sua posterior utilização e cálculo sugerem metodologias alternativas que ultrapassem esses obstáculos. Assim, apresentou-se um conjunto de conceitos, baseados na estatística, que permite descrever e estudar os manipuladores robóticos. A descrição que se

obtem é um novo modelo e não uma forma alternativa da modelização clássica. De facto, o modelo estatístico não recorre às leis da física, pelo que se torna necessário reinventar todo o processo conducente à obtenção de uma descrição matemática do sistema. O resultado final revela propriedades importantes, nomeadamente facilidade na sua obtenção, eficiência no seu tratamento numérico e simplicidade na compreensão dos fenómenos envolvidos. Deste modo, a modelização estatística complementa a modelização clássica e fornece uma nova perspectiva de compreensão da realidade.

## 2.6. Referências

- [2.1] C. Bredin, "Flexible, Robot-Based Manufacturing Systems", ABB Review, vol. 1, pp. 3-8, 1991.
- [2.2] "French Robot Population Grows in 1989", The Industrial Robot, pp. 39-41, March 1990.
- [2.3] "Record Year for UK Robots", The Industrial Robot, pp. 86-89, June 1990.
- [2.4] M.C. Good, L.M. Sweet e K.L. Strobel, "Dynamic Models for Control System Design of Integrated Robot and Drive Systems", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 107, pp. 53-59, March, 1985.
- [2.5] Gerhard Hirzinger, "Robot Systems Completely Based on Sensory Feedback", IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol. IE-33, pp. 105-109, May 1986.
- [2.6] H. Kazerooni, "Statically Balanced Direct Drive Manipulator", Robotica, vol. 7, pp. 143-149, April-June 1989.
- [2.7] Marco Cianchi, "Leonardo da Vinci's Machines", Becocci Editore, 1988.
- [2.8] K. Kuribayashi, "A New Actuator of a Joint Mechanism Using TiNi Alloy Wire", The Int. J. Robotics Research, vol. 4, pp. 47-58, 1986.
- [2.9] D.G. Caldwell e P.M. Taylor, "Artificial Muscles as Robotic Actuators", IFAC Symp. on Robot Control SYROCO'88, Karlsruhe, RFA, 1988.
- [2.10] B. Dwolatzky e G.S. Thornton, "The GEC Tetrabot - A Serial-Parallel Topology Robot: Control Design Aspects", IEE Int. Conf. Control'88, Oxford, UK, 1988.
- [2.11] B. Tondu, F. Meftouh, J.C. Ganza e P. Lopez, "The Myonarm: An Anthropomorphic Robot Arm Prototype Driven by Artificial Muscle

- Actuators", IEEE International Workshop on Sensorial Integration for Industrial Robots: Architectures & Applications, Saragoça, Espanha, 1989.
- [2.12] Y. C. Tsai e A. H. Soni, "Accessible Region and Synthesis of Robot Arms", ASME J. Mechanical Design, vol. 103, pp. 803-811, Oct., 1981.
- [2.13] Tsuneo Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms", The Int. J. Robotics Research, vol. 4, pp. 3-9, Summer, 1985.
- [2.14] C.S. George Lee, "Robot Arm Kinematics, Dynamics, and Control", IEEE Computer, vol. 15, n. 12, pp. 62-80, Dec., 1982.
- [2.15] Charles P. Neuman e John J. Murray, "The Complete Model and Customized Algorithms of the Puma Robot", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-17, pp. 635-644, July/Aug., 1987.
- [2.16] M. C. Leu e N. Hemati, "Automated Symbolic Derivation of Dynamic Equations of Motion for Robotic Manipulators", ASME J. Dynamic Syst. Meas. Contr., vol. 108, pp. 172-179, Sept., 1986.
- [2.17] J. Koplic e M. C. Leu, "Computer Generation of Robot Dynamic Equations and the Related Issues", J. of Robotic Systems, vol. 3, n. 3, pp. 301-319, Fall, 1986.
- [2.18] Pi-Ying Cheng, Cheng-I Weng e Chao-Kuang Chen, "Symbolic Derivation of Dynamic Equations of Motion for Robot Manipulators Using Piogram Symbolic Method", IEEE J. of Robotics and Automation, vol. 4, no. 6, pp. 599-609, Dec. 1988.
- [2.19] John M. Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-10, pp. 730-736, Nov., 1980.
- [2.20] J. Y. S. Luh, M. W. Walker e R. P. C. Paul, "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 102, pp. 69-76, June, 1980.
- [2.21] William M. Silver, "On the Equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators", The Int. J. Robotics Research, vol. 1, pp. 60-70, Summer 1982.
- [2.22] Charles P. Neuman e John J. Murray, "Customized Computational Robot Dynamics", J. of Robotic Systems, vol. 4, n. 4, pp. 503-526, Aug., 1987.
- [2.23] Charles P. Neuman e John J. Murray, "Symbolically Efficient Formulations for Computational Robot Dynamics", J. of Robotic Systems, vol. 4, n. 6, pp. 743-769, Dec., 1987.

- [2.24] B. Armstrong: O. Khatib e J. Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm", Proc. 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, San Francisco, CA, 1986.
- [2.25] J.A. Tenreiro Machado, J.L. Martins de Carvalho e Alexandra M.S. Galhano, "Computer System Evaluation in Robot Control, IEEE Int. Workshop on Intelligent Motion Control", Istanbul, Turkey, 1990.
- [2.26] J.A. Tenreiro Machado, J.L. Martins de Carvalho e Alexandra M.S. Galhano, "Towards the Real-Time Control of Robotic Systems", IEE Int. Conf. Control'91, Edinburgh, UK, 1991.
- [2.27] Michel Lebrun, "Application des "Bond Graphs" à la Modelisation et Simulation des Systemes Electrohydrauliques en Vue d'Apporter une Aide à leur Conception", Actes du Carrefour sur "La Robotique Industrielle", Presses Universitaires de Lyon, 1980.
- [2.28] Bertrand Russell, "ABC da Relatividade", Publicações Europa-América, 1969.
- [2.29] James Gleick, "CAOS: A construção de uma nova ciência", Gradiva, 1989.
- [2.30] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "On the Analysis and Design of Robot Manipulators: A Statistical Approach", 11th IFAC World Congress, Tallinn, URSS, 1990.
- [2.31] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L. Martins de Carvalho e J.A. Tenreiro Machado, "The Statistical Study of Robot Manipulators", Fifth IEEE International Symposium on Intelligent Control, Philadelphia, USA, 1990.
- [2.32] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "On the Analysis and Design of Robotic Manipulators: A Statistical Perspective", IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, Yokohama, Japão, 1990.
- [2.33] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "On the Analysis of Muscle-Actuated Manipulators", Fifth International Conference on Advanced Robotics, Pisa, Itália, 1991.

## APÊNDICE 1. Cinemática do Robot Puma

### *Cinemática Directa*

Transformação homogénea - Representação de Denavit-Hartenberg:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_0^1 \cdot \mathbf{A}_1^2 \cdot \mathbf{A}_2^3 \cdot \mathbf{A}_3^4 \cdot \mathbf{A}_4^5 \cdot \mathbf{A}_5^6 = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n_x &= C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1[S_4C_5C_6 + C_4S_6] \\ n_y &= S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + C_1[S_4C_5C_6 + C_4S_6] \\ n_z &= -S_{23}[C_4C_5C_6 - S_4S_6] - C_{23}S_5C_6 \\ s_x &= C_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - S_1[-S_4C_5S_6 + C_4C_6] \\ s_y &= S_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + C_1[-S_4C_5S_6 + C_4C_6] \\ s_z &= S_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_{23}S_5S_6 \\ a_x &= C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5 \\ a_y &= S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5 \\ a_z &= -S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5 \\ p_x &= C_1(d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_2C_2) - S_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\ p_y &= S_1(d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_2C_2) + C_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\ p_z &= d_6(C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5) + C_{23}d_4 - a_2S_2 \end{aligned}$$

### *Cinemática Inversa*

$$q_1 = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{\pm p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - d_2 p_x}{\pm p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + d_2 p_y} \right)$$

$$q_2 = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{-(p_z(a_2 + d_4 S_3) + (d_4 C_3) (\pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}))}{p_z(d_4 C_3) - (a_2 + d_4 S_3) (\pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2})} \right)$$

$$q_3 = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_4^2 - a_2^2 - d_2^2}{\pm \sqrt{4d_4^2 a_2^2 - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_4^2 - a_2^2 - d_2^2)^2}} \right)$$

$$q_4 = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{C_1 a_y - S_1 a_x}{C_1 C_{23} a_x + S_1 C_{23} a_y - S_{23} a_z} \right)$$

$$q_5 = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z} \right)$$

$$q_6 = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) n_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) n_y + (S_4 S_{23}) n_z}{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) s_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) s_y + (S_4 S_{23}) s_z} \right)$$

onde:

$$-180^\circ \leq q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 \leq 180^\circ$$

- Caso degenerado ( $q_5 \approx 0$ ),  $q_4 =$  valor corrente de  $q_4$  ou 0 e  $(q_4 + q_6) =$  ângulo total requerido para alinhar a orientação.
- Para uma dada configuração do braço,  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$  é um conjunto de soluções e  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4 + \pi, -q_5, q_6 + \pi]^T$  é outro conjunto de soluções.

*Coefficientes Inerciais*

$$\begin{aligned}
 D[1,1]= & 2a_3d_4m_6C_{23}S_{23}+2a_2d_4m_6C_2S_{23}+d_4^2m_6S_{23}^2+2a_2a_3m_6C_2C_{23}+a_2^2m_6C_2^2+ \\
 & +d_3^2m_6+a_3^2m_6C_{23}^2+J_{6zz}S_4^2S_5^2+J_{6zz}C_5^2S_{23}^2+2J_{6zz}C_{23}C_4C_5S_{23}S_5+ \\
 & +J_{6zz}C_{23}^2C_4^2S_5^2+2a_3m_6r_{6z}C_{23}C_5S_{23}+2a_3m_6r_{6z}C_{23}^2C_4S_5+ \\
 & +2a_2m_6r_{6z}C_2C_5S_{23}+2a_2m_6r_{6z}C_2C_{23}C_4S_5+2d_4m_6r_{6z}C_5S_{23}^2+ \\
 & +2d_4m_6r_{6z}C_{23}C_4S_{23}S_5+2d_3m_6r_{6z}S_4S_5+J_{6yy}C_4^2C_6^2+J_{6yy}C_5^2S_4^2S_6^2+ \\
 & +J_{6yy}S_{23}^2S_5^2S_6^2-2J_{6yy}C_{23}C_6S_{23}S_4S_5S_6+J_{6yy}C_{23}^2C_6^2S_4^2- \\
 & -2J_{6yy}C_{23}C_4C_5S_{23}S_5S_6^2-2J_{6yy}C_4C_5C_6S_{23}^2S_4S_6+J_{6yy}C_{23}^2C_4^2C_5^2S_6^2+ \\
 & +J_{6xx}C_4^2S_6^2+J_{6xx}C_{23}^2S_4^2S_6^2+2J_{6xx}C_{23}C_6S_{23}S_4S_5S_6+J_{6xx}C_6^2S_{23}^2S_5^2+ \\
 & +J_{6xx}C_5^2C_6^2S_4^2+2J_{6xx}C_4C_5C_6S_{23}^2S_4S_6-2J_{6xx}C_{23}C_4C_5C_6^2S_{23}S_5+ \\
 & +J_{6xx}C_{23}^2C_4^2C_5^2C_6^2+2a_3d_4m_4C_{23}S_{23}+2a_2d_4m_4C_2S_{23}+d_4^2m_4S_{23}^2+ \\
 & +2a_2a_3m_4C_2C_{23}+a_2^2m_4C_2^2+d_3^2m_4+a_3^2m_4C_{23}^2+J_{4zz}C_4^2+J_{4zz}C_{23}^2S_4^2+ \\
 & +J_{4yy}S_{23}^2-2a_3m_4r_{4y}C_{23}S_{23}-2a_2m_4r_{4y}C_2S_{23}-2d_4m_4r_{4y}S_{23}^2+J_{4xx}S_4^2+ \\
 & +J_{4xx}C_{23}^2C_4^2+a_2^2m_2C_2^2+J_{2zz}+J_{2yy}S_2^2+2a_2m_2r_{2x}C_2^2+J_{2xx}C_2^2+J_{1xx}+J_{1zz}+ \\
 & +J_{3xx}C_{23}^2+J_{3yy}+2a_3m_3r_{3z}C_{23}S_{23}+2a_2m_3r_{3z}C_2S_{23}+J_{3zz}S_{23}^2+a_2^2m_3C_2^2+ \\
 & +d_3^2m_3+a_3^2m_3C_{23}^2+2a_2a_3m_3C_2C_{23}+J_{5xx}C_{23}^2C_4^2C_5^2- \\
 & -2J_{5xx}C_{23}C_4C_5S_{23}S_5+J_{5xx}C_5^2S_4^2+J_{5xx}S_{23}^2S_5^2+J_{5yy}C_{23}^2S_4^2+J_{5yy}C_4^2+ \\
 & +2d_3m_5r_{5z}S_4S_5+2d_4m_5r_{5z}C_{23}C_4S_{23}S_5+2d_4m_5r_{5z}C_5S_{23}^2+ \\
 & +2a_2m_5r_{5z}C_2C_{23}C_4S_5+2a_2m_5r_{5z}C_2C_5S_{23}+2a_3m_5r_{5z}C_{23}^2C_4S_5+ \\
 & +2a_3m_5r_{5z}C_{23}C_5S_{23}+J_{5zz}C_{23}^2C_4^2S_5^2+2J_{5zz}C_{23}C_4C_5S_{23}S_5+J_{5zz}C_5^2S_{23}^2+ \\
 & +J_{5zz}S_4^2S_5^2+a_3^2m_5C_{23}^2+d_3^2m_5+a_2^2m_5C_2^2+2a_2a_3m_5C_2C_{23}+d_4^2m_5S_{23}^2+ \\
 & +2a_2d_4m_5C_2S_{23}+2a_3d_4m_5C_{23}S_{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D[1,2]= & -d_3m_6r_{6z}C_{23}C_5+d_3m_6r_{6z}C_4S_{23}S_5+a_3d_3m_6S_{23}+a_2d_3m_6S_2-d_3d_4m_6C_{23}- \\
 & -J_{6zz}C_{23}C_5S_4S_5+J_{6zz}C_4S_{23}S_4S_5^2+a_3m_6r_{6z}S_{23}S_4S_5+a_2m_6r_{6z}S_2S_4S_5- \\
 & -d_4m_6r_{6z}C_{23}S_4S_5-J_{6yy}C_{23}C_4C_6S_5S_6-J_{6yy}C_4C_6^2S_{23}S_4+J_{6yy}C_{23}C_5S_4S_5S_6^2+ \\
 & +J_{6yy}C_5C_6S_{23}S_6-2J_{6yy}C_4^2C_5C_6S_{23}S_6+J_{6yy}C_4C_5^2S_{23}S_4S_6^2- \\
 & -J_{6xx}C_4S_{23}S_4S_6^2+J_{6xx}C_{23}C_4C_6S_5S_6+J_{6xx}C_{23}C_5C_6^2S_4S_5-J_{6xx}C_5C_6S_{23}S_6+ \\
 & +2J_{6xx}C_4^2C_5C_6S_{23}S_6+J_{6xx}C_4C_5^2C_6^2S_{23}S_4+d_3m_4r_{4y}C_{23}+a_3d_3m_4S_{23}+ \\
 & +a_2d_3m_4S_2-d_3d_4m_4C_{23}-J_{4zz}C_4S_{23}S_4+J_{4xx}C_4S_{23}S_4+a_2m_2r_{2z}S_2+a_3d_3m_3S_{23}+ \\
 & +a_2d_3m_3S_2-d_3m_3r_{3z}C_{23}+J_{5xx}C_4C_5^2S_{23}S_4+J_{5xx}C_{23}C_5S_4S_5-J_{5yy}C_4S_{23}S_4- \\
 & -d_4m_5r_{5z}C_{23}S_4S_5+a_2m_5r_{5z}S_2S_4S_5+a_3m_5r_{5z}S_{23}S_4S_5+J_{5zz}C_4S_{23}S_4S_5^2- \\
 & -J_{5zz}C_{23}C_5S_4S_5-d_3d_4m_5C_{23}+a_2d_3m_5S_2+a_3d_3m_5S_{23}+d_3m_5r_{5z}C_4S_{23}S_5- \\
 & -d_3m_5r_{5z}C_{23}C_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D[2,2]= & 2a_2d_4m_6S_3+d_4^2m_6+2a_2a_3m_6C_3+a_2^2m_6+a_3^2m_6+J_{6zz}C_5^2+J_{6zz}C_4^2S_5^2+ \\
 & +2a_3m_6r_{6z}C_4S_5+2a_2m_6r_{6z}C_5S_3+2a_2m_6r_{6z}C_3C_4S_5+2d_4m_6r_{6z}C_5+ \\
 & +J_{6yy}S_5^2S_6^2+J_{6yy}C_6^2S_4^2+2J_{6yy}C_4C_5C_6S_4S_6+J_{6yy}C_4^2C_5^2S_6^2+J_{6xx}S_4^2S_6^2+ \\
 & +J_{6xx}C_6^2S_5^2-2J_{6xx}C_4C_5C_6S_4S_6+J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6^2+2a_2d_4m_4S_3+d_4^2m_4+ \\
 & +2a_2a_3m_4C_3+a_2^2m_4+a_3^2m_4+J_{4zz}S_4^2+J_{4yy}-2a_2m_4r_{4y}S_3-2d_4m_4r_{4y}+J_{4xx}C_4^2+ \\
 & +a_2^2m_2+J_{2yy}+2a_2m_2r_{2x}+J_{2xx}+J_{3xx}+2a_2m_3r_{3z}S_3+J_{3zz}+a_2^2m_3+a_3^2m_3+ \\
 & +2a_2a_3m_3C_3+J_{5xx}C_4^2C_5^2+J_{5xx}S_5^2+J_{5yy}S_4^2+2d_4m_5r_{5z}C_5+ \\
 & +2a_2m_5r_{5z}C_3C_4S_5+2a_2m_5r_{5z}C_5S_3+2a_3m_5r_{5z}C_4S_5+J_{5zz}C_4^2S_5^2+J_{5zz}C_5^2+
 \end{aligned}$$



$$+a_3^2m_5+a_2^2m_5+2a_2a_3m_5C_3+d_4^2m_5+2a_2d_4m_5S_3$$

$$\begin{aligned} D[1,3]= & -d_3m_6r_{6z}C_{23}C_5+d_3m_6r_{6z}C_4S_{23}S_5+a_3d_3m_6S_{23}-d_3d_4m_6C_{23}-J_{6zz}C_{23}C_5S_4S_5+ \\ & +J_{6zz}C_4S_{23}S_4S_5^2+a_3m_6r_{6z}S_{23}S_4S_5-d_4m_6r_{6z}C_{23}S_4S_5-J_{6yy}C_{23}C_4C_6S_5S_6- \\ & -J_{6yy}C_4C_6^2S_{23}S_4+J_{6yy}C_{23}C_5S_4S_5S_6^2+J_{6yy}C_5C_6S_{23}S_6- \\ & -2J_{6yy}C_4^2C_5C_6S_{23}S_6+J_{6yy}C_4C_5^2S_{23}S_4S_6^2-J_{6xx}C_4S_{23}S_4S_6^2+ \\ & +J_{6xx}C_{23}C_4C_6S_5S_6+J_{6xx}C_{23}C_5C_6^2S_4S_5-J_{6xx}C_5C_6S_{23}S_6+ \\ & +2J_{6xx}C_4^2C_5C_6S_{23}S_6+J_{6xx}C_4C_5^2C_6^2S_{23}S_4+d_3m_4r_{4y}C_{23}+a_3d_3m_4S_{23}- \\ & -d_3d_4m_4C_{23}-J_{4zz}C_4S_{23}S_4+J_{4xx}C_4S_{23}S_4+a_3d_3m_3S_{23}-d_3m_3r_{3z}C_{23}+ \\ & +J_{5xx}C_4C_5^2S_{23}S_4+J_{5xx}C_{23}C_5S_4S_5-J_{5yy}C_4S_{23}S_4-d_4m_5r_{5z}C_{23}S_4S_5+ \\ & +a_3m_5r_{5z}S_{23}S_4S_5+J_{5zz}C_4S_{23}S_4S_5^2-J_{5zz}C_{23}C_5S_4S_5-d_3d_4m_5C_{23}+ \\ & +a_3d_3m_5S_{23}+d_3m_5r_{5z}C_4S_{23}S_5-d_3m_5r_{5z}C_{23}C_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[2,3]= & d_4^2m_6+a_2m_6r_{6z}C_5S_3+a_2m_6r_{6z}C_3C_4S_5+a_2a_3m_6C_3+a_2d_4m_6S_3+a_3^2m_6+ \\ & +J_{6zz}C_5^2+J_{6zz}C_4^2S_5^2+2a_3m_6r_{6z}C_4S_5+2d_4m_6r_{6z}C_5+J_{6yy}S_5^2S_6^2+ \\ & +J_{6yy}C_6^2S_4^2+2J_{6yy}C_4C_5C_6S_4S_6+J_{6yy}C_4^2C_5^2S_6^2+J_{6xx}S_4^2S_6^2+ \\ & +J_{6xx}C_6^2S_5^2-2J_{6xx}C_4C_5C_6S_4S_6+J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6^2+d_4^2m_4-a_2m_4r_{4y}S_3+ \\ & +a_2a_3m_4C_3+a_2d_4m_4S_3+a_3^2m_4+J_{4zz}S_4^2+J_{4yy}-2d_4m_4r_{4y}+J_{4xx}C_4^2+J_{3xx}+ \\ & +J_{3zz}+a_2a_3m_3C_3+a_2m_3r_{3z}S_3+a_3^2m_3+J_{5xx}C_4^2C_5^2+J_{5xx}S_5^2+J_{5yy}S_4^2+ \\ & +2d_4m_5r_{5z}C_5+2a_3m_5r_{5z}C_4S_5+J_{5zz}C_4^2S_5^2+J_{5zz}C_5^2+a_3^2m_5+a_2d_4m_5S_3+ \\ & +a_2a_3m_5C_3+a_2m_5r_{5z}C_3C_4S_5+a_2m_5r_{5z}C_5S_3+d_4^2m_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[3,3]= & d_4^2m_6+a_3^2m_6+J_{6zz}C_5^2+J_{6zz}C_4^2S_5^2+2a_3m_6r_{6z}C_4S_5+2d_4m_6r_{6z}C_5+ \\ & +J_{6yy}S_5^2S_6^2+J_{6yy}C_6^2S_4^2+2J_{6yy}C_4C_5C_6S_4S_6+J_{6yy}C_4^2C_5^2S_6^2+J_{6xx}S_4^2S_6^2+ \\ & +J_{6xx}C_6^2S_5^2-2J_{6xx}C_4C_5C_6S_4S_6+J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6^2+d_4^2m_4+a_3^2m_4+J_{4zz}S_4^2+ \\ & +J_{4yy}-2d_4m_4r_{4y}+J_{4xx}C_4^2+J_{3xx}+J_{3zz}+a_3^2m_3+J_{5xx}C_4^2C_5^2+J_{5xx}S_5^2+J_{5yy}S_4^2+ \\ & +2d_4m_5r_{5z}C_5+2a_3m_5r_{5z}C_4S_5+J_{5zz}C_4^2S_5^2+J_{5zz}C_5^2+a_3^2m_5+d_4^2m_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[1,4]= & d_4m_6r_{6z}C_4S_{23}S_5+a_2m_6r_{6z}C_2C_4S_5+d_3m_6r_{6z}C_{23}S_4S_5+a_3m_6r_{6z}C_{23}C_4S_5+ \\ & +J_{6zz}C_4C_5S_{23}S_5+J_{6zz}C_{23}S_5^2-J_{6yy}C_6S_{23}S_4S_5S_6+J_{6yy}C_{23}C_6^2- \\ & -J_{6yy}C_4C_5S_{23}S_5S_6^2+J_{6yy}C_{23}C_5^2S_6^2+J_{6xx}C_{23}S_6^2+J_{6xx}C_6S_{23}S_4S_5S_6- \\ & -J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_{23}S_5+J_{6xx}C_{23}C_5^2C_6^2+J_{4zz}C_{23}+J_{4xx}C_{23}+J_{5xx}C_{23}C_5^2- \\ & -J_{5xx}C_4C_5S_{23}S_5+J_{5yy}C_{23}+J_{5zz}C_{23}S_5^2+J_{5zz}C_4C_5S_{23}S_5+a_3m_5r_{5z}C_{23}C_4S_5+ \\ & +d_3m_5r_{5z}C_{23}S_4S_5+a_2m_5r_{5z}C_2C_4S_5+d_4m_5r_{5z}C_4S_{23}S_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[2,4]= & -d_4m_6r_{6z}S_4S_5-a_2m_6r_{6z}S_3S_4S_5-J_{6zz}C_5S_4S_5-J_{6yy}C_4C_6S_5S_6+J_{6yy}C_5S_4S_5S_6^2+ \\ & +J_{6xx}C_4C_6S_5S_6+J_{6xx}C_5C_6^2S_4S_5+J_{5xx}C_5S_4S_5-J_{5zz}C_5S_4S_5-a_2m_5r_{5z}S_3S_4S_5- \\ & -d_4m_5r_{5z}S_4S_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[3,4]= & -d_4m_6r_{6z}S_4S_5-J_{6zz}C_5S_4S_5-J_{6yy}C_4C_6S_5S_6+J_{6yy}C_5S_4S_5S_6^2+J_{6xx}C_4C_6S_5S_6+ \\ & +J_{6xx}C_5C_6^2S_4S_5+J_{5xx}C_5S_4S_5-J_{5zz}C_5S_4S_5-d_4m_5r_{5z}S_4S_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[4,4]= & J_{6zz}S_5^2+J_{6yy}C_6^2+J_{6yy}C_5^2S_6^2+J_{6xx}S_6^2+J_{6xx}C_5^2C_6^2+J_{4zz}+J_{4xx}+J_{5xx}C_5^2+ \\ & +J_{5yy}+J_{5zz}S_5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[1,5]= & d_4m_6r_{6z}C_5S_{23}S_4+a_2m_6r_{6z}C_2C_5S_4+d_3m_6r_{6z}S_{23}S_5-d_3m_6r_{6z}C_{23}C_4C_5+ \\ & +a_3m_6r_{6z}C_{23}C_5S_4+J_{6zz}S_{23}S_4-J_{6yy}C_4C_5C_6S_{23}S_6+J_{6yy}S_{23}S_4S_6^2- \end{aligned}$$

$$-J_{6yy}C_{23}C_6S_5S_6+J_{6xx}C_4C_5C_6S_{23}S_6+J_{6xx}C_{23}C_6S_5S_6+J_{6xx}C_6^2S_{23}S_4+ \\ +J_{5xx}S_{23}S_4+J_{5zz}S_{23}S_4+a_3m_5r_{5z}C_{23}C_5S_4-d_3m_5r_{5z}C_{23}C_4C_5+d_3m_5r_{5z}S_{23}S_5+ \\ +a_2m_5r_{5z}C_2C_5S_4+d_4m_5r_{5z}C_5S_{23}S_4$$

$$D[2,5]=d_4m_6r_{6z}C_4C_5+a_2m_6r_{6z}C_3S_5+a_2m_6r_{6z}C_4C_5S_3+a_3m_6r_{6z}S_5+J_{6zz}C_4+ \\ +J_{6yy}C_5C_6S_4S_6+J_{6yy}C_4S_6^2-J_{6xx}C_5C_6S_4S_6+J_{6xx}C_4C_6^2+J_{5xx}C_4+ \\ +J_{5zz}C_4+a_3m_5r_{5z}S_5+a_2m_5r_{5z}C_4C_5S_3+a_2m_5r_{5z}C_3S_5+d_4m_5r_{5z}C_4C_5$$

$$D[3,5]=d_4m_6r_{6z}C_4C_5+a_3m_6r_{6z}S_5+J_{6zz}C_4+J_{6yy}C_5C_6S_4S_6+J_{6yy}C_4S_6^2- \\ -J_{6xx}C_5C_6S_4S_6+J_{6xx}C_4C_6^2+J_{5xx}C_4+J_{5zz}C_4+a_3m_5r_{5z}S_5+d_4m_5r_{5z}C_4C_5$$

$$D[4,5]=-J_{6yy}C_6S_5S_6+J_{6xx}C_6S_5S_6$$

$$D[5,5]=J_{6zz}+J_{6yy}S_6^2+J_{6xx}C_6^2+J_{5xx}+J_{5zz}$$

$$D[1,6]=-J_{6yy}C_4S_{23}S_5+J_{6yy}C_{23}C_5-J_{6xx}C_4S_{23}S_5+J_{6xx}C_{23}C_5$$

$$D[2,6]=J_{6yy}S_4S_5+J_{6xx}S_4S_5$$

$$D[3,6]=J_{6yy}S_4S_5+J_{6xx}S_4S_5$$

$$D[4,6]=J_{6yy}C_5+J_{6xx}C_5$$

$$D[6,6]=J_{6yy}+J_{6xx}$$

### *Coefficientes Coriolis/Centrípetos*

$$C_1[1,2]=2d_4m_6r_{6z}C_{23}C_5S_{23}-d_4m_6r_{6z}C_4S_5+2d_4m_6r_{6z}C_{23}^2C_4S_5-a_3d_4m_6+ \\ +2a_3d_4m_6C_{23}^2+a_2d_4m_6C_{23}+d_4^2m_6C_{23}S_{23}+a_2m_6r_{6z}C_{223}C_5- \\ -a_2m_6r_{6z}C_4S_{223}S_5-a_2a_3m_6S_{223}-a_2^2m_6C_2S_2-a_3m_6r_{6z}C_5+2a_3m_6r_{6z}C_{23}^2C_5- \\ -2a_3m_6r_{6z}C_{23}C_4S_{23}S_5-a_3^2m_6C_{23}S_{23}+J_{6zz}C_{23}^2C_5^2S_{23}-J_{6zz}C_4C_5S_5+ \\ +2J_{6zz}C_{23}^2C_4C_5S_5-J_{6zz}C_{23}C_4^2S_{23}S_5^2+J_{6yy}C_{23}S_{23}S_5^2S_6^2- \\ -J_{6yy}C_{23}C_6^2S_{23}S_4^2+J_{6yy}C_6S_4S_5S_6-2J_{6yy}C_{23}^2C_6S_4S_5S_6- \\ -2J_{6yy}C_{23}C_4C_5C_6S_{23}S_4S_6+J_{6yy}C_4C_5S_5S_6^2-2J_{6yy}C_{23}^2C_4C_5S_5S_6^2- \\ -J_{6yy}C_{23}C_4^2C_5^2S_{23}S_6^2-J_{6xx}C_{23}S_{23}S_4^2S_6^2+J_{6xx}C_{23}C_6^2S_{23}S_5^2- \\ -J_{6xx}C_6S_4S_5S_6+2J_{6xx}C_{23}^2C_6S_4S_5S_6+2J_{6xx}C_{23}C_4C_5C_6S_{23}S_4S_6+ \\ +J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_5-2J_{6xx}C_{23}^2C_4C_5C_6^2S_5-J_{6xx}C_{23}C_4^2C_5^2C_6^2S_{23}- \\ -a_3d_4m_4+2a_3d_4m_4C_{23}^2+a_2d_4m_4C_{223}+d_4^2m_4C_{23}S_{23}-a_2m_4r_{4y}C_{223}- \\ -a_2a_3m_4S_{223}-a_2^2m_4C_2S_2+a_3m_4r_{4y}-2a_3m_4r_{4y}C_{23}^2-a_3^2m_4C_{23}S_{23}- \\ -J_{4zz}C_{23}S_{23}S_4^2+J_{4yy}C_{23}S_{23}-2d_4m_4r_{4y}C_{23}S_{23}-J_{4xx}C_{23}C_4^2S_{23}- \\ -a_2^2m_2C_2S_2+J_{2yy}C_2S_2-2a_2m_2r_{2x}C_2S_2-J_{2xx}C_2S_2-J_{3xx}C_{23}S_{23}+J_{3zz}C_{23}S_{23}- \\ -a_2^2m_3C_2S_2+a_2m_3r_{3z}C_{223}-a_3^2m_3C_{23}S_{23}-a_2a_3m_3S_{223}+2a_3m_3r_{3z}C_{23}^2- \\ -a_3m_3r_{3z}-J_{5xx}C_{23}C_4^2C_5^2S_{23}-2J_{5xx}C_{23}^2C_4C_5S_5+J_{5xx}C_4C_5S_5+ \\ +J_{5xx}C_{23}S_{23}S_5^2-J_{5yy}C_{23}S_{23}S_4^2-J_{5zz}C_{23}C_4^2S_{23}S_5^2+2J_{5zz}C_{23}^2C_4C_5S_5- \\ -J_{5zz}C_4C_5S_5+J_{5zz}C_{23}C_5^2S_{23}-a_3^2m_5C_{23}S_{23}-2a_3m_5r_{5z}C_{23}C_4S_{23}S_5+ \\ +2a_3m_5r_{5z}C_{23}^2C_5-a_3m_5r_{5z}C_5-a_2^2m_5C_2S_2-a_2a_3m_5S_{223}-a_2m_5r_{5z}C_4S_{223}S_5+$$

$$+a_2m_5r_{5z}C_{223}C_5+d_4^2m_5C_{23}S_{23}+a_2d_4m_5C_{223}+2a_3d_4m_5C_{23}^2-a_3d_4m_5+2d_4m_5r_{5z}C_{23}^2C_4S_5-d_4m_5r_{5z}C_4S_5+2d_4m_5r_{5z}C_{23}C_5S_{23}$$

$$C_1[2,2]=d_4m_6r_{6z}S_{23}S_4S_5+d_3d_4m_6S_{23}+a_2m_6r_{6z}C_2S_4S_5+a_2d_3m_6C_2+ \\ +a_3m_6r_{6z}C_{23}S_4S_5+a_3d_3m_6C_{23}+J_{6zz}C_5S_{23}S_4S_5+J_{6zz}C_{23}C_4S_4S_5^2+ \\ +d_3m_6r_{6z}C_5S_{23}+d_3m_6r_{6z}C_{23}C_4S_5+J_{6yy}C_4C_6S_{23}S_5S_6-J_{6yy}C_{23}C_4C_6^2S_4- \\ -J_{6yy}C_5S_{23}S_4S_5S_6^2+J_{6yy}C_{23}C_5C_6S_6-2J_{6yy}C_{23}C_4^2C_5C_6S_6+ \\ +J_{6yy}C_{23}C_4C_5^2S_4S_6^2-J_{6xx}C_{23}C_4S_4S_6^2-J_{6xx}C_4C_6S_{23}S_5S_6- \\ -J_{6xx}C_5C_6^2S_{23}S_4S_5-J_{6xx}C_{23}C_5C_6S_6+2J_{6xx}C_{23}C_4^2C_5C_6S_6+ \\ +J_{6xx}C_{23}C_4C_5^2C_6^2S_4+d_3d_4m_4S_{23}+a_2d_3m_4C_2+a_3d_3m_4C_{23}-J_{4zz}C_{23}C_4S_4- \\ -d_3m_4r_{4y}S_{23}+J_{4xx}C_{23}C_4S_4+a_2m_2r_{2z}C_2+d_3m_3r_{3z}S_{23}+a_2d_3m_3C_2+ \\ +a_3d_3m_3C_{23}+J_{5xx}C_{23}C_4C_5^2S_4-J_{5xx}C_5S_{23}S_4S_5-J_{5yy}C_{23}C_4S_4+ \\ +d_3m_5r_{5z}C_{23}C_4S_5+d_3m_5r_{5z}C_5S_{23}+J_{5zz}C_{23}C_4S_4S_5^2+J_{5zz}C_5S_{23}S_4S_5+ \\ +a_3d_3m_5C_{23}+a_3m_5r_{5z}C_{23}S_4S_5+a_2d_3m_5C_2+a_2m_5r_{5z}C_2S_4S_5+d_3d_4m_5S_{23}+ \\ +d_4m_5r_{5z}S_{23}S_4S_5$$

$$C_1[1,3]=2d_4m_6r_{6z}C_{23}C_5S_{23}-d_4m_6r_{6z}C_4S_5+2d_4m_6r_{6z}C_{23}^2C_4S_5-a_3d_4m_6+ \\ +2a_3d_4m_6C_{23}^2+a_2d_4m_6C_2C_{23}+d_4^2m_6C_{23}S_{23}-a_3m_6r_{6z}C_5+2a_3m_6r_{6z}C_{23}^2C_5- \\ -2a_3m_6r_{6z}C_{23}C_4S_{23}S_5-a_3^2m_6C_{23}S_{23}-a_2a_3m_6C_2S_{23}+J_{6zz}C_{23}C_5^2S_{23}- \\ -J_{6zz}C_4C_5S_5+2J_{6zz}C_{23}^2C_4C_5S_5-J_{6zz}C_{23}C_4^2S_{23}S_5^2+a_2m_6r_{6z}C_2C_{23}C_5- \\ -a_2m_6r_{6z}C_2C_4S_{23}S_5+J_{6yy}C_{23}S_{23}S_5^2S_6^2-J_{6yy}C_{23}C_6^2S_{23}S_4^2+J_{6yy}C_6S_4S_5S_6- \\ -2J_{6yy}C_{23}^2C_6S_4S_5S_6-2J_{6yy}C_{23}C_4C_5C_6S_{23}S_4S_6+J_{6yy}C_4C_5S_5S_6^2- \\ -2J_{6yy}C_{23}^2C_4C_5S_5S_6^2-J_{6yy}C_{23}C_4^2C_5^2S_{23}S_6^2-J_{6xx}C_{23}S_{23}S_4^2S_6^2+ \\ +J_{6xx}C_{23}C_6^2S_{23}S_5^2-J_{6xx}C_6S_4S_5S_6+2J_{6xx}C_{23}^2C_6S_4S_5S_6+ \\ +2J_{6xx}C_{23}C_4C_5C_6S_{23}S_4S_6+J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_5-2J_{6xx}C_{23}^2C_4C_5C_6^2S_5- \\ -J_{6xx}C_{23}C_4^2C_5^2C_6^2S_{23}-a_3d_4m_4+2a_3d_4m_4C_{23}^2+a_2d_4m_4C_2C_{23}+ \\ +d_4^2m_4C_{23}S_{23}+a_3m_4r_{4y}-2a_3m_4r_{4y}C_{23}^2-a_3^2m_4C_{23}S_{23}-a_2a_3m_4C_2S_{23}- \\ -J_{4zz}C_{23}S_{23}S_4^2+J_{4yy}C_{23}S_{23}-a_2m_4r_{4y}C_2C_{23}-2d_4m_4r_{4y}C_{23}S_{23}- \\ -J_{4xx}C_{23}C_4^2S_{23}-J_{3xx}C_{23}S_{23}+a_2m_3r_{3z}C_2C_{23}+J_{3zz}C_{23}S_{23}-a_3^2m_3C_{23}S_{23}- \\ -a_2a_3m_3C_2S_{23}+2a_3m_3r_{3z}C_{23}^2-a_3m_3r_{3z}-J_{5xx}C_{23}C_4^2C_5^2S_{23}- \\ -2J_{5xx}C_{23}^2C_4C_5S_5+J_{5xx}C_4C_5S_5+J_{5xx}C_{23}S_{23}S_5^2-J_{5yy}C_{23}S_{23}S_4^2- \\ -a_2m_5r_{5z}C_2C_4S_{23}S_5+a_2m_5r_{5z}C_2C_{23}C_5-J_{5zz}C_{23}C_4^2S_{23}S_5^2+ \\ +2J_{5zz}C_{23}^2C_4C_5S_5-J_{5zz}C_4C_5S_5+J_{5zz}C_{23}C_5^2S_{23}-a_2a_3m_5C_2S_{23}- \\ -a_3^2m_5C_{23}S_{23}-2a_3m_5r_{5z}C_{23}C_4S_{23}S_5+2a_3m_5r_{5z}C_{23}^2C_5-a_3m_5r_{5z}C_5+ \\ +d_4^2m_5C_{23}S_{23}+a_2d_4m_5C_2C_{23}+2a_3d_4m_5C_{23}^2-a_3d_4m_5+2d_4m_5r_{5z}C_{23}^2C_4S_5- \\ -d_4m_5r_{5z}C_4S_5+2d_4m_5r_{5z}C_{23}C_5S_{23}$$

$$C_1[2,3]=d_4m_6r_{6z}S_{23}S_4S_5+d_3d_4m_6S_{23}+a_3m_6r_{6z}C_{23}S_4S_5+a_3d_3m_6C_{23}+ \\ +J_{6zz}C_5S_{23}S_4S_5+J_{6zz}C_{23}C_4S_4S_5^2+d_3m_6r_{6z}C_5S_{23}+d_3m_6r_{6z}C_{23}C_4S_5+ \\ +J_{6yy}C_4C_6S_{23}S_5S_6-J_{6yy}C_{23}C_4C_6^2S_4-J_{6yy}C_5S_{23}S_4S_5S_6^2+J_{6yy}C_{23}C_5C_6S_6- \\ -2J_{6yy}C_{23}C_4^2C_5C_6S_6+J_{6yy}C_{23}C_4C_5^2S_4S_6^2-J_{6xx}C_{23}C_4S_4S_6^2- \\ -J_{6xx}C_4C_6S_{23}S_5S_6-J_{6xx}C_5C_6^2S_{23}S_4S_5-J_{6xx}C_{23}C_5C_6S_6+ \\ +2J_{6xx}C_{23}C_4^2C_5C_6S_6+J_{6xx}C_{23}C_4C_5^2C_6^2S_4+d_3d_4m_4S_{23}+a_3d_3m_4C_{23}- \\ -J_{4zz}C_{23}C_4S_4-d_3m_4r_{4y}S_{23}+J_{4xx}C_{23}C_4S_4+d_3m_3r_{3z}S_{23}+a_3d_3m_3C_{23}+ \\ +J_{5xx}C_{23}C_4C_5^2S_4-J_{5xx}C_5S_{23}S_4S_5-J_{5yy}C_{23}C_4S_4+d_3m_5r_{5z}C_{23}C_4S_5+ \\ +d_3m_5r_{5z}C_5S_{23}+J_{5zz}C_{23}C_4S_4S_5^2+J_{5zz}C_5S_{23}S_4S_5+a_3d_3m_5C_{23}+ \\ +a_3m_5r_{5z}C_{23}S_4S_5+d_3d_4m_5S_{23}+d_4m_5r_{5z}S_{23}S_4S_5$$

$$\begin{aligned}
C_1[3,3]= & d_4 m_6 r_{6z} S_{23} S_4 S_5 + d_3 d_4 m_6 S_{23} + a_3 m_6 r_{6z} C_{23} S_4 S_5 + a_3 d_3 m_6 C_{23} + \\
& + J_{6zz} C_5 S_{23} S_4 S_5 + J_{6zz} C_{23} C_4 S_4 S_5^2 + d_3 m_6 r_{6z} C_5 S_{23} + d_3 m_6 r_{6z} C_{23} C_4 S_5 + \\
& + J_{6yy} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 - J_{6yy} C_{23} C_4 C_6^2 S_4 - J_{6yy} C_5 S_{23} S_4 S_5 S_6^2 + J_{6yy} C_{23} C_5 C_6 S_6 - \\
& - 2J_{6yy} C_{23} C_4^2 C_5 C_6 S_6 + J_{6yy} C_{23} C_4 C_5^2 S_4 S_6^2 - J_{6xx} C_{23} C_4 S_4 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 - J_{6xx} C_5 C_6^2 S_{23} S_4 S_5 - J_{6xx} C_{23} C_5 C_6 S_6 + \\
& + 2J_{6xx} C_{23} C_4^2 C_5 C_6 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_4 C_5^2 C_6^2 S_4 + d_3 d_4 m_4 S_{23} + a_3 d_3 m_4 C_{23} - \\
& - J_{4zz} C_{23} C_4 S_4 - d_3 m_4 r_{4y} S_{23} + J_{4xx} C_{23} C_4 S_4 + d_3 m_3 r_{3z} S_{23} + a_3 d_3 m_3 C_{23} + \\
& + J_{5xx} C_{23} C_4 C_5^2 S_4 - J_{5xx} C_5 S_{23} S_4 S_5 - J_{5yy} C_{23} C_4 S_4 + d_3 m_5 r_{5z} C_{23} C_4 S_5 + \\
& + d_3 m_5 r_{5z} C_5 S_{23} + J_{5zz} C_{23} C_4 S_4 S_5^2 + J_{5zz} C_5 S_{23} S_4 S_5 + a_3 d_3 m_5 C_{23} + \\
& + a_3 m_5 r_{5z} C_{23} S_4 S_5 + d_3 d_4 m_5 S_{23} + d_4 m_5 r_{5z} S_{23} S_4 S_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[1,4]= & -J_{6zz} C_{23} C_5 S_{23} S_4 S_5 + J_{6zz} C_4 S_{23}^2 S_4 S_5^2 - a_3 m_6 r_{6z} C_{23}^2 S_4 S_5 - \\
& - a_2 m_6 r_{6z} C_2 C_{23} S_4 S_5 - d_4 m_6 r_{6z} C_{23} S_{23} S_4 S_5 + d_3 m_6 r_{6z} C_4 S_5 - \\
& - J_{6yy} C_{23} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 - J_{6yy} C_4 C_6^2 S_{23}^2 S_4 + J_{6yy} C_{23} C_5 S_{23} S_4 S_5 S_6^2 + \\
& + J_{6yy} C_5 C_6 S_{23}^2 S_6 - 2J_{6yy} C_4^2 C_5 C_6 S_{23}^2 S_6 + J_{6yy} C_4 C_5^2 S_{23}^2 S_4 S_6^2 - \\
& - J_{6xx} C_4 S_{23}^2 S_4 S_6^2 + J_{6xx} C_{23} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_5 C_6^2 S_{23} S_4 S_5 - \\
& - J_{6xx} C_5 C_6 S_{23}^2 S_6 + 2J_{6xx} C_4^2 C_5 C_6 S_{23}^2 S_6 + J_{6xx} C_4 C_5^2 C_6^2 S_{23}^2 S_4 - \\
& - J_{4zz} C_4 S_{23}^2 S_4 + J_{4xx} C_4 S_{23}^2 S_4 + J_{5xx} C_4 C_5^2 S_{23}^2 S_4 + J_{5xx} C_{23} C_5 S_{23} S_4 S_5 - \\
& - J_{5yy} C_4 S_{23}^2 S_4 + d_3 m_5 r_{5z} C_4 S_5 - d_4 m_5 r_{5z} C_{23} S_{23} S_4 S_5 - a_2 m_5 r_{5z} C_2 C_{23} S_4 S_5 - \\
& - a_3 m_5 r_{5z} C_{23}^2 S_4 S_5 + J_{5zz} C_4 S_{23}^2 S_4 S_5^2 - J_{5zz} C_{23} C_5 S_{23} S_4 S_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[2,4]= & -J_{6zz} S_{23} S_4^2 S_5^2 - d_3 m_6 r_{6z} S_{23} S_4 S_5 - J_{6yy} C_4^2 C_6^2 S_{23} + 2J_{6yy} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 - \\
& - J_{6yy} C_5^2 S_{23} S_4^2 S_6^2 - J_{6xx} C_4^2 S_{23} S_6^2 - 2J_{6xx} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_5^2 C_6^2 S_{23} S_4^2 - J_{4zz} C_4^2 S_{23} - J_{4xx} S_{23} S_4^2 - J_{5xx} C_5^2 S_{23} S_4^2 - \\
& - J_{5yy} C_4^2 S_{23} - d_3 m_5 r_{5z} S_{23} S_4 S_5 - J_{5zz} S_{23} S_4^2 S_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[3,4]= & -J_{6zz} S_{23} S_4^2 S_5^2 - d_3 m_6 r_{6z} S_{23} S_4 S_5 - J_{6yy} C_4^2 C_6^2 S_{23} + 2J_{6yy} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 - \\
& - J_{6yy} C_5^2 S_{23} S_4^2 S_6^2 - J_{6xx} C_4^2 S_{23} S_6^2 - 2J_{6xx} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_5^2 C_6^2 S_{23} S_4^2 - J_{4zz} C_4^2 S_{23} - J_{4xx} S_{23} S_4^2 - J_{5xx} C_5^2 S_{23} S_4^2 - \\
& - J_{5yy} C_4^2 S_{23} - d_3 m_5 r_{5z} S_{23} S_4 S_5 - J_{5zz} S_{23} S_4^2 S_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[4,4]= & -J_{6zz} C_5 S_{23} S_4 S_5 - a_3 m_6 r_{6z} C_{23} S_4 S_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_2 S_4 S_5 - d_4 m_6 r_{6z} S_{23} S_4 S_5 + \\
& + d_3 m_6 r_{6z} C_{23} C_4 S_5 - J_{6yy} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 + J_{6yy} C_5 S_{23} S_4 S_5 S_6^2 + \\
& + J_{6xx} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 + J_{6xx} C_5 C_6^2 S_{23} S_4 S_5 + J_{5xx} C_5 S_{23} S_4 S_5 + d_3 m_5 r_{5z} C_{23} C_4 S_5 - \\
& - d_4 m_5 r_{5z} S_{23} S_4 S_5 - a_2 m_5 r_{5z} C_2 S_4 S_5 - a_3 m_5 r_{5z} C_{23} S_4 S_5 - J_{5zz} C_5 S_{23} S_4 S_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[1,5]= & J_{6zz} C_5 S_4^2 S_5 - J_{6zz} C_5 S_{23}^2 S_5 - J_{6zz} C_{23} C_4 S_{23} + 2J_{6zz} C_{23} C_4 C_5^2 S_{23} + \\
& + J_{6zz} C_{23}^2 C_4^2 C_5 S_5 - a_3 m_6 r_{6z} C_{23} S_{23} S_5 + a_3 m_6 r_{6z} C_{23}^2 C_4 C_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_2 S_{23} S_5 + \\
& + a_2 m_6 r_{6z} C_2 C_{23} C_4 C_5 - d_4 m_6 r_{6z} S_{23}^2 S_5 + d_4 m_6 r_{6z} C_{23} C_4 C_5 S_{23} + d_3 m_6 r_{6z} C_5 S_4 - \\
& - J_{6yy} C_5 S_4^2 S_5 S_6^2 + J_{6yy} C_5 S_{23}^2 S_5 S_6^2 - J_{6yy} C_{23} C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 + \\
& + J_{6yy} C_{23} C_4 S_{23} S_6^2 + J_{6yy} C_4 C_6 S_{23}^2 S_4 S_5 S_6 - 2J_{6yy} C_{23} C_4 C_5^2 S_{23} S_6^2 - \\
& - J_{6yy} C_{23}^2 C_4^2 C_5 S_5 S_6^2 + J_{6xx} C_{23} C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 + J_{6xx} C_5 C_6^2 S_{23}^2 S_5 - \\
& - J_{6xx} C_5 C_6^2 S_4^2 S_5 - J_{6xx} C_4 C_6 S_{23}^2 S_4 S_5 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_4 C_6^2 S_{23} - \\
& - 2J_{6xx} C_{23} C_4 C_5^2 C_6^2 S_{23} - J_{6xx} C_{23}^2 C_4^2 C_5 C_6^2 S_5 - J_{5xx} C_{23}^2 C_4^2 C_5 S_5 - \\
& - 2J_{5xx} C_{23} C_4 C_5^2 S_{23} + J_{5xx} C_{23} C_4 S_{23} - J_{5xx} C_5 S_4^2 S_5 + J_{5xx} C_5 S_{23}^2 S_5 + \\
& + d_3 m_5 r_{5z} C_5 S_4 + d_4 m_5 r_{5z} C_{23} C_4 C_5 S_{23} - d_4 m_5 r_{5z} S_{23}^2 S_5 + a_2 m_5 r_{5z} C_2 C_{23} C_4 C_5 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_2 m_5 r_{5z} C_2 S_{23} S_5 + a_3 m_5 r_{5z} C_{23}^2 C_4 C_5 - a_3 m_5 r_{5z} C_{23} S_{23} S_5 + \\
& + J_{5zz} C_{23}^2 C_4^2 C_5 S_5 + 2J_{5zz} C_{23} C_4 C_5^2 S_{23} - J_{5zz} C_{23} C_4 S_{23} - \\
& - J_{5zz} C_5 S_{23}^2 S_5 + J_{5zz} C_5 S_4^2 S_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[2,5] = & J_{6zz} C_{23} S_4 S_5^2 + J_{6zz} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 + d_3 m_6 r_{6z} C_{23} S_5 + d_3 m_6 r_{6z} C_4 C_5 S_{23} - \\
& - J_{6yy} C_{23} C_4 C_5 C_6 S_6 + J_{6yy} C_4^2 C_6 S_{23} S_5 S_6 + J_{6yy} C_{23} C_5^2 S_4 S_6^2 - \\
& - J_{6yy} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 S_6^2 + J_{6xx} C_{23} C_4 C_5 C_6 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_5^2 C_6^2 S_4 - \\
& - J_{6xx} C_4^2 C_6 S_{23} S_5 S_6 - J_{6xx} C_4 C_5 C_6^2 S_{23} S_4 S_5 - J_{5xx} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 + \\
& + J_{5xx} C_{23} C_5^2 S_4 + d_3 m_5 r_{5z} C_4 C_5 S_{23} + d_3 m_5 r_{5z} C_{23} S_5 + \\
& + J_{5zz} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 + J_{5zz} C_{23} S_4 S_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[3,5] = & J_{6zz} C_{23} S_4 S_5^2 + J_{6zz} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 + d_3 m_6 r_{6z} C_{23} S_5 + d_3 m_6 r_{6z} C_4 C_5 S_{23} - \\
& - J_{6yy} C_{23} C_4 C_5 C_6 S_6 + J_{6yy} C_4^2 C_6 S_{23} S_5 S_6 + J_{6yy} C_{23} C_5^2 S_4 S_6^2 - \\
& - J_{6yy} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 S_6^2 + J_{6xx} C_{23} C_4 C_5 C_6 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_5^2 C_6^2 S_4 - \\
& - J_{6xx} C_4^2 C_6 S_{23} S_5 S_6 - J_{6xx} C_4 C_5 C_6^2 S_{23} S_4 S_5 - J_{5xx} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 + \\
& + J_{5xx} C_{23} C_5^2 S_4 + d_3 m_5 r_{5z} C_4 C_5 S_{23} + d_3 m_5 r_{5z} C_{23} S_5 + \\
& + J_{5zz} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 + J_{5zz} C_{23} S_4 S_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[4,5] = & J_{6zz} C_4 C_5^2 S_{23} + J_{6zz} C_{23} C_5 S_5 + d_3 m_6 r_{6z} C_{23} C_5 S_4 + a_3 m_6 r_{6z} C_{23} C_4 C_5 + \\
& + a_2 m_6 r_{6z} C_2 C_4 C_5 + d_4 m_6 r_{6z} C_4 C_5 S_{23} + J_{6yy} C_4 S_{23} S_5^2 S_6^2 - \\
& - J_{6yy} C_{23} C_5 S_5 S_6^2 + J_{6xx} C_4 C_6^2 S_{23} S_5^2 - J_{6xx} C_{23} C_5 C_6^2 S_5 - \\
& - J_{5xx} C_{23} C_5 S_5 + J_{5xx} C_4 S_{23} S_5^2 + d_4 m_5 r_{5z} C_4 C_5 S_{23} + a_2 m_5 r_{5z} C_2 C_4 C_5 + \\
& + a_3 m_5 r_{5z} C_{23} C_4 C_5 + d_3 m_5 r_{5z} C_{23} C_5 S_4 + J_{5zz} C_{23} C_5 S_5 + J_{5zz} C_4 C_5^2 S_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[5,5] = & d_3 m_6 r_{6z} C_5 S_{23} + d_3 m_6 r_{6z} C_{23} C_4 S_5 - a_3 m_6 r_{6z} C_{23} S_4 S_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_2 S_4 S_5 - \\
& - d_4 m_6 r_{6z} S_{23} S_4 S_5 + J_{6yy} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 - J_{6yy} C_{23} C_5 C_6 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_4 C_6 S_{23} S_5 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_5 C_6 S_6 - d_4 m_5 r_{5z} S_{23} S_4 S_5 - a_2 m_5 r_{5z} C_2 S_4 S_5 - \\
& - a_3 m_5 r_{5z} C_{23} S_4 S_5 + d_3 m_5 r_{5z} C_{23} C_4 S_5 + d_3 m_5 r_{5z} C_5 S_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[1,6] = & -J_{6yy} C_4^2 C_6 S_6 + J_{6yy} C_5^2 C_6 S_4^2 S_6 + J_{6yy} C_6 S_{23}^2 S_5^2 S_6 - J_{6yy} C_{23}^2 C_6 S_4^2 S_6 + \\
& + J_{6yy} C_{23} S_{23} S_4 S_5 - 2J_{6yy} C_{23} C_6^2 S_{23} S_4 S_5 - 2J_{6yy} C_{23} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_5 S_6 + \\
& + J_{6yy} C_4 C_5 S_{23}^2 S_4 - 2J_{6yy} C_4 C_5 C_6^2 S_{23}^2 S_4 + J_{6yy} C_{23}^2 C_4^2 C_5^2 C_6 S_6 + \\
& + J_{6xx} C_4^2 C_6 S_6 + J_{6xx} C_{23}^2 C_6 S_4^2 S_6 - J_{6xx} C_6 S_{23}^2 S_5^2 S_6 - J_{6xx} C_5^2 C_6 S_4^2 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_{23} S_{23} S_4 S_5 + 2J_{6xx} C_{23} C_6^2 S_{23} S_4 S_5 + 2J_{6xx} C_{23} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_5 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_4 C_5 S_{23}^2 S_4 + 2J_{6xx} C_4 C_5 C_6^2 S_{23}^2 S_4 - J_{6xx} C_{23}^2 C_4^2 C_5^2 C_6 S_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[2,6] = & -J_{6yy} C_{23} C_4 C_6^2 S_5 + J_{6yy} C_4 C_6 S_{23} S_4 S_6 - J_{6yy} C_4^2 C_5 C_6^2 S_{23} + \\
& + J_{6yy} C_{23} C_5 C_6 S_4 S_5 S_6 - J_{6yy} C_5 S_{23} S_4^2 S_6^2 + J_{6yy} C_4 C_5^2 C_6 S_{23} S_4 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_4 C_6 S_{23} S_4 S_6 - J_{6xx} C_{23} C_4 S_5 S_6^2 - J_{6xx} C_5 C_6^2 S_{23} S_4^2 - \\
& - J_{6xx} C_{23} C_5 C_6 S_4 S_5 S_6 - J_{6xx} C_4^2 C_5 S_{23} S_6^2 - J_{6xx} C_4 C_5^2 C_6 S_{23} S_4 S_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[3,6] = & -J_{6yy} C_{23} C_4 C_6^2 S_5 + J_{6yy} C_4 C_6 S_{23} S_4 S_6 + J_{6yy} C_{23} C_5 C_6 S_4 S_5 S_6 - \\
& - J_{6yy} C_4^2 C_5 C_6^2 S_{23} - J_{6yy} C_5 S_{23} S_4^2 S_6^2 + J_{6yy} C_4 C_5^2 C_6 S_{23} S_4 S_6 - \\
& - J_{6xx} C_4 C_6 S_{23} S_4 S_6 - J_{6xx} C_{23} C_4 S_5 S_6^2 - J_{6xx} C_5 C_6^2 S_{23} S_4^2 - J_{6xx} C_4^2 C_5 S_{23} S_6^2 - \\
& - J_{6xx} C_{23} C_5 C_6 S_4 S_5 S_6 - J_{6xx} C_4 C_5^2 C_6 S_{23} S_4 S_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1[4,6] &= J_{6yy} S_{23} S_4 S_5 S_6^2 - J_{6yy} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_5 S_6 - J_{6yy} C_{23} C_6 S_5^2 S_6 + \\
&\quad + J_{6xx} C_6^2 S_{23} S_4 S_5 + J_{6xx} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_5 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_6 S_5^2 S_6 \\
C_1[5,6] &= -J_{6yy} C_4 C_5 C_6^2 S_{23} - J_{6yy} C_{23} C_6^2 S_5 + J_{6yy} C_6 S_{23} S_4 S_6 - \\
&\quad - J_{6xx} C_4 C_5 S_{23} S_6^2 - J_{6xx} C_6 S_{23} S_4 S_6 - J_{6xx} C_{23} S_5 S_6^2 \\
C_2[2,3] &= a_2 d_4 m_6 C_3 - a_2 a_3 m_6 S_3 + a_2 m_6 r_{6z} C_3 C_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_4 S_3 S_5 + a_2 d_4 m_4 C_3 - \\
&\quad - a_2 a_3 m_4 S_3 - a_2 m_4 r_{4y} C_3 + a_3 m_3 r_{3z} C_3 - a_2 a_3 m_3 S_3 - a_2 m_5 r_{5z} C_4 S_3 S_5 + \\
&\quad + a_2 m_5 r_{5z} C_3 C_5 - a_2 a_3 m_5 S_3 + a_2 d_4 m_5 C_3 \\
C_2[3,3] &= a_2 d_4 m_6 C_3 - a_2 a_3 m_6 S_3 + a_2 m_6 r_{6z} C_3 C_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_4 S_3 S_5 + a_2 d_4 m_4 C_3 - \\
&\quad - a_2 a_3 m_4 S_3 - a_2 m_4 r_{4y} C_3 + a_3 m_3 r_{3z} C_3 - a_2 a_3 m_3 S_3 - 2 m_5 r_{5z} C_4 S_3 S_5 + \\
&\quad + a_2 m_5 r_{5z} C_3 C_5 - a_2 a_3 m_5 S_3 + a_2 d_4 m_5 C_3 \\
C_2[1,4] &= -J_{6zz} C_{23} C_4 C_5 S_5 + J_{6zz} C_4^2 S_{23} S_5^2 + a_3 m_6 r_{6z} C_4 S_{23} S_5 + a_2 m_6 r_{6z} C_4 S_2 S_5 - \\
&\quad - d_4 m_6 r_{6z} C_{23} C_4 S_5 + J_{6yy} C_{23} C_6 S_4 S_5 S_6 + J_{6yy} C_6^2 S_{23} S_4^2 + \\
&\quad + 2 J_{6yy} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 + J_{6yy} C_{23} C_4 C_5 S_5 S_6^2 + J_{6yy} C_4^2 C_5^2 S_{23} S_6^2 + \\
&\quad + J_{6xx} S_{23} S_4^2 S_6^2 - J_{6xx} C_{23} C_6 S_4 S_5 S_6 + J_{6xx} C_{23} C_4 C_5 C_6^2 S_5 - \\
&\quad - 2 J_{6xx} C_4 C_5 C_6 S_{23} S_4 S_6 + J_{6xx} C_4^2 C_5^2 C_6^2 S_{23} + J_{4zz} S_{23} S_4^2 + J_{4xx} C_4^2 S_{23} + \\
&\quad + J_{5xx} C_4^2 C_5^2 S_{23} + J_{5xx} C_{23} C_4 C_5 S_5 + J_{5yy} S_{23} S_4^2 - d_4 m_5 r_{5z} C_{23} C_4 S_5 + \\
&\quad + a_2 m_5 r_{5z} C_4 S_2 S_5 + a_3 m_5 r_{5z} C_4 S_{23} S_5 + J_{5zz} C_4^2 S_{23} S_5^2 - J_{5zz} C_{23} C_4 C_5 S_5 \\
C_2[2,4] &= -J_{6zz} C_4 S_4 S_5^2 - a_3 m_6 r_{6z} S_4 S_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_3 S_4 S_5 + J_{6yy} C_4 C_6^2 S_4 - J_{6yy} C_5 C_6 S_6 + \\
&\quad + 2 J_{6yy} C_4^2 C_5 C_6 S_6 - J_{6yy} C_4 C_5^2 S_4 S_6^2 + J_{6xx} C_4 S_4 S_6^2 + J_{6xx} C_5 C_6 S_6 - \\
&\quad - 2 J_{6xx} C_4^2 C_5 C_6 S_6 - J_{6xx} C_4 C_5^2 C_6^2 S_4 + J_{4zz} C_4 S_4 - J_{4xx} C_4 S_4 - J_{5xx} C_4 C_5^2 S_4 + \\
&\quad + J_{5yy} C_4 S_4 - a_2 m_5 r_{5z} C_3 S_4 S_5 - a_3 m_5 r_{5z} S_4 S_5 - J_{5zz} C_4 S_4 S_5^2 \\
C_2[3,4] &= -J_{6zz} C_4 S_4 S_5^2 - a_3 m_6 r_{6z} S_4 S_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_3 S_4 S_5 + J_{6yy} C_4 C_6^2 S_4 - J_{6yy} C_5 C_6 S_6 + \\
&\quad + 2 J_{6yy} C_4^2 C_5 C_6 S_6 - J_{6yy} C_4 C_5^2 S_4 S_6^2 + J_{6xx} C_4 S_4 S_6^2 + J_{6xx} C_5 C_6 S_6 - \\
&\quad - 2 J_{6xx} C_4^2 C_5 C_6 S_6 - J_{6xx} C_4 C_5^2 C_6^2 S_4 + J_{4zz} C_4 S_4 - J_{4xx} C_4 S_4 - J_{5xx} C_4 C_5^2 S_4 + \\
&\quad + J_{5yy} C_4 S_4 - a_2 m_5 r_{5z} C_3 S_4 S_5 - a_3 m_5 r_{5z} S_4 S_5 - J_{5zz} C_4 S_4 S_5^2 \\
C_2[4,4] &= -J_{6zz} C_4 C_5 S_5 - a_2 m_6 r_{6z} C_4 S_3 S_5 - d_4 m_6 r_{6z} C_4 S_5 + J_{6yy} C_6 S_4 S_5 S_6 + \\
&\quad + J_{6yy} C_4 C_5 S_5 S_6^2 - J_{6xx} C_6 S_4 S_5 S_6 + J_{6xx} C_4 C_5 C_6^2 S_5 + J_{5xx} C_4 C_5 S_5 - \\
&\quad - d_4 m_5 r_{5z} C_4 S_5 - a_2 m_5 r_{5z} C_4 S_3 S_5 - J_{5zz} C_4 C_5 S_5 \\
C_2[1,5] &= -J_{6zz} C_{23} C_5^2 S_4 + J_{6zz} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 + a_3 m_6 r_{6z} C_5 S_{23} S_4 + a_2 m_6 r_{6z} C_5 S_2 S_4 - \\
&\quad - d_4 m_6 r_{6z} C_{23} C_5 S_4 - J_{6yy} C_{23} S_4 S_5^2 S_6^2 - J_{6yy} C_6 S_{23} S_4^2 S_5 S_6 - \\
&\quad - J_{6yy} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 S_6^2 + J_{6xx} C_6 S_{23} S_4^2 S_5 S_6 - J_{6xx} C_{23} C_6^2 S_4 S_5^2 - \\
&\quad - J_{6xx} C_4 C_5 C_6^2 S_{23} S_4 S_5 - J_{5xx} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 - J_{5xx} C_{23} S_4 S_5^2 - d_4 m_5 r_{5z} C_{23} C_5 S_4 + \\
&\quad + a_2 m_5 r_{5z} C_5 S_2 S_4 + a_3 m_5 r_{5z} C_5 S_{23} S_4 + J_{5zz} C_4 C_5 S_{23} S_4 S_5 - J_{5zz} C_{23} C_5^2 S_4 \\
C_2[2,5] &= -J_{6zz} C_5 S_4^2 S_5 + a_3 m_6 r_{6z} C_4 C_5 - a_2 m_6 r_{6z} S_3 S_5 + a_2 m_6 r_{6z} C_3 C_4 C_5 - d_4 m_6 r_{6z} S_5 - \\
&\quad - J_{6yy} C_4 C_6 S_4 S_5 S_6 + J_{6yy} C_5 S_4^2 S_5 S_6^2 + J_{6xx} C_4 C_6 S_4 S_5 S_6 + J_{6xx} C_5 C_6^2 S_4^2 S_5 + \\
&\quad + J_{5xx} C_5 S_4^2 S_5 - d_4 m_5 r_{5z} S_5 + a_2 m_5 r_{5z} C_3 C_4 C_5 - a_2 m_5 r_{5z} S_3 S_5 + a_3 m_5 r_{5z} C_4 C_5 - \\
&\quad - J_{5zz} C_5 S_4^2 S_5
\end{aligned}$$

$$C_2[3,5] = -J_{6zz}C_5S_4^2S_5 + a_3m_6r_{6z}C_4C_5 - a_2m_6r_{6z}S_3S_5 + a_2m_6r_{6z}C_3C_4C_5 - d_4m_6r_{6z}S_5 - J_{6yy}C_4C_6S_4S_5S_6 + J_{6yy}C_5S_4^2S_5S_6^2 + J_{6xx}C_4C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_5C_6^2S_4^2S_5 + J_{5xx}C_5S_4^2S_5 - d_4m_5r_{5z}S_5 + a_2m_5r_{5z}C_3C_4C_5 - a_2m_5r_{5z}S_3S_5 + a_3m_5r_{5z}C_4C_5 - J_{5zz}C_5S_4^2S_5$$

$$C_2[4,5] = -J_{6zz}C_5^2S_4 - a_2m_6r_{6z}C_5S_3S_4 - d_4m_6r_{6z}C_5S_4 - J_{6yy}S_4S_5^2S_6^2 - J_{6xx}C_6^2S_4S_5^2 - J_{5xx}S_4S_5^2 - d_4m_5r_{5z}C_5S_4 - a_2m_5r_{5z}C_5S_3S_4 - J_{5zz}C_5^2S_4$$

$$C_2[5,5] = a_3m_6r_{6z}C_5 + a_2m_6r_{6z}C_3C_5 - a_2m_6r_{6z}C_4S_3S_5 - d_4m_6r_{6z}C_4S_5 - J_{6yy}C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_6S_4S_5S_6 - d_4m_5r_{5z}C_4S_5 - a_2m_5r_{5z}C_4S_3S_5 + a_2m_5r_{5z}C_3C_5 + a_3m_5r_{5z}C_5$$

$$C_2[1,6] = J_{6yy}C_{23}C_4S_5S_6^2 + J_{6yy}C_4C_6S_{23}S_4S_6 + J_{6yy}C_{23}C_5C_6S_4S_5S_6 + J_{6yy}C_5C_6^2S_{23}S_4^2 + J_{6yy}C_4^2C_5S_{23}S_6^2 + J_{6yy}C_4C_5^2C_6S_{23}S_4S_6 - J_{6xx}C_4C_6S_{23}S_4S_6 + J_{6xx}C_{23}C_4C_6^2S_5 + J_{6xx}C_4^2C_5C_6^2S_{23} + J_{6xx}C_5S_{23}S_4^2S_6^2 - J_{6xx}C_{23}C_5C_6S_4S_5S_6 - J_{6xx}C_4C_5^2C_6S_{23}S_4S_6$$

$$C_2[2,6] = J_{6yy}C_6S_5^2S_6 - J_{6yy}C_6S_4^2S_6 - J_{6yy}C_4C_5S_4 + 2J_{6yy}C_4C_5C_6^2S_4 + J_{6yy}C_4^2C_5^2C_6S_6 + J_{6xx}C_6S_4^2S_6 - J_{6xx}C_6S_5^2S_6 + J_{6xx}C_4C_5S_4 - 2J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_4 - J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6S_6$$

$$C_2[3,6] = J_{6yy}C_6S_5^2S_6 - J_{6yy}C_6S_4^2S_6 - J_{6yy}C_4C_5S_4 + 2J_{6yy}C_4C_5C_6^2S_4 + J_{6yy}C_4^2C_5^2C_6S_6 + J_{6xx}C_6S_4^2S_6 - J_{6xx}C_6S_5^2S_6 + J_{6xx}C_4C_5S_4 - 2J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_4 - J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6S_6$$

$$C_2[4,6] = J_{6yy}C_4S_5S_6^2 + J_{6yy}C_5C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_4C_6^2S_5 - J_{6xx}C_5C_6S_4S_5S_6$$

$$C_2[5,6] = J_{6yy}C_5C_6^2S_4 + J_{6yy}C_4C_6S_6 + J_{6xx}C_5S_4S_6^2 - J_{6xx}C_4C_6S_6$$

$$C_3[1,4] = -J_{6zz}C_{23}C_4C_5S_5 + J_{6zz}C_4^2S_{23}S_5^2 + a_3m_6r_{6z}C_4S_{23}S_5 - d_4m_6r_{6z}C_{23}C_4S_5 + J_{6yy}C_{23}C_6S_4S_5S_6 + J_{6yy}C_6^2S_{23}S_4^2 + 2J_{6yy}C_4C_5C_6S_{23}S_4S_6 + J_{6yy}C_{23}C_4C_5S_5S_6^2 + J_{6yy}C_4^2C_5^2S_{23}S_6^2 + J_{6xx}S_{23}S_4^2S_6^2 - J_{6xx}C_{23}C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_{23}C_4C_5C_6^2S_5 - 2J_{6xx}C_4C_5C_6S_{23}S_4S_6 + J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6^2S_{23} + J_{4zz}S_{23}S_4^2 + J_{4xx}C_4^2S_{23} + J_{5xx}C_4^2C_5^2S_{23} + J_{5xx}C_{23}C_4C_5S_5 + J_{5yy}S_{23}S_4^2 - d_4m_5r_{5z}C_{23}C_4S_5 + a_3m_5r_{5z}C_4S_{23}S_5 + J_{5zz}C_4^2S_{23}S_5^2 - J_{5zz}C_{23}C_4C_5S_5$$

$$C_3[2,4] = -J_{6zz}C_4S_4S_5^2 - a_3m_6r_{6z}S_4S_5 + J_{6yy}C_4C_6^2S_4 - J_{6yy}C_5C_6S_6 + 2J_{6yy}C_4^2C_5C_6S_6 - J_{6yy}C_4C_5^2S_4S_6^2 + J_{6xx}C_4S_4S_6^2 + J_{6xx}C_5C_6S_6 - 2J_{6xx}C_4^2C_5C_6S_6 - J_{6xx}C_4C_5^2C_6^2S_4 + J_{4zz}C_4S_4 - J_{4xx}C_4S_4 - J_{5xx}C_4C_5^2S_4 + J_{5yy}C_4S_4 - a_3m_5r_{5z}S_4S_5 - J_{5zz}C_4S_4S_5^2$$

$$C_3[3,4] = -J_{6zz}C_4S_4S_5^2 - a_3m_6r_{6z}S_4S_5 + J_{6yy}C_4C_6^2S_4 - J_{6yy}C_5C_6S_6 + 2J_{6yy}C_4^2C_5C_6S_6 - J_{6yy}C_4C_5^2S_4S_6^2 + J_{6xx}C_4S_4S_6^2 + J_{6xx}C_5C_6S_6 - 2J_{6xx}C_4^2C_5C_6S_6 - J_{6xx}C_4C_5^2C_6^2S_4 + J_{4zz}C_4S_4 - J_{4xx}C_4S_4 - J_{5zz}C_4C_5^2S_4 + J_{5yy}C_4S_4 - a_3m_5r_{5z}S_4S_5 - J_{5zz}C_4S_4S_5^2$$

$$C_3[4,4] = -J_{6zz}C_4C_5S_5 - d_4m_6r_{6z}C_4S_5 + J_{6yy}C_6S_4S_5S_6 + J_{6yy}C_4C_5S_5S_6^2 - J_{6xx}C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_5 + J_{5xx}C_4C_5S_5 - d_4m_5r_{5z}C_4S_5 - J_{5zz}C_4C_5S_5$$

$$C_3[1,5] = -J_{6zz}C_{23}C_5^2S_4 + J_{6zz}C_4C_5S_{23}S_4S_5 + a_3m_6r_{6z}C_5S_{23}S_4 - d_4m_6r_{6z}C_{23}C_5S_4 - \\ -J_{6yy}C_{23}S_4S_5^2S_6^2 - J_{6yy}C_6S_{23}S_4^2S_5S_6 - J_{6yy}C_4C_5S_{23}S_4S_5S_6^2 + \\ +J_{6xx}C_6S_{23}S_4^2S_5S_6 - J_{6xx}C_{23}C_6^2S_4S_5^2 - J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_{23}S_4S_5 - \\ -J_{5xx}C_4C_5S_{23}S_4S_5 - J_{5xx}C_{23}S_4S_5^2 - d_4m_5r_{5z}C_{23}C_5S_4 + a_3m_5r_{5z}C_5S_{23}S_4 + \\ +J_{5zz}C_4C_5S_{23}S_4S_5 - J_{5zz}C_{23}C_5^2S_4$$

$$C_3[2,5] = -J_{6zz}C_5S_4^2S_5 + a_3m_6r_{6z}C_4C_5 - d_4m_6r_{6z}S_5 - J_{6yy}C_4C_6S_4S_5S_6 + \\ +J_{6yy}C_5S_4^2S_5S_6^2 + J_{6xx}C_4C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_5C_6^2S_4^2S_5 + J_{5xx}C_5S_4^2S_5 - \\ -d_4m_5r_{5z}S_5 + a_3m_5r_{5z}C_4C_5 - J_{5zz}C_5S_4^2S_5$$

$$C_3[3,5] = -J_{6zz}C_5S_4^2S_5 + a_3m_6r_{6z}C_4C_5 - d_4m_6r_{6z}S_5 - J_{6yy}C_4C_6S_4S_5S_6 + \\ +J_{6yy}C_5S_4^2S_5S_6^2 + J_{6xx}C_4C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_5C_6^2S_4^2S_5 + J_{5xx}C_5S_4^2S_5 - \\ -d_4m_5r_{5z}S_5 + a_3m_5r_{5z}C_4C_5 - J_{5zz}C_5S_4^2S_5$$

$$C_3[4,5] = -J_{6zz}C_5^2S_4 - d_4m_6r_{6z}C_5S_4 - J_{6yy}S_4S_5^2S_6^2 - J_{6xx}C_6^2S_4S_5^2 - J_{5xx}S_4S_5^2 - \\ -d_4m_5r_{5z}C_5S_4 - J_{5zz}C_5^2S_4$$

$$C_3[5,5] = a_3m_6r_{6z}C_5 - d_4m_6r_{6z}C_4S_5 - J_{6yy}C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_6S_4S_5S_6 - \\ -d_4m_5r_{5z}C_4S_5 + a_3m_5r_{5z}C_5$$

$$C_3[1,6] = J_{6yy}C_{23}C_4S_5S_6^2 + J_{6yy}C_4C_6S_{23}S_4S_6 + J_{6yy}C_{23}C_5C_6S_4S_5S_6 + \\ +J_{6yy}C_5C_6^2S_{23}S_4^2 + J_{6yy}C_4^2C_5S_{23}S_6^2 + J_{6yy}C_4C_5^2C_6^2S_{23}S_4S_6 - \\ -J_{6xx}C_4C_6S_{23}S_4S_6 + J_{6xx}C_{23}C_4C_6^2S_5 + J_{6xx}C_4^2C_5C_6^2S_{23} + J_{6xx}C_5S_{23}S_4^2S_6^2 - \\ -J_{6xx}C_{23}C_5C_6S_4S_5S_6 - J_{6xx}C_4C_5^2C_6^2S_{23}S_4S_6$$

$$C_3[2,6] = J_{6yy}C_6S_5^2S_6 - J_{6yy}C_6S_4^2S_6 - J_{6yy}C_4C_5S_4 + 2J_{6yy}C_4C_5C_6^2S_4 + \\ +J_{6yy}C_4^2C_5^2C_6S_6 + J_{6xx}C_6S_4^2S_6 - J_{6xx}C_6S_5^2S_6 + J_{6xx}C_4C_5S_4 - \\ -2J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_4 - J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6S_6$$

$$C_3[3,6] = J_{6yy}C_6S_5^2S_6 - J_{6yy}C_6S_4^2S_6 - J_{6yy}C_4C_5S_4 + 2J_{6yy}C_4C_5C_6^2S_4 + \\ +J_{6yy}C_4^2C_5^2C_6S_6 + J_{6xx}C_6S_4^2S_6 - J_{6xx}C_6S_5^2S_6 + J_{6xx}C_4C_5S_4 - \\ -2J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_4 - J_{6xx}C_4^2C_5^2C_6S_6$$

$$C_3[4,6] = J_{6yy}C_4S_5S_6^2 + J_{6yy}C_5C_6S_4S_5S_6 + J_{6xx}C_4C_6^2S_5 - J_{6xx}C_5C_6S_4S_5S_6$$

$$C_3[5,6] = J_{6yy}C_5C_6^2S_4 + J_{6yy}C_4C_6S_6 + J_{6xx}C_5S_4S_6^2 - J_{6xx}C_4C_6S_6$$

$$C_4[1,5] = -J_{6zz}C_4S_{23}S_5^2 + J_{6zz}C_{23}C_5S_5 - J_{6yy}C_5C_6S_{23}S_4S_6 - J_{6yy}C_4C_5^2S_{23}S_6^2 - \\ -J_{6yy}C_{23}C_5S_5S_6^2 + J_{6xx}C_5C_6S_{23}S_4S_6 - J_{6xx}C_4C_5^2C_6^2S_{23} - J_{6xx}C_{23}C_5C_6^2S_5 - \\ -J_{5xx}C_{23}C_5S_5 - J_{5xx}C_4C_5^2S_{23} + J_{5zz}C_{23}C_5S_5 - J_{5zz}C_4S_{23}S_5^2$$

$$C_4[2,5] = J_{6zz}S_4S_5^2 - J_{6yy}C_4C_5C_6S_6 + J_{6yy}C_5^2S_4S_6^2 + J_{6xx}C_4C_5C_6S_6 + \\ +J_{6xx}C_5^2C_6^2S_4 + J_{5xx}C_5^2S_4 + J_{5zz}S_4S_5^2$$

$$C_4[3,5] = J_{6zz}S_4S_5^2 - J_{6yy}C_4C_5C_6S_6 + J_{6yy}C_5^2S_4S_6^2 + J_{6xx}C_4C_5C_6S_6 + \\ +J_{6xx}C_5^2C_6^2S_4 + J_{5xx}C_5^2S_4 + J_{5zz}S_4S_5^2$$



$$C_4[4,5]=J_{6zz}C_5S_5-J_{6yy}C_5S_5S_6^2-J_{6xx}C_5C_6^2S_5-J_{5xx}C_5S_5+J_{5zz}C_5S_5$$

$$C_4[5,5]=-J_{6yy}C_5C_6S_6+J_{6xx}C_5C_6S_6$$

$$C_4[1,6]=-J_{6yy}C_6^2S_{23}S_4S_5-J_{6yy}C_4C_5C_6S_{23}S_5S_6-J_{6yy}C_{23}C_6S_5^2S_6- \\ -J_{6xx}S_{23}S_4S_5S_6^2+J_{6xx}C_4C_5C_6S_{23}S_5S_6+J_{6xx}C_{23}C_6S_5^2S_6$$

$$C_4[2,6]=-J_{6yy}C_4C_6^2S_5+J_{6yy}C_5C_6S_4S_5S_6-J_{6xx}C_4S_5S_6^2-J_{6xx}C_5C_6S_4S_5S_6$$

$$C_4[3,6]=-J_{6yy}C_4C_6^2S_5+J_{6yy}C_5C_6S_4S_5S_6-J_{6xx}C_4S_5S_6^2-J_{6xx}C_5C_6S_4S_5S_6$$

$$C_4[4,6]=-J_{6yy}C_6S_5^2S_6+J_{6xx}C_6S_5^2S_6$$

$$C_4[5,6]=-J_{6yy}C_6^2S_5-J_{6xx}S_5S_6^2$$

$$C_5[1,6]=J_{6yy}C_4C_5S_{23}S_6^2+J_{6yy}C_6S_{23}S_4S_6+J_{6yy}C_{23}S_5S_6^2+J_{6xx}C_4C_5C_6^2S_{23}+ \\ +J_{6xx}C_{23}C_6^2S_5-J_{6xx}C_6S_{23}S_4S_6$$

$$C_5[2,6]=-J_{6yy}C_5S_4S_6^2+J_{6yy}C_4C_6S_6-J_{6xx}C_5C_6^2S_4-J_{6xx}C_4C_6S_6$$

$$C_5[3,6]=-J_{6yy}C_5S_4S_6^2+J_{6yy}C_4C_6S_6-J_{6xx}C_5C_6^2S_4-J_{6xx}C_4C_6S_6$$

$$C_5[4,6]=J_{6yy}S_5S_6^2+J_{6xx}C_6^2S_5$$

$$C_5[5,6]=J_{6yy}C_6S_6-J_{6xx}C_6S_6$$

### *Forças/Binários Gravitacionais*

$$G[2] = -gm_6r_{6z}C_{23}C_4S_5-gm_6r_{6z}C_5S_{23}-a_3gm_6C_{23}-a_2gm_6C_2-d_4gm_6S_{23}+gm_4r_{4y}S_{23}- \\ -a_3gm_4C_{23}-a_2gm_4C_2-d_4gm_4S_{23}-gm_2r_{2x}C_2-a_2gm_2C_2-a_3gm_3C_{23}-a_2gm_3C_2- \\ -gm_3r_{3z}S_{23}-d_4gm_5S_{23}-a_2gm_5C_2-a_3gm_5C_{23}-gm_5r_{5z}C_5S_{23}-gm_5r_{5z}C_{23}C_4S_5$$

$$G[3] = -gm_6r_{6z}C_5S_{23}-gm_6r_{6z}C_{23}C_4S_5-a_3gm_6C_{23}-d_4gm_6S_{23}+gm_4r_{4y}S_{23}- \\ -a_3gm_4C_{23}-d_4gm_4S_{23}-a_3gm_3C_{23}-gm_3r_{3z}S_{23}-d_4gm_5S_{23}-a_3gm_5C_{23}- \\ -gm_5r_{5z}C_{23}C_4S_5-gm_5r_{5z}C_5S_{23}$$

$$G[4] = gm_6r_{6z}S_{23}S_4S_5+gm_5r_{5z}S_{23}S_4S_5$$

$$G[5] = -gm_6r_{6z}C_4C_5S_{23}-gm_6r_{6z}C_{23}S_5-gm_5r_{5z}C_{23}S_5-gm_5r_{5z}C_4C_5S_{23}$$

**Forças /Binários nas Articulações**

$$\begin{aligned}
 F[1] = & D[1,1]\ddot{q}_1 + D[1,2]\ddot{q}_2 + D[1,3]\ddot{q}_3 + D[1,4]\ddot{q}_4 + D[1,5]\ddot{q}_5 + D[1,6]\ddot{q}_6 + C_1[5,5]\dot{q}_5^2 + \\
 & + 2C_1[5,6]\dot{q}_5\dot{q}_6 + C_1[4,4]\dot{q}_4^2 + 2C_1[4,5]\dot{q}_4\dot{q}_5 + 2C_1[4,6]\dot{q}_4\dot{q}_6 + C_1[3,3]\dot{q}_3^2 + \\
 & + 2C_1[3,4]\dot{q}_3\dot{q}_4 + 2C_1[3,5]\dot{q}_3\dot{q}_5 + 2C_1[3,6]\dot{q}_3\dot{q}_6 + C_1[2,2]\dot{q}_2^2 + 2C_1[2,3]\dot{q}_2\dot{q}_3 + \\
 & + 2C_1[2,4]\dot{q}_2\dot{q}_4 + 2C_1[2,5]\dot{q}_2\dot{q}_5 + 2C_1[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_6 + 2C_1[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_6 + 2C_1[1,5]\dot{q}_1\dot{q}_5 + \\
 & + 2C_1[1,4]\dot{q}_1\dot{q}_4 + 2C_1[1,3]\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2C_1[1,2]\dot{q}_1\dot{q}_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F[2] = & D[1,2]\ddot{q}_1 + D[2,2]\ddot{q}_2 + D[2,3]\ddot{q}_3 + D[2,4]\ddot{q}_4 + D[2,5]\ddot{q}_5 + D[2,6]\ddot{q}_6 + C_2[5,5]\dot{q}_5^2 + \\
 & + 2C_2[5,6]\dot{q}_5\dot{q}_6 + C_2[4,4]\dot{q}_4^2 + 2C_2[4,5]\dot{q}_4\dot{q}_5 + 2C_2[4,6]\dot{q}_4\dot{q}_6 + C_2[3,3]\dot{q}_3^2 + \\
 & + 2C_2[3,4]\dot{q}_3\dot{q}_4 + 2C_2[3,5]\dot{q}_3\dot{q}_5 + 2C_2[3,6]\dot{q}_3\dot{q}_6 + 2C_2[2,3]\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2C_2[2,4]\dot{q}_2\dot{q}_4 + \\
 & + 2C_2[2,5]\dot{q}_2\dot{q}_5 + 2C_2[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_6 + 2C_2[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_6 + 2C_2[1,5]\dot{q}_1\dot{q}_5 + 2C_2[1,4]\dot{q}_1\dot{q}_4 - \\
 & - C_1[1,2]\dot{q}_1\dot{q}_2 + G[2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F[3] = & D[1,3]\ddot{q}_1 + D[2,3]\ddot{q}_2 + D[3,3]\ddot{q}_3 + D[3,4]\ddot{q}_4 + D[3,5]\ddot{q}_5 + D[3,6]\ddot{q}_6 + C_3[5,5]\dot{q}_5^2 + \\
 & + 2C_3[5,6]\dot{q}_5\dot{q}_6 + C_3[4,4]\dot{q}_4^2 + 2C_3[4,5]\dot{q}_4\dot{q}_5 + 2C_3[4,6]\dot{q}_4\dot{q}_6 + 2C_3[3,4]\dot{q}_3\dot{q}_4 + \\
 & + 2C_3[3,5]\dot{q}_3\dot{q}_5 + 2C_3[3,6]\dot{q}_3\dot{q}_6 - C_2[2,3]\dot{q}_2^2 + 2C_3[2,4]\dot{q}_2\dot{q}_4 + 2C_3[2,5]\dot{q}_2\dot{q}_5 + \\
 & + 2C_3[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_6 + 2C_3[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_6 + 2C_3[1,5]\dot{q}_1\dot{q}_5 + 2C_3[1,4]\dot{q}_1\dot{q}_4 - C_1[1,3]\dot{q}_1^2 + G[3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F[4] = & D[1,4]\ddot{q}_1 + D[2,4]\ddot{q}_2 + D[3,4]\ddot{q}_3 + D[4,4]\ddot{q}_4 + D[4,5]\ddot{q}_5 + D[4,6]\ddot{q}_6 + C_4[5,5]\dot{q}_5^2 + \\
 & + 2C_4[5,6]\dot{q}_5\dot{q}_6 + 2C_4[4,5]\dot{q}_4\dot{q}_5 + 2C_4[4,6]\dot{q}_4\dot{q}_6 - C_3[3,4]\dot{q}_3^2 + 2C_4[3,5]\dot{q}_3\dot{q}_5 + \\
 & + 2C_4[3,6]\dot{q}_3\dot{q}_6 - C_2[2,4]\dot{q}_2^2 - 2C_3[2,4]\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2C_4[2,5]\dot{q}_2\dot{q}_5 + 2C_4[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_6 + \\
 & + 2C_4[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_6 + 2C_4[1,5]\dot{q}_1\dot{q}_5 - 2C_3[1,4]\dot{q}_1\dot{q}_3 - 2C_2[1,4]\dot{q}_1\dot{q}_2 - C_1[1,4]\dot{q}_1^2 + G[4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F[5] = & D[1,5]\ddot{q}_1 + D[2,5]\ddot{q}_2 + D[3,5]\ddot{q}_3 + D[4,5]\ddot{q}_4 + D[5,5]\ddot{q}_5 + 2C_5[5,6]\dot{q}_5\dot{q}_6 - \\
 & - C_4[4,5]\dot{q}_4^2 + 2C_5[4,6]\dot{q}_4\dot{q}_6 - C_3[3,5]\dot{q}_3^2 - 2C_4[3,5]\dot{q}_3\dot{q}_4 + 2C_5[3,6]\dot{q}_3\dot{q}_6 - \\
 & - C_2[2,5]\dot{q}_2^2 - 2C_3[2,5]\dot{q}_2\dot{q}_3 - 2C_4[2,5]\dot{q}_2\dot{q}_4 + 2C_5[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_6 + 2C_5[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_6 - \\
 & - 2C_4[1,5]\dot{q}_1\dot{q}_4 - 2C_3[1,5]\dot{q}_1\dot{q}_3 - 2C_2[1,5]\dot{q}_1\dot{q}_2 - C_1[1,5]\dot{q}_1^2 + G[5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F[6] = & D[1,6]\ddot{q}_1 + D[2,6]\ddot{q}_2 + D[3,6]\ddot{q}_3 + D[4,6]\ddot{q}_4 + D[6,6]\ddot{q}_6 - C_5[5,6]\dot{q}_5^2 - C_4[4,6]\dot{q}_4^2 - \\
 & - 2C_5[4,6]\dot{q}_4\dot{q}_5 - C_3[3,6]\dot{q}_3^2 - 2C_4[3,6]\dot{q}_3\dot{q}_4 - 2C_5[3,6]\dot{q}_3\dot{q}_5 - C_2[2,6]\dot{q}_2^2 - \\
 & - 2C_3[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_3 - 2C_4[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_4 - 2C_5[2,6]\dot{q}_2\dot{q}_5 - 2C_5[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_5 - 2C_4[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_4 - \\
 & - 2C_3[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_3 - 2C_2[1,6]\dot{q}_1\dot{q}_2 - C_1[1,6]\dot{q}_1^2
 \end{aligned}$$

### **3. Modelização Estatística da Dinâmica de Manipuladores Robóticos**

*"A investigação em física demonstra, sem margem para dúvidas, que, pelo menos para a esmagadora maioria dos fenómenos cuja regularidade e invariabilidade conduziram à formulação do postulado da causalidade, a raiz comum da estrita regularidade que se observa é o acaso."*  
(Erwin Schrödinger)

## 3. Modelização Estatística da Dinâmica de Manipuladores Robóticos

### 3.1. Introdução

Os manipuladores robóticos são sistemas mecânicos passíveis de uma modelização com base nas leis da física clássica. Todavia, a complexidade das expressões resultantes torna difícil a análise das propriedades destes sistemas. No caso particular da dinâmica, isto é, na descrição das relações entre forças/binários, posições, velocidades e acelerações, a magnitude das dificuldades encontradas levou a que somente alguns investigadores se tenham debruçado sobre o assunto [3.1-3.13] e que o seu estudo esteja, ainda, numa fase preliminar. Assim, pode-se dizer que a caracterização da dinâmica dos manipuladores é um problema ainda em aberto pelo que constitui um tema importante no desenvolvimento da robótica.

No capítulo anterior foi introduzida a modelização estatística da cinemática de manipuladores robóticos [3.14-3.18]. O modelo estatístico revelou-se computacionalmente eficiente, apropriado no tratamento de dados experimentais tais como no caso de sinais provenientes de sensores e, acima de tudo, demonstrou conduzir facilmente a conclusões gerais e inequívocas. O presente capítulo estuda a dinâmica de manipuladores robóticos à luz dos novos conceitos de modelização. Tal como já foi estabelecido para a cinemática, adopta-se o robot 2R como protótipo de estudo pois alia uma relativa simplicidade do seu modelo à generalidade do mesmo, atendendo a que inclui todos os fenómenos dinâmicos que ocorrem em manipuladores mais complexos. Deste modo, na secção 3.2 começa-se por definir as variáveis estatísticas fundamentais bem como a estratégia a adoptar no estudo da dinâmica. De facto, a ausência de conhecimento científico nesta área aconselha o estudo, gradual e progressivo, de fenómenos dinâmicos parcelares, ou seja o estudo de fenómenos restritos, logo mais simples, e a sua integração posterior no estudo da dinâmica na sua totalidade. Assim, sabendo de antemão da existência de fenómenos dinâmicos parcelares, tais como os efeitos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais, efectua-se um estudo preliminar destes fenómenos dinâmicos. Uma vez estabelecido um conhecimento destes fenómenos passa-se a estudar, na secção 3.3, a dinâmica na sua globalidade. Neste caso, a integração dos estudos parcelares revela algumas dificuldades que são ultrapassadas pela adopção de uma estratégia parcialmente heurística. Este procedimento não desvaloriza a modelização estatística, já que conduz a resultados significativos, mas, antes pelo

contrário, demonstra a flexibilidade da nova metodologia. Na secção 3.4 analisa-se a acção simultânea dos fenómenos cinemáticos e dinâmicos. Aqui avaliam-se os pesos relativos dos dois fenómenos e traçam-se conclusões sobre a sua importância no desenvolvimento e controlo de manipuladores. A sua aplicação no planeamento (dinâmico) de trajectórias revela-se de particular importância. A investigação neste ponto [3.19-3.22] tem, também, sido muito limitada, todavia, verifica-se que o método estatístico abre novas perspectivas de estudo. Por último, na secção 3.5 apontam-se as principais conclusões que decorrem do presente estudo.

### 3.2. Sobre a Modelização Estatística da Dinâmica de Manipuladores

A dinâmica (inversa) relaciona as posições, velocidades e acelerações  $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$  exigidas ao manipulador no espaço das articulações, com as forças/binários  $\{\mathbf{T}\}$  solicitadas aos actuadores das articulações. Desta maneira, o modelo estatístico deve considerar em primeiro lugar:

- A descrição estatística, isto é, através de funções densidade de probabilidade (f.d.p.'s) apropriadas, do conjunto  $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$  de variáveis independentes ou variáveis aleatórias de entrada (v.a.e.'s) da dinâmica.
- A descrição estatística, isto é, através de f.d.p.'s, do conjunto  $\{\mathbf{T}\}$  de variáveis dependentes ou variáveis aleatórias de saída (v.a.s.'s) da dinâmica.

Uma vez definidas as variáveis em jogo, deve passar-se, em segundo lugar, ao estabelecimento das relações entre as v.a.e.'s e as v.a.s.'s e, em terceiro lugar, devem analisar-se os respectivos histogramas. No entanto, a dinâmica revela-se bastante mais complexa que a cinemática, o que dificulta o desenvolvimento do estudo nos moldes indicados. Assim, decidiu-se analisar, numa fase inicial, fenómenos parcelares da dinâmica e integrar, posteriormente, os resultados aquando do estudo da dinâmica na sua globalidade.

Como é sabido, na dinâmica coexistem fenómenos de origem gravitacional, fenómenos que são influenciados pelas velocidades e fenómenos que dependem das acelerações. Deste modo, começa-se por analisar, separadamente, três subsistemas:

- Os fenómenos gravitacionais que estabelecem uma relação do tipo  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{T}$   
(isto é,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e  $g \neq 0$ )
- Os fenómenos Coriolis/centrípetos que correspondem à relação  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{T}$   
(isto é,  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e  $g = 0$ )

**Tabela 3.1. Parâmetros numéricos do robot 2R**

$l_1=0.3$ m	$m_1=2.16$ Kg	$I_1=0.01755$ Kgm <sup>2</sup>
$l_2=0.3$ m	$m_2=1.68$ Kg	$I_2=0.01324$ Kgm <sup>2</sup>

- Os fenómenos inerciais que obedecem à relação  $(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{T}$

(isto é,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e  $g = 0$ )

Para uma maior facilidade de interpretação passam a afectar-se as v.a.s.'s  $\mathbf{T}$  por um índice indicativo de cada situação. Assim, de acordo com esta notação, as forças/binários dos subsistemas referidos designam-se por  $\mathbf{T}_G$ ,  $\mathbf{T}_C$  e  $\mathbf{T}_I$ , respectivamente.

### 3.2.1. Estudo Preliminar dos Fenómenos Gravitacionais, Coriolis/centrípetos e Inerciais

Neste parágrafo inicia-se o estudo das relações  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{T}_G$  (com  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e  $g \neq 0$ ),  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{T}_C$  (com  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e  $g = 0$ ) e  $(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{T}_I$  (com  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e  $g = 0$ ). Numa primeira fase efectuam-se algumas experiências, por simulação numérica usando o conjunto de parâmetros representado na Tabela 3.1, a fim de explorar as propriedades dos subsistemas. Numa segunda fase, analisam-se as relações analíticas entre as v.a.e.'s a as v.a.s.'s e comparam-se os resultados obtidos.

Dada a ausência de conhecimento, *a priori*, das características dos fenómenos, e tendo em vista uma análise numérica preliminar dos três subsistemas, definimos as f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2} & \text{se } |\mathbf{q}| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |\mathbf{q}| > \pi \end{cases} \quad (3.1)$$

$$g_{\dot{Q}}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{Q}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2\sigma_{\dot{Q}}^2} \right\} \quad (3.2)$$

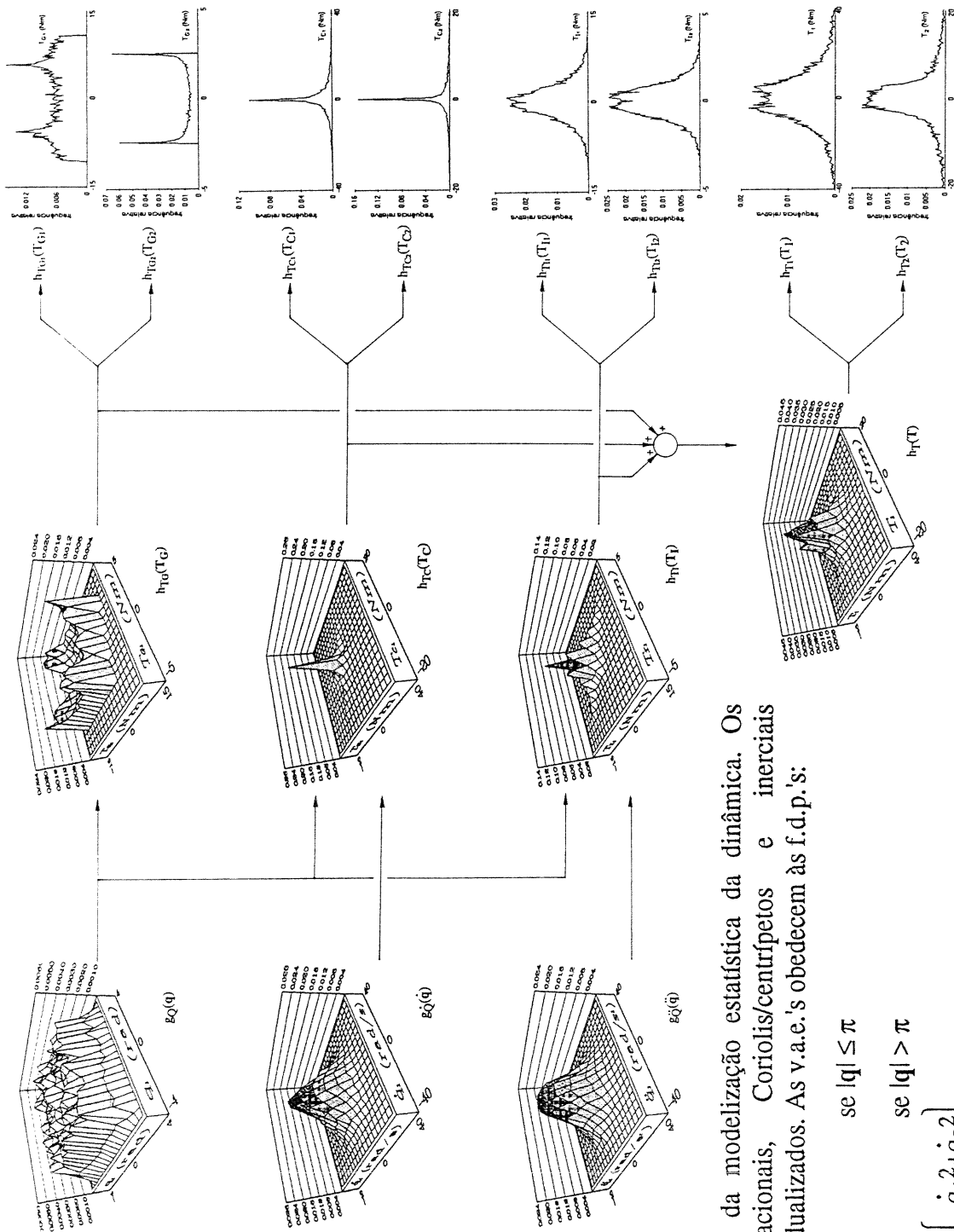


Fig. 3.1 Diagrama sinóptico da modelização estatística da dinâmica. Os fenômenos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais encontram-se individualizados. As v.a.e.'s obedecem às f.d.p.'s:

$$g_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2} & \text{se } |q| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |q| > \pi \end{cases}$$

$$g_{\dot{Q}}(\dot{q}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{Q}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2\sigma_{\dot{Q}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\dot{Q}} = 10 \text{ s}^{-1})$$

$$g_{\ddot{Q}}(\ddot{q}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{Q}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2}{2\sigma_{\ddot{Q}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\ddot{Q}} = 10 \text{ s}^{-2})$$

$$g_{\ddot{Q}}(\ddot{Q}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{Q}}^2} \text{EXP}\left\{-\frac{\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2}{2\sigma_{\ddot{Q}}^2}\right\} \quad (3.3)$$

A Figura 3.1 ilustra as respostas dos subsistemas gravitacional, Coriolis/centrípeto e inercial sujeitos a amostras aleatórias obedecendo a estas f.d.p.'s, com  $\sigma_{\dot{Q}}=10 \text{ s}^{-1}$  e  $\sigma_{\ddot{Q}}=10 \text{ s}^{-2}$  nas expressões (3.2) e (3.3), respectivamente. Tal como já foi referido para a cinemática, sob o ponto de vista dos actuadores das articulações interessam as f.d.p.'s marginais e não as f.d.p.'s conjuntas. Nesta perspectiva, observa-se que:

- Nos fenómenos gravitacionais – Os histogramas relativos a  $h_{T_{G1}}(T_{G1})$  e  $h_{T_{G2}}(T_{G2})$  revelam a existência de máximos para valores elevados (positivos e negativos), e de um mínimo na origem. Isto significa que o manipulador 2R "privilegia" a existência de binários elevados e "evita" situações tais que  $T_G \approx 0$ .
- Nos fenómenos Coriolis/centrípetos – Os histogramas de  $h_{T_{C1}}(T_{C1})$  e  $h_{T_{C2}}(T_{C2})$  mostram um máximo na origem. Ao contrário do que se verifica para os binários gravitacionais, os gráficos mostram que este subsistema "privilegia", desde logo, situações onde  $T_C \approx 0$ .
- Nos fenómenos inerciais – Os histogramas relativos a  $h_{T_{I1}}(T_{I1})$  e  $h_{T_{I2}}(T_{I2})$  revelam um máximo na origem. Assim, verificamos que os fenómenos inerciais ocorrem "preferencialmente" para  $T_I \approx 0$ .

Estes resultados dependem das propriedades intrínsecas de cada subsistema e, dado que nos interessam histogramas que mostrem elevada probabilidade na origem e baixa probabilidade nos extremos, o passo seguinte consiste no estudo das condições a impôr às v.a.e.'s que favorecem esta situação. O estudo analítico destes fenómenos permite estabelecer as condições de optimização dos binários solicitados aos actuadores. Deste modo, estudando as funções de variável aleatória  $q \rightarrow T_G$ ,  $(q, \dot{q}) \rightarrow (T_G, T_C)$  e  $(q, \dot{q}, \ddot{q}) \rightarrow (T_G, T_C, T_I)$ , onde se consideram as v.a.s.'s auxiliares  $T_G$  e  $T_G, T_C$  no segundo e terceiro casos a fim de se manter dimensões semelhantes para os conjuntos de variáveis dependentes e independentes, é possível escrever:

$$h_{T_G}(T_G) = |J_Q| g_Q[q(T_G)] \quad (3.4a)$$

$$h_{T_G T_C}(T_G, T_C) = |J_{Q\dot{Q}}| g_{Q\dot{Q}}[q(T_G, T_C), \dot{q}(T_C)] \quad (3.4b)$$

$$h_{T_G T_C T_I}(T_G, T_C, T_I) = |J_{Q\dot{Q}\ddot{Q}}| g_{Q\dot{Q}\ddot{Q}}[q(T_G, T_C, T_I), \dot{q}(T_C), \ddot{q}(T_I)] \quad (3.4c)$$



onde os jacobianos são:

$$J_Q = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{T}_G} \quad (3.5a)$$

$$J_{Q\dot{Q}} = \frac{\partial(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial(\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C)} \quad (3.5b)$$

$$J_{Q\dot{Q}\ddot{Q}} = \frac{\partial(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial(\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_I)} \quad (3.5c)$$

Recorrendo ao modelo dinâmico clássico verifica-se que:

$$J_Q = \{[m_1 r_1 + (m_0 + m_2) l_1] (m_2 r_2 + m_0 l_2) g^2 S_1 S_{12}\}^{-1} \quad (3.6a)$$

$$J_{Q\dot{Q}} = J_Q J_{\dot{Q}} = J_Q [(2l_1 A_2 S_2)^2 \dot{q}_1 \dot{q}_{12}]^{-1} \quad (3.6b)$$

$$J_{Q\dot{Q}\ddot{Q}} = J_{Q\dot{Q}} J_{\ddot{Q}} = J_{Q\dot{Q}} \{[J_1 + (m_0 + m_2) l_1^2] (J_2 + m_0 l_2^2) - (l_1 A_2 C_2)^2\}^{-1} \quad (3.6c)$$

sendo o momento estático do segundo elo:

$$A_2 = m_2 r_2 + m_0 l_2 \quad (3.6d)$$

Estas expressões revelam que:

- Nos fenómenos gravitacionais – A maximização de  $J_Q$  estipula que  $g_Q(\mathbf{q})$  deve ter máximos em  $q_1 = \{0, \pm\pi\}$  ou  $q_{12} = \{0, \pm\pi\}$  e mínimos em  $q_1 = \pm\pi/2$  ou  $q_{12} = \pm\pi/2$ . Todavia, a "excitação" do subsistema por uma f.d.p. de acordo com estas directrizes origina histogramas de  $\mathbf{T}_G$  com picos longe da origem. De facto, conforme sugere a Figura 3.1, neste caso a maximização de  $J_Q$  conduz, no limite, à criação de impulsos de Dirac nos histogramas  $h_{T_{G1}}(T_{G1})$  e  $h_{T_{G2}}(T_{G2})$  que estão centrados em valores elevados, logo ao contrário do que seria de desejar. Consequentemente, para os binários gravitacionais, a situação inversa, ou seja, a minimização de  $J_Q$ , é a condição que traduz menores exigências colocadas aos actuadores. Assim, a consideração de f.d.p.'s  $g_Q(\mathbf{q})$  que estabeleçam máximos em  $q_1 = \pm\pi/2$  e  $q_{12} = \pm\pi/2$  e mínimos em  $q_1 = \{0, \pm\pi\}$  e  $q_{12} = \{0, \pm\pi\}$ , corresponde a minimizar solicitações sobre  $\mathbf{T}_G$ .

- Nos fenômenos Coriolis/centrípetos – A maximização de  $J\dot{Q}$  implica que  $g_Q(\mathbf{q})$  deve ter máximos em  $q_2 = \{0, \pm\pi\}$ . Conforme aponta a Figura 3.1, no limite esta condição conduz a histogramas  $h_{T_{C1}}(T_{C1})$  e  $h_{T_{C2}}(T_{C2})$  correspondentes a impulsos de Dirac centrados na origem. Por outro lado, dado que não ocorrem extremos relativos a  $\dot{\mathbf{q}}$ , não é possível apontar condições relativas a classes de f.d.p.'s  $g\dot{Q}(\dot{\mathbf{q}})$  ótimas.
- Nos fenômenos inerciais – A expressão de  $J\ddot{Q}$  revela a existência de máximos em  $q_2 = \{0, \pm\pi\}$  e de mínimos em  $q_2 = \pm\pi/2$ . O estudo experimental de cada um destes extremos demonstrou que, f.d.p.'s  $g_Q(\mathbf{q})$  com máximos em  $q_2 = \pm\pi$  e mínimo em  $q_2 = 0$  são, na realidade, aquelas que produzem histogramas  $h_{T_{I1}}(T_{I1})$  e  $h_{T_{I2}}(T_{I2})$  ótimos. Por outro lado, não existem em  $J\ddot{Q}$  extremos relativos a  $\ddot{\mathbf{q}}$ , pelo que não é possível definir classes de f.d.p.'s  $g\ddot{Q}(\ddot{\mathbf{q}})$  ótimas.

### 3.2.2. Comparação dos Fenômenos Gravitacionais, Coriolis/centrípetos e Inerciais

Este parágrafo compara as propriedades dos subsistemas  $\mathbf{q} \rightarrow T_G$ ,  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow T_C$  e  $(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) \rightarrow T_I$ . Assim, define-se um conjunto de f.d.p.'s para as v.a.e.'s de acordo com as conclusões do parágrafo anterior, de seguida "excitam-se" numericamente os subsistemas referidos para o mesmo manipulador (Tabela 3.1) e, por último, analisam-se os histogramas obtidos. Tendo em vista uma condensação dos resultados adopta-se, como já se fez para a cinemática, o interpercentil de 95% (IP<sub>95</sub>) como índice das solicitações de binários.

De acordo com a estratégia estabelecida, decidiu-se estudar o efeito das classes de f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 |S_1 S_{12}|^K \quad (3.7)$$

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |C_2|^K \quad (3.8)$$

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |\text{Sen}(q_2/2)|^K \quad (3.9)$$

onde  $K = 0, 1, 2, \dots$  e

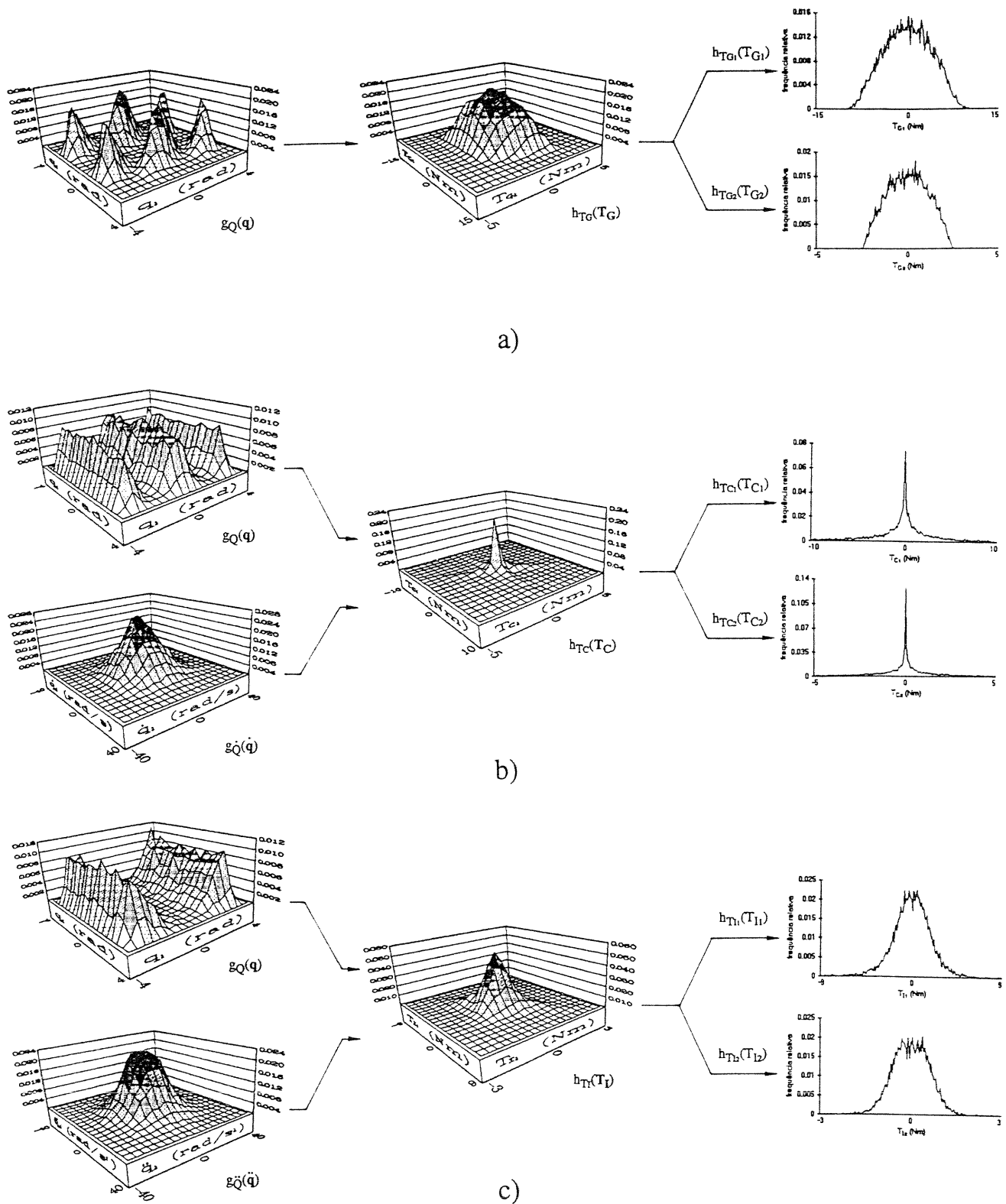


Fig. 3.2 Diagrama sinóptico da modelização dos subsistemas dinâmicos:

a) gravitacional, sujeito à f.d.p.  $g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 |S_1 S_{12}|^3$

b) Coriolis/centrípeto, sujeito às f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |C_2|^3$$

$$g_{\dot{Q}}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{Q}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2\sigma_{\dot{Q}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\dot{Q}} = 10 \text{ s}^{-1})$$

c) inercial, sujeito às f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |\text{Sen}(q_2/2)|^3$$

$$g_{\ddot{Q}}(\ddot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{Q}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2}{2\sigma_{\ddot{Q}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\ddot{Q}} = 10 \text{ s}^{-2})$$

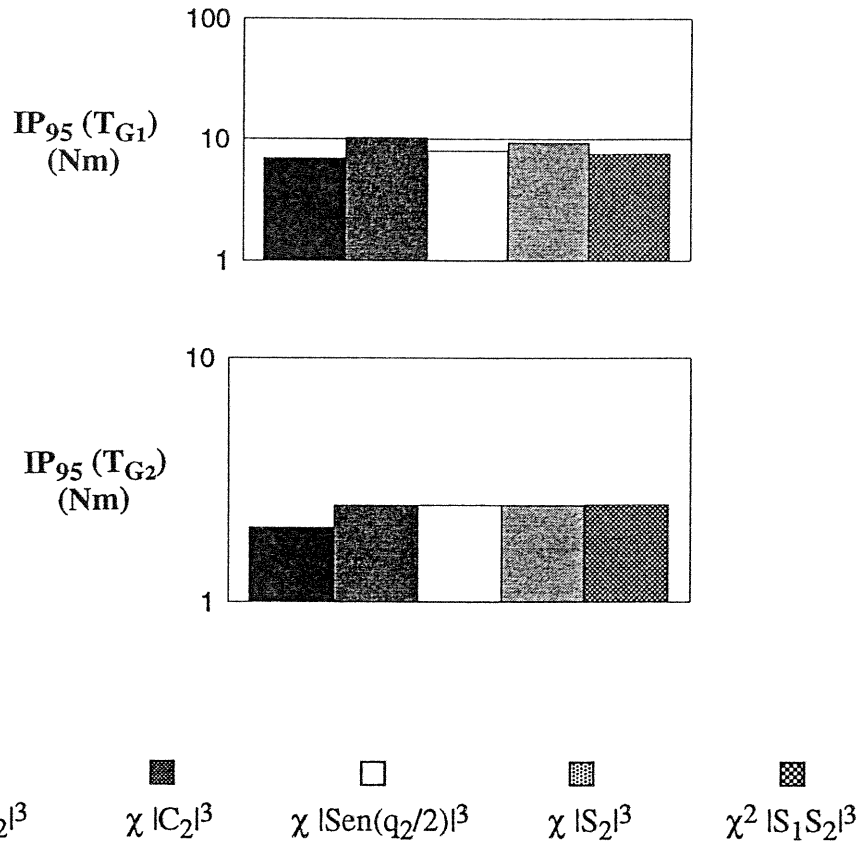


Fig. 3.3 Comparação do  $IP_{95}$  de  $T_{G1}$  e  $T_{G2}$  com  $\mathbf{q}$  sujeito às cinco f.d.p.'s (3.7) a (3.12).

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } K = 1 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 2; 4; 6 \dots \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots K}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{4} & \text{se } K = 3; 5; 7 \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

Estas expressões correspondem a classes de f.d.p.'s que optimizam os fenómenos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais, respectivamente. A Figura 3.2 mostra as respostas de cada um destes subsistemas quando sujeitos às respectivas f.d.p.'s óptimas (com  $K=3$ ) e mantendo as mesmas exigências de  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  (isto é,  $\sigma_{\dot{\mathbf{q}}} = 10 \text{ s}^{-1}$  em (3.2) e  $\sigma_{\ddot{\mathbf{q}}} = 10 \text{ s}^{-2}$  em (3.3)). Comparando estes resultados com os gráficos da Figura 3.1 verifica-se, facilmente, que existe uma diminuição das exigências sobre os binários. Por outro lado, antes de prosseguir a análise dos resultados, vamos, ainda, considerar duas f.d.p.'s suplementares:

Tabela 3.2. Exigências de  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$ .

Categorias	$\sigma_{\dot{O}_1}$	$\sigma_{\dot{O}_2}$	$\sigma_{\ddot{O}_1}$	$\sigma_{\ddot{O}_2}$
1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0.1	10
3	0.1	0.1	10	0.1
4	0.1	0.1	10	10
5	0.1	10	0.1	0.1
6	0.1	10	0.1	10
7	0.1	10	10	0.1
8	0.1	10	10	10
9	10	0.1	0.1	0.1
10	10	0.1	0.1	10
11	10	0.1	10	0.1
12	10	0.1	10	10
13	10	10	0.1	0.1
14	10	10	0.1	10
15	10	10	10	0.1
16	10	10	10	10

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |S_2|^K \quad (3.11)$$

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 |S_1 S_2|^K \quad (3.12)$$

para  $K = 0, 1, 2, \dots$

No primeiro caso, tem-se uma f.d.p. que otimiza a cinemática, enquanto que no segundo caso, se estabelece um compromisso entre a otimização da cinemática e a otimização dos fenómenos gravitacionais. Como é óbvio, neste parágrafo não se encontram em estudo quaisquer fenómenos cinemáticos pelo que poderá parecer de pouca relevância a consideração destas f.d.p.'s. No entanto, o seu estudo tem importância na preparação da secção 3.4, onde se irão considerar, simultaneamente, os fenómenos cinemáticos e dinâmicos.

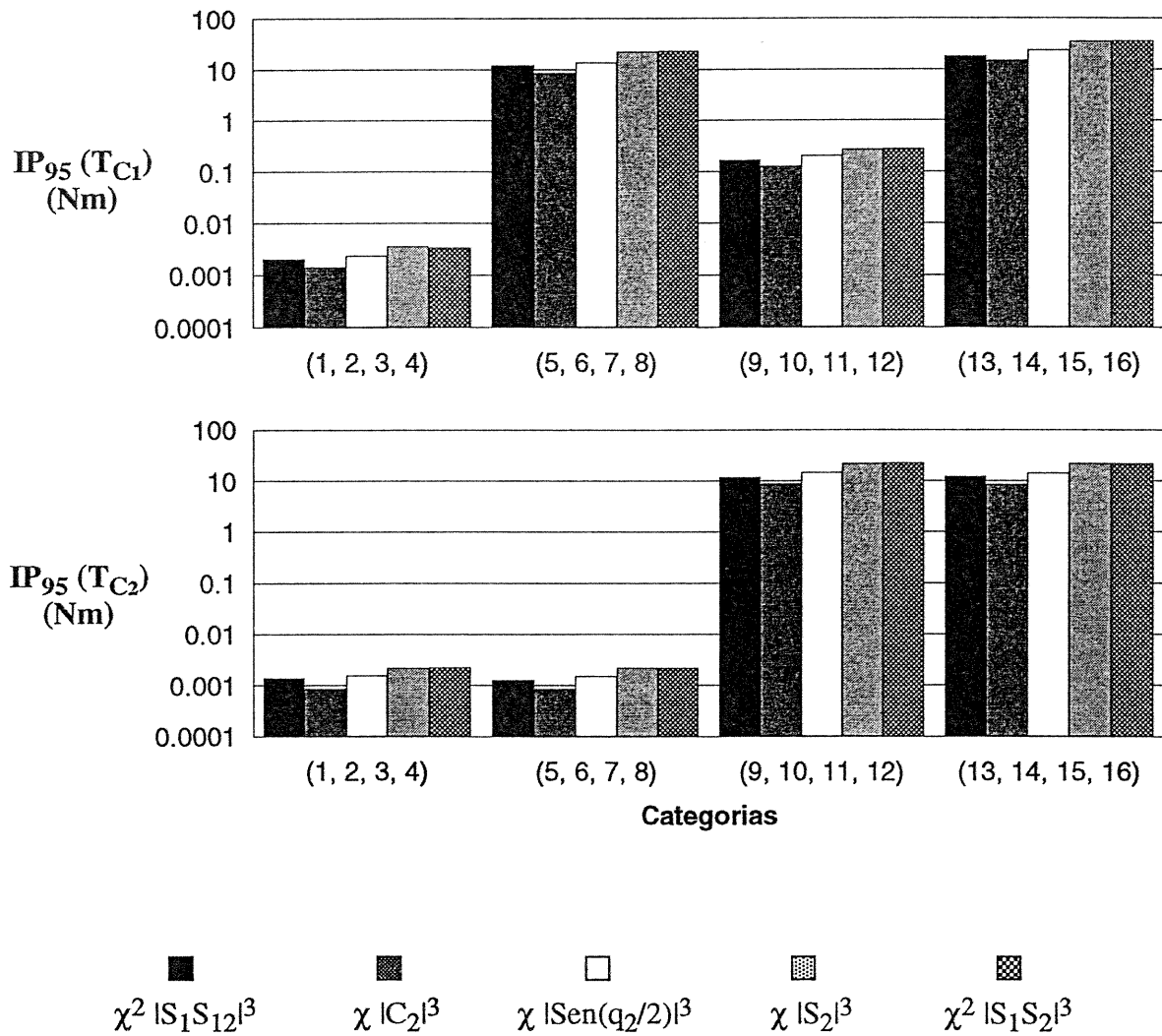


Fig. 3.4 Comparação do  $IP_{95}$  de  $T_{C1}$  e  $T_{C2}$  com  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  sujeitos às f.d.p.'s (3.7) a (3.12) e (3.2), respectivamente, para as condições indicadas na Tabela 3.2.

A Figura 3.3 mostra o desempenho do subsistema gravitacional sujeito ao estímulo das cinco f.d.p.'s indicadas. Como seria de esperar, verifica-se que a f.d.p. (3.7) é aquela que minimiza as exigências.

No tocante ao subsistema Coriolis/centrípeto o seu estudo requer a definição de  $g\dot{\mathbf{Q}}(\dot{\mathbf{q}})$ . Assim, considerando a expressão (3.2) e as categorias de exigências indicadas na Tabela 3.2, representam-se na Figura 3.4 os resultados obtidos. Para este subsistema conclui-se que:

- Como seria de esperar, a f.d.p. (3.8), é aquela que dá origem a melhores resultados.

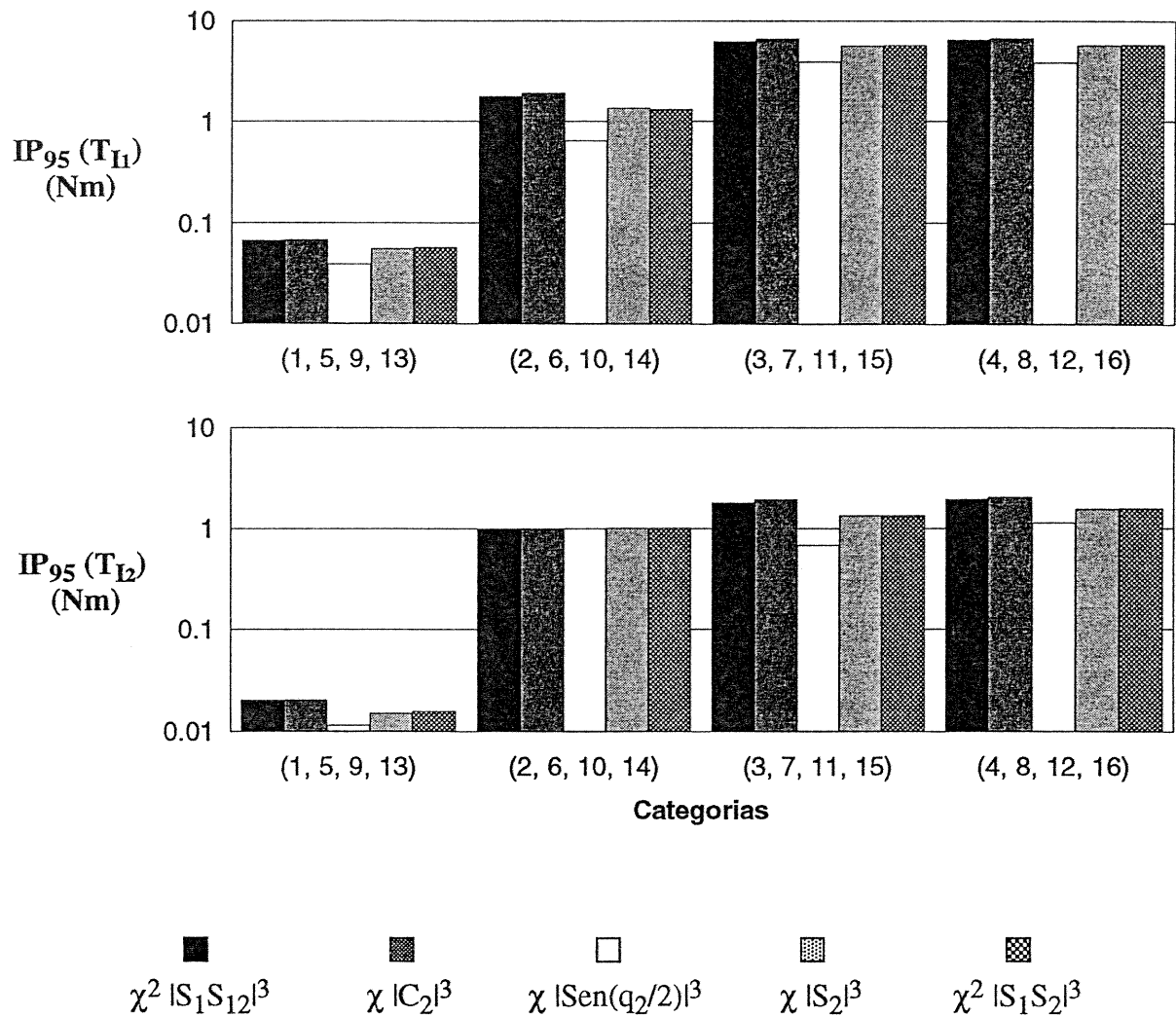


Fig. 3.5 Comparação do  $IP_{95}$  de  $T_{I1}$  e  $T_{I2}$  com  $\mathbf{q}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  sujeitos às f.d.p.'s (3.7) a (3.12) e (3.3), respectivamente, para as condições indicadas na Tabela 3.2.

- $T_{C1}$  depende quer de  $\dot{q}_1$  quer de  $\dot{q}_2$ ; contudo,  $\dot{q}_2$  tem um efeito mais pronunciado do que  $\dot{q}_1$ .
- $T_{C2}$  depende somente de  $\dot{q}_1$ .

O subsistema inercial está ilustrado na Figura 3.5. Neste caso considerou-se  $\ddot{\mathbf{q}}$  caracterizado pela f.d.p. (3.3) sujeita às categorias indicadas na Tabela 3.2. Dos gráficos podemos concluir que:

- A f.d.p. (3.9) é aquela que apresenta melhores resultados.
- $T_{I1}$  e  $T_{I2}$  dependem quer de  $\ddot{q}_1$  quer de  $\ddot{q}_2$ .
- Para valores elevados de  $\ddot{q}_1$ , a variável  $\ddot{q}_2$  tem pouca influência sobre  $T_I$ .

### 3.3. A Dinâmica de Manipuladores

Como já foi referido anteriormente, os efeitos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais são fenómenos parcelares que compõem a dinâmica. Na realidade, sabe-se que, em geral, os binários solicitados aos actuadores das articulações vêm dados pela expressão:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_G + \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_I \quad (3.13)$$

Assim, interessa avaliar o efeito conjunto dos três fenómenos, pelo que se torna necessário integrar os resultados particulares obtidos para cada subsistema. Dado que, neste caso, se tem a relação  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{T}$ , conclui-se que qualquer expressão conducente à optimização de  $\mathbf{T}$  terá que envolver as variáveis  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  interligadas pelos parâmetros característicos do braço (comprimentos, massas, inércias, etc.). Por outras palavras, para um robot com  $n$  g.d.l.'s a optimização estatística da dinâmica envolveria o cálculo de um jacobiano de ordem  $3n$ .

Tendo em vista ultrapassar cálculos laboriosos e, acima de tudo, conducentes a expressões difíceis de analisar, entendeu-se ser mais apropriado desenvolver uma metodologia de trabalho mais consentânea com o espírito "experimentalista" da modelização estatística. Deste modo, decidiu-se avaliar, numericamente, o peso relativo dos três subsistemas. No caso de algum subsistema ser preponderante numa dada situação, então é lícito estender as conclusões estabelecidas do fenómeno parcelar ( $\mathbf{T}_G$ ,  $\mathbf{T}_C$  ou  $\mathbf{T}_I$ ) para o fenómeno global ( $\mathbf{T}$ ). Trata-se de uma estratégia heurística, logo aproximada, contudo, é intuitiva e, como iremos ver, conduz a resultados claros e imediatos.

Na perspectiva de experimentação numérica de integração dos resultados parcelares, "excitou-se" a dinâmica (total) com as f.d.p.'s  $g_Q(\mathbf{q})$ ,  $g\dot{Q}(\dot{\mathbf{q}})$  e  $g\ddot{Q}(\ddot{\mathbf{q}})$  estabelecidas anteriormente de acordo com o padrão representado na Figura 3.6. Os histogramas de  $T_1$  e  $T_2$ , condensados através do IP<sub>95</sub>, estão representados na Figura 3.7, para dezasseis categorias de exigências de  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  (Tabela 3.2). A partir dos gráficos pode concluir-se desde logo que:

- $T_1$  depende fortemente de  $\dot{q}_2$  e, em contrapartida,  $T_2$  depende fortemente de  $\dot{q}_1$ .
- $T_1$  e  $T_2$  são pouco sensíveis em relação a  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

Por outro lado, quando se estuda a influência de  $g_Q(\mathbf{q})$  verifica-se que:



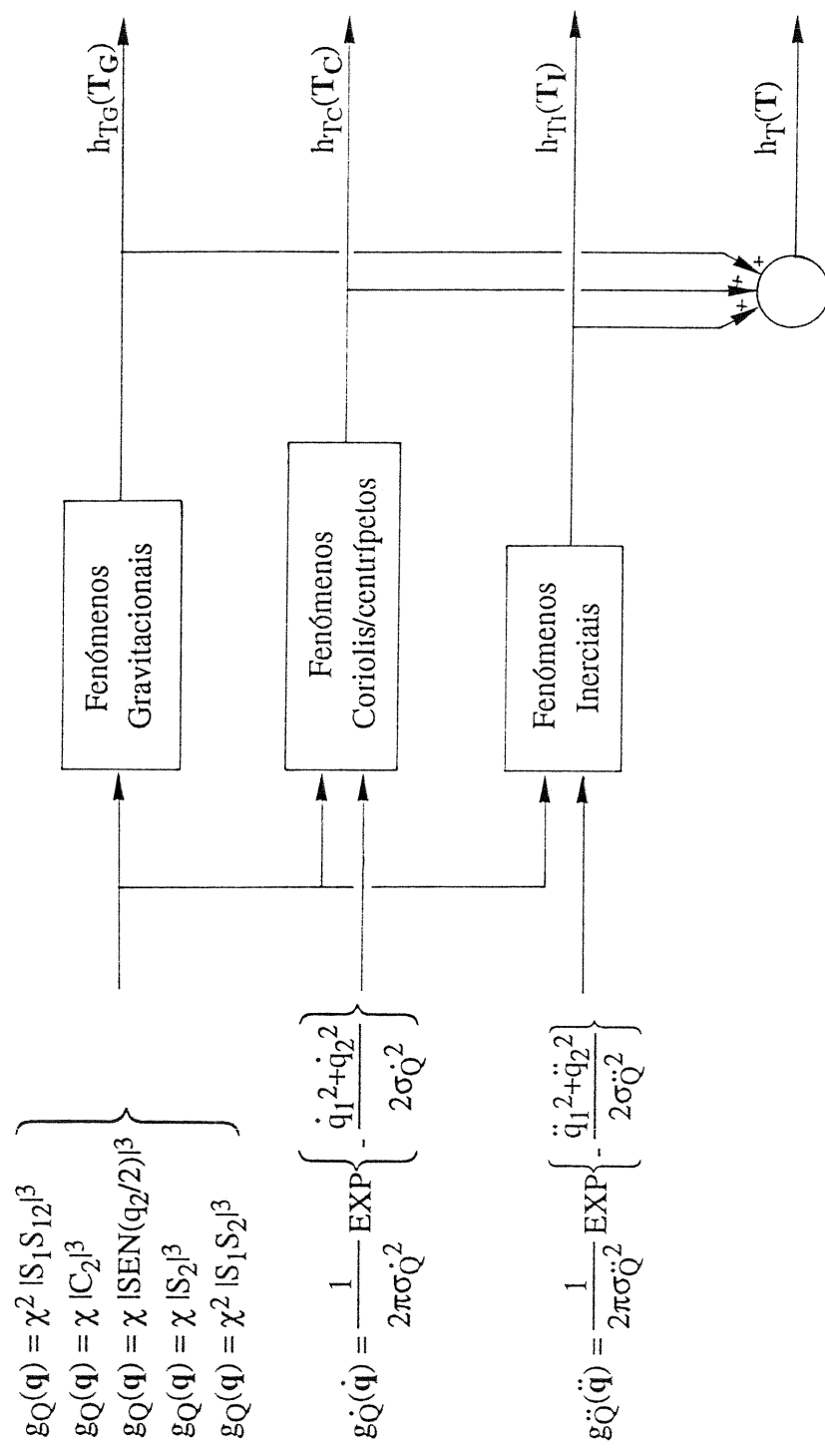


Fig. 3.6 Padrão de excitação da dinâmica pelas v.a.e.'s  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$ .

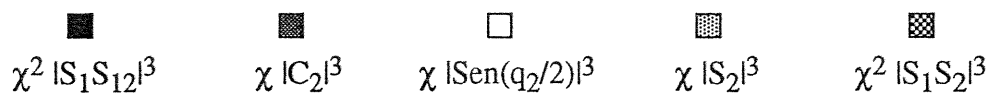
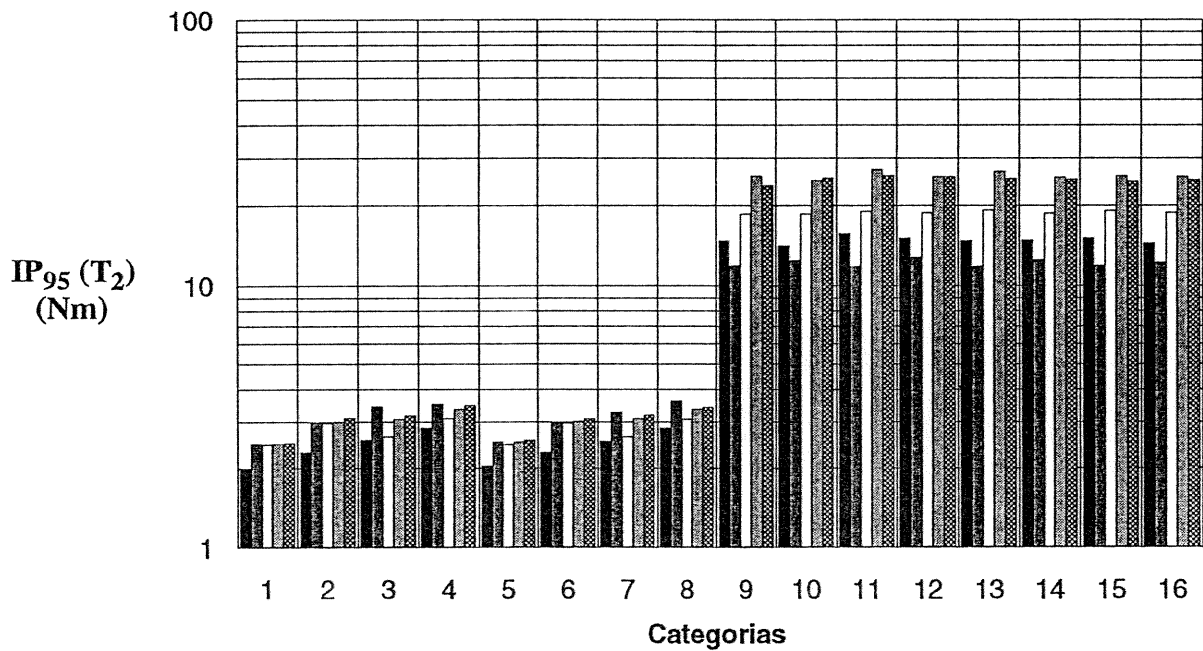
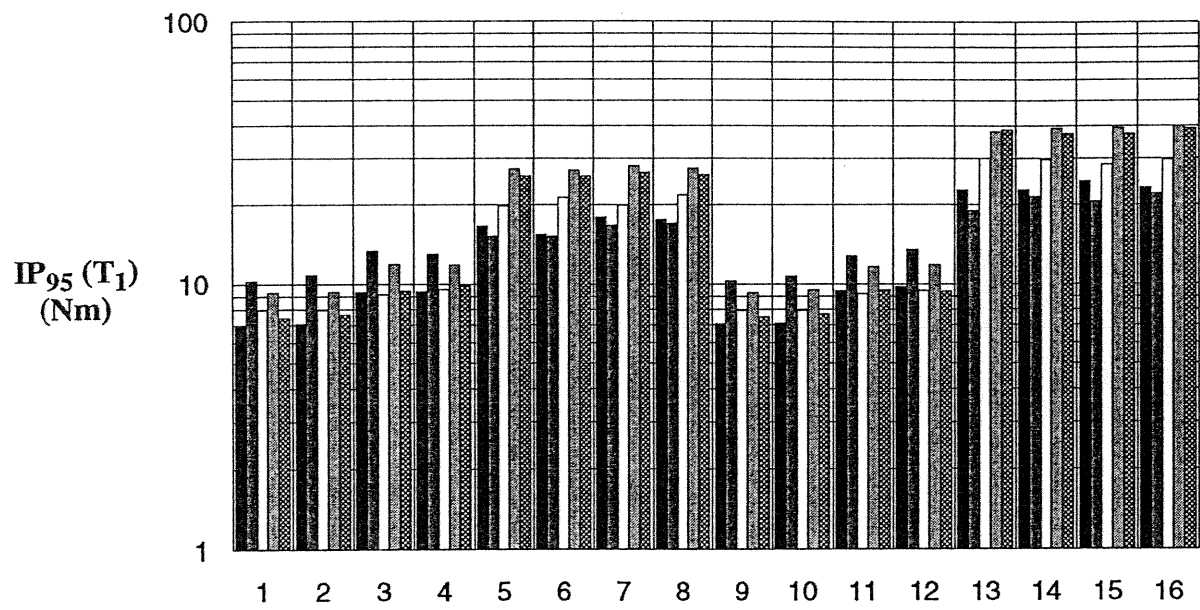


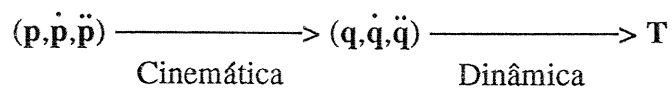
Fig. 3.7 Comparação do IP<sub>95</sub> de T<sub>1</sub> e T<sub>2</sub> para o sistema dinâmico com  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  sujeitos às f.d.p.'s (3.7) a (3.12), (3.2) e (3.3), respectivamente, de acordo com as dezesseis categorias de exigências indicadas na Tabela 3.2.

- As f.d.p.'s (3.11) e (3.12) traduzem configurações pouco apropriadas à optimização da dinâmica. Este resultado era previsível já que, neste conjunto de experiências, não está incluído qualquer fenómeno cinemático.
- As f.d.p.'s (3.7), (3.8) e (3.9) optimizam situações onde predominam os fenómenos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais, respectivamente, o que está de acordo com o estudo anterior.
- Os fenómenos gravitacionais têm sempre um peso significativo nos binários totais.
- A consideração de uma expressão óptima para  $g_Q(\mathbf{q})$ , que optimizasse simultaneamente todas as variáveis em jogo, traria ganhos adicionais pouco relevantes, já que a dinâmica manifesta pouca sensibilidade às diferentes f.d.p.'s (3.7), (3.8) e (3.9).

Em resumo, o estudo estatístico revela que a natureza multidimensional da dinâmica, onde coexistem fenómenos de natureza diversa, afasta o aparecimento de configurações nitidamente óptimas. Assim, uma vez que a dinâmica só manifesta uma sensibilidade assinalável relativamente a exigências em  $\dot{\mathbf{q}}$  ou aos fenómenos gravitacionais, resta encontrar em que medida estas propriedades são compatíveis com os fenómenos cinemáticos.

### 3.4. O Sistema Cinemático-Dinâmico de Manipuladores

Nesta secção avalia-se o peso relativo, isto é, estuda-se a acção simultânea, dos sistemas cinemático e dinâmico, sistema que passaremos a designar por cinemático-dinâmico. Devido à inclusão da cinemática torna-se necessário redefinir os conjuntos das v.a.e.'s e das v.a.s.'s de acordo com o diagrama:



Assim, deve considerar-se a descrição estatística, ou seja através de f.d.p.'s, das variáveis:

- $\{\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}\}$  – V.a.e.'s correspondentes às posições, velocidades e acelerações solicitadas aos manipuladores no espaço operacional.

**Tabela 3.3. Exigências de  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$ .**

<b>Categorias</b>	<b><math>\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}</math></b>	<b><math>\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}</math></b>
<b>1</b>	0.1	0.1
<b>2</b>	0.1	1
<b>3</b>	0.1	10
<b>4</b>	1	0.1
<b>5</b>	1	1
<b>6</b>	1	10
<b>7</b>	10	0.1
<b>8</b>	10	1
<b>9</b>	10	10

- $\{\mathbf{T}\}$  – V.a.s.'s correspondentes às forças/binários desenvolvidos pelos actuadores nas articulações em resposta às exigências.

Dado que o modelo clássico que descreve o sistema cinemático-dinâmico é complexo, entendeu-se ser conveniente investigar as propriedades através de um estudo puramente numérico e experimental. Nesta ordem de ideias, excitou-se o sistema com uma amostra em  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  obedecendo às f.d.p.'s gaussianas:

$$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (3.14)$$

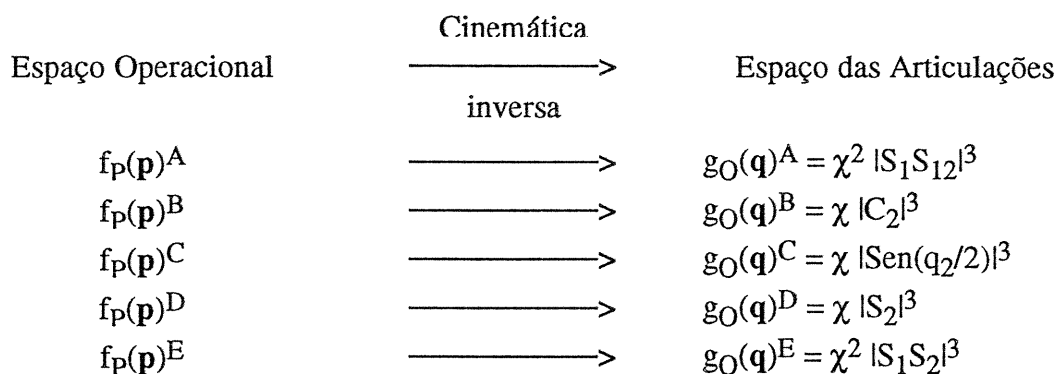
$$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (3.15)$$

de acordo com as exigências referidas na Tabela 3.3. No tocante a  $\mathbf{p}$  decidiu-se investigar os desempenhos das cinco f.d.p.'s (expressões 3.7 a 3.12) já consideradas no estudo da dinâmica. Estas expressões estão definidas no espaço das articulações, pelo que, no caso presente, é necessário redefini-las no espaço operacional usando a relação:

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = |J_{\mathbf{Q}}| g_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) \quad (3.16a)$$

$$J_Q = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.16b)$$

No entanto, as expressões analíticas resultantes são muito complexas pelo que, nos limitaremos a designá-las simbolicamente de acordo com o diagrama:



A Figura 3.8 mostra, graficamente, as propriedades destas f.d.p.'s. Uma vez definidas as f.d.p.'s das v.a.e.'s  $\mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  podemos excitar o sistema cinemático-dinâmico e analisar as v.a.s.'s  $\mathbf{T}$ , conforme representado na Figura 3.9. A condensação dos histogramas de  $T_1$  e  $T_2$  através do IP<sub>95</sub> proporciona os gráficos da Figura 3.10. Estes resultados permitem concluir que:

- Para valores baixos de  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$  os binários gravitacionais são a componente predominante.
- Solicitações sobre  $\ddot{\mathbf{p}}$  têm uma influência muito menos pronunciada que solicitações sobre  $\dot{\mathbf{p}}$ . De facto, enquanto que  $\ddot{\mathbf{p}}$  influencia somente  $\ddot{\mathbf{q}}$  e, conseqüentemente  $\mathbf{T}_I$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$  tem influência quer sobre  $\dot{\mathbf{q}}$  quer sobre  $\ddot{\mathbf{q}}$  ou seja, condiciona simultaneamente  $\mathbf{T}_C$  e  $\mathbf{T}_I$ .
- Os fenómenos cinemáticos prevalecem sobre os fenómenos dinâmicos, isto é, os primeiros têm um efeito muito mais significativo que os segundos. Este resultado era de esperar, pois enquanto que para a cinemática se encontrou uma optimização comum para todas as variáveis, na dinâmica a optimização dos fenómenos parcelares revelou-se sujeita a condições diferentes. Assim,  $f_p(\mathbf{p})^E$  mostra ser, de entre as f.d.p.'s consideradas, aquela que conduz a melhores desempenhos.

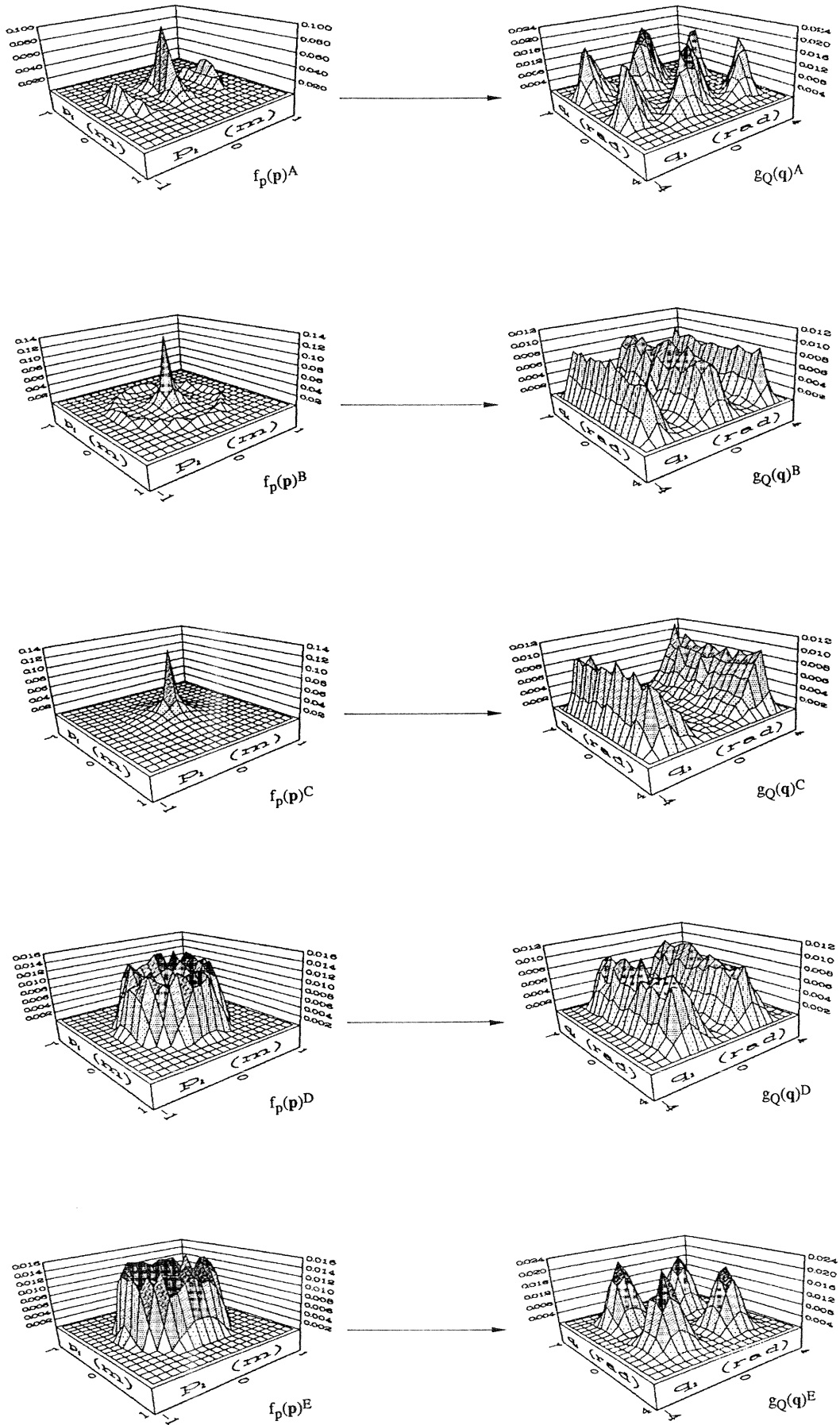
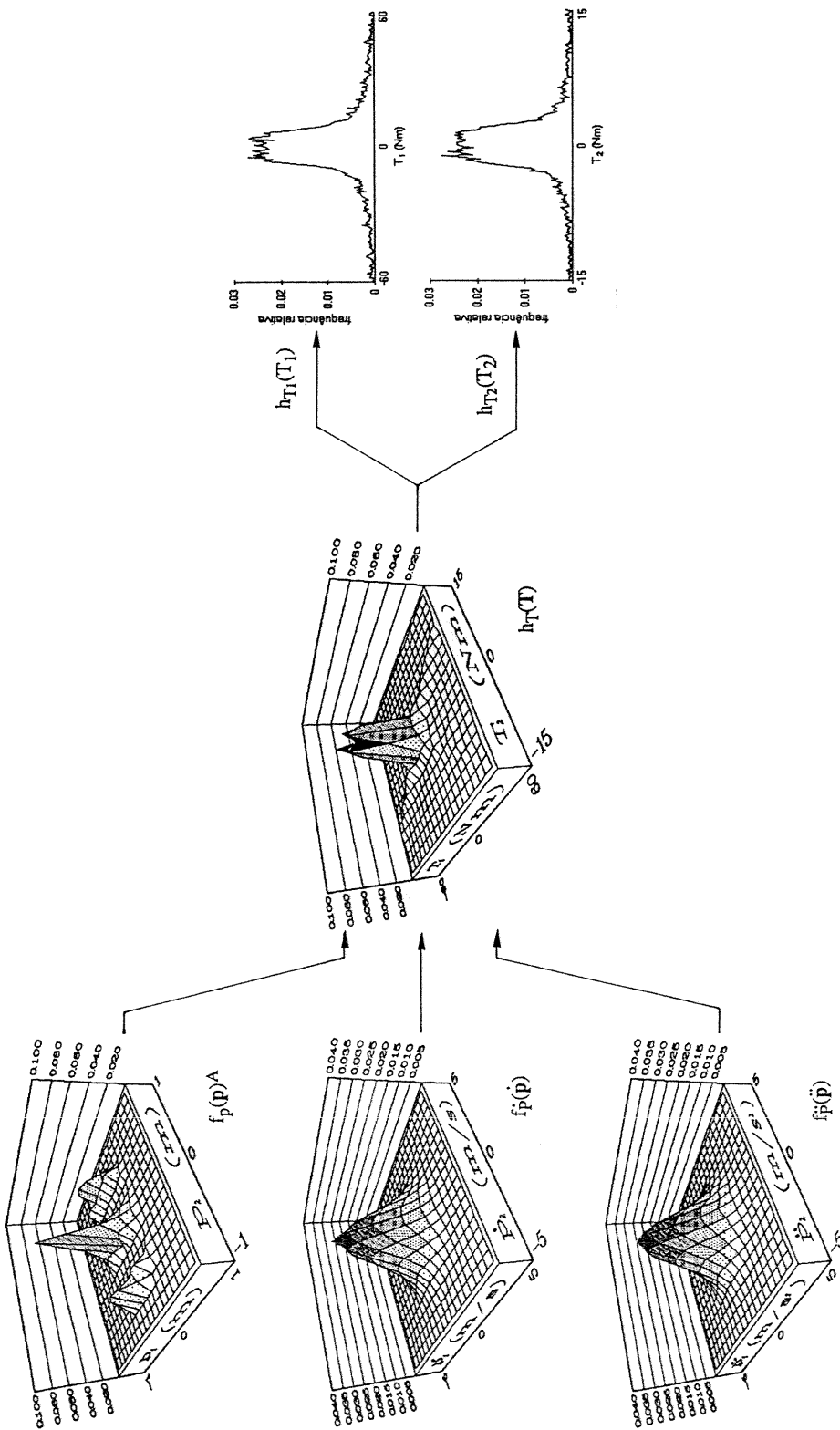


Fig. 3.8 Representação no espaço operacional e no espaço das articulações das cinco f.d.p.'s das posições.



a)

Fig. 3.9 a) Diagrama sinóptico da modelização do sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s:

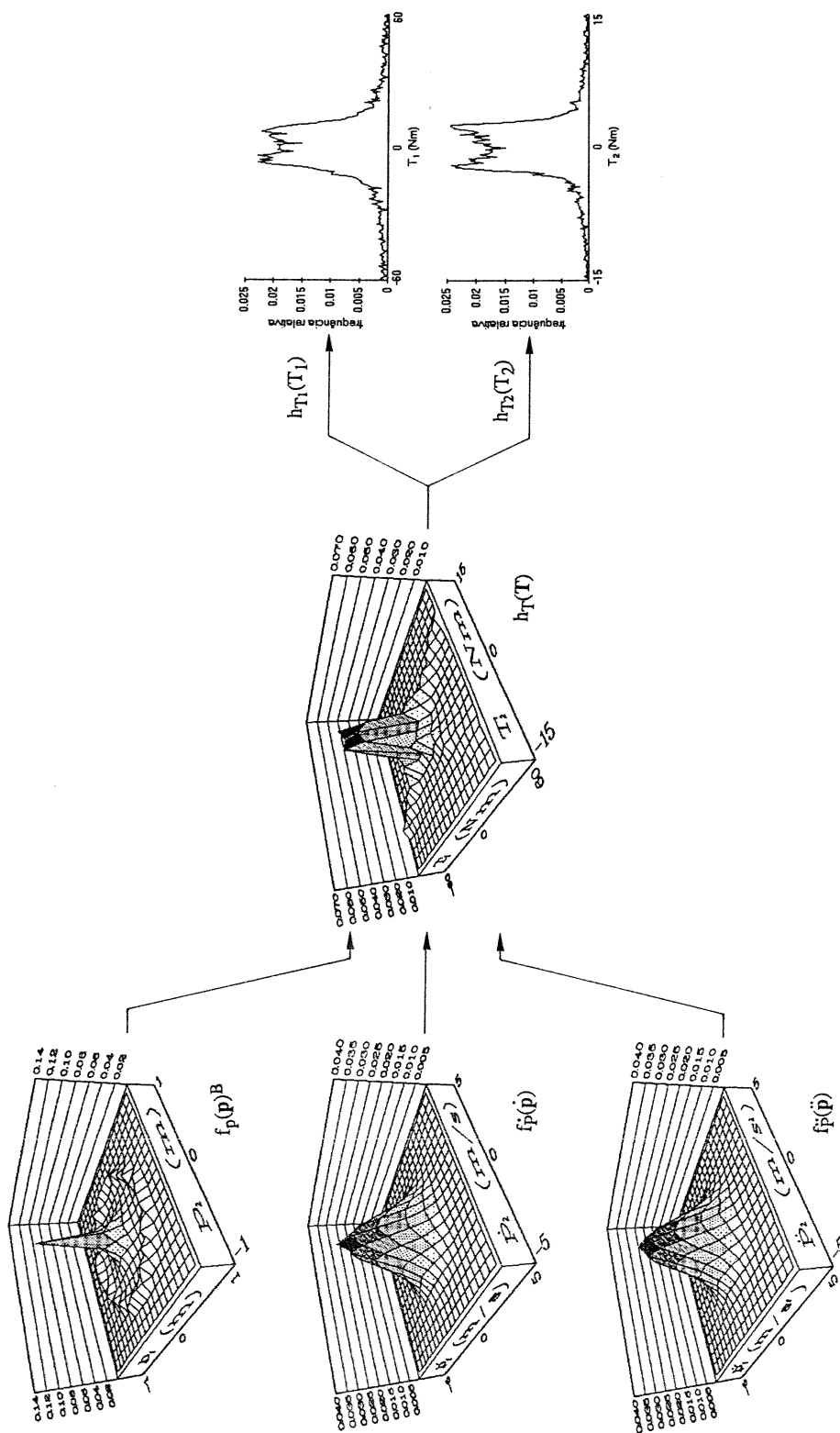
$$f_p(\mathbf{p})^A$$

$$f_{\dot{p}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{p}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{p}}^2} \right\}$$

(com  $\sigma_{\dot{p}} = 1 \text{ ms}^{-1}$ )

$$f_{\ddot{p}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{p}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{p}}^2} \right\}$$

(com  $\sigma_{\ddot{p}} = 1 \text{ ms}^{-2}$ )



b)

Fig. 3.9 b) Diagrama sinótico da modelização do sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p. :

$f_p(\mathbf{p})^B$

$$f_{\dot{p}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{p}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{p}}^2} \right\}$$

(com  $\sigma_{\dot{p}} = 1 \text{ ms}^{-1}$ )

$$f_{\ddot{p}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{p}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{p}}^2} \right\}$$

(com  $\sigma_{\ddot{p}} = 1 \text{ ms}^{-2}$ )



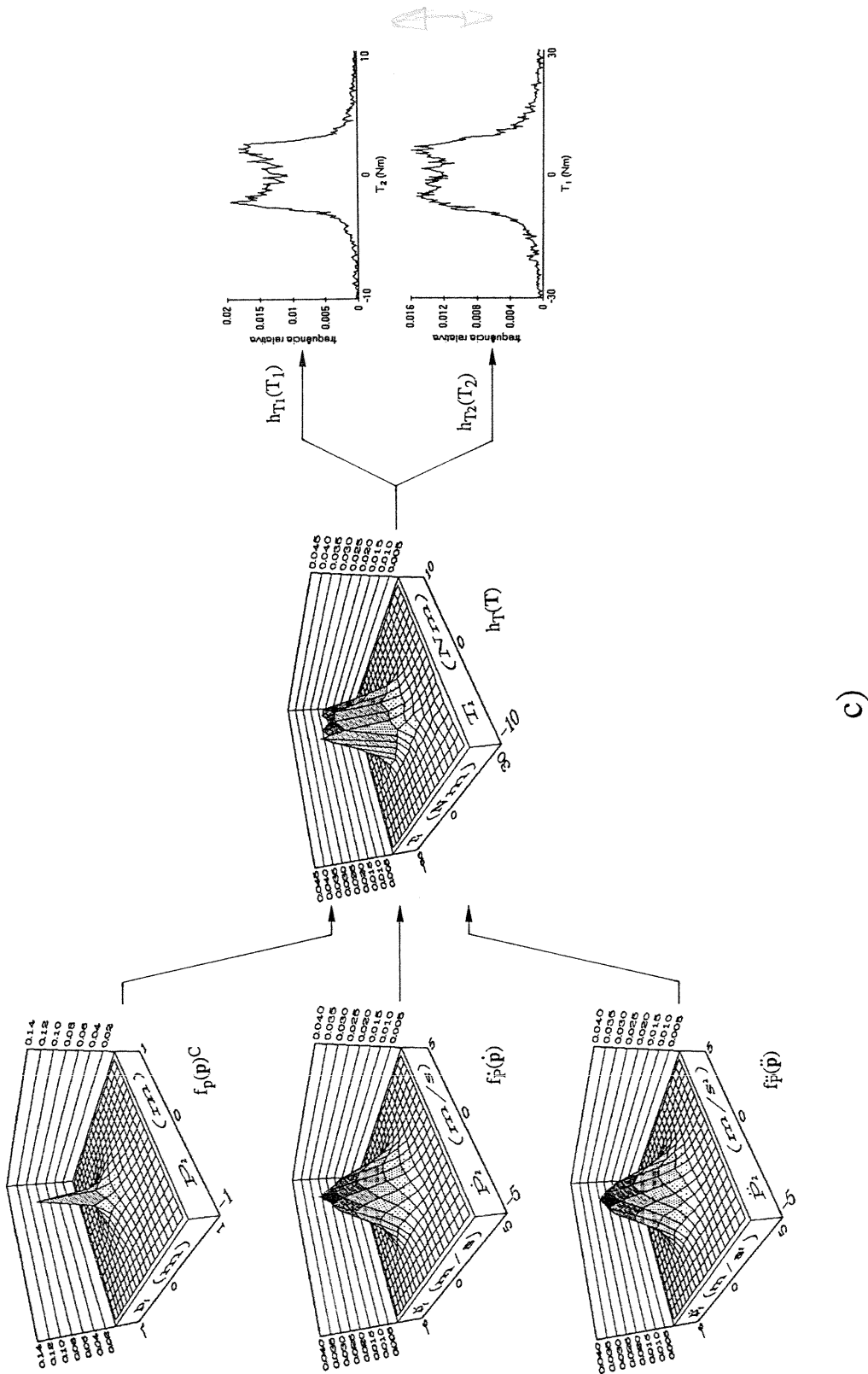
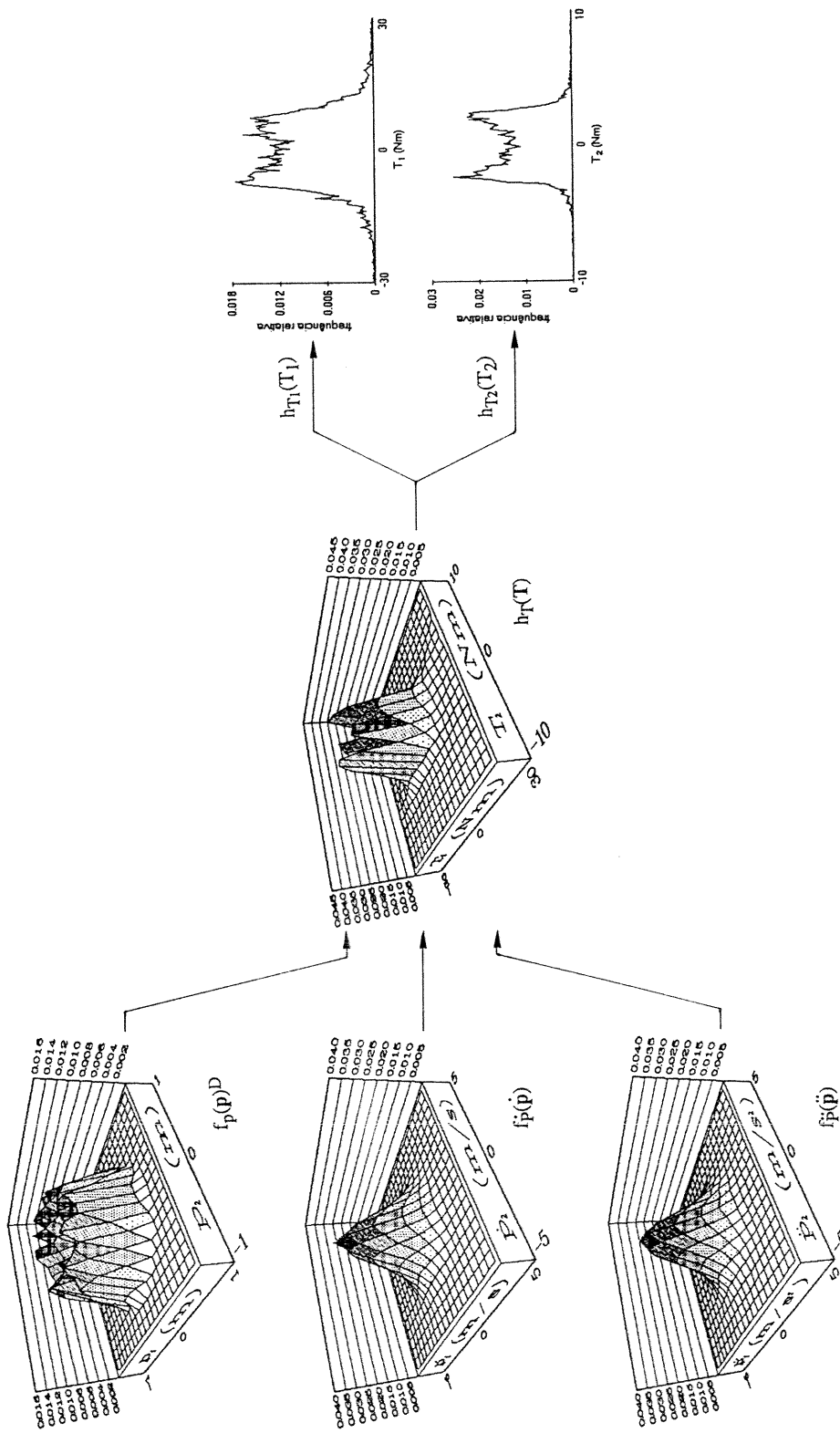


Fig. 3.9 c) Diagrama sinóptico da modelização do sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s:

$$f_p(\mathbf{p})C = \frac{1}{2\pi\sigma\dot{p}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma\dot{p}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma\dot{p} = 1 \text{ ms}^{-1})$$

$$f_p(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma\ddot{p}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma\ddot{p}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma\ddot{p} = 1 \text{ ms}^{-2})$$

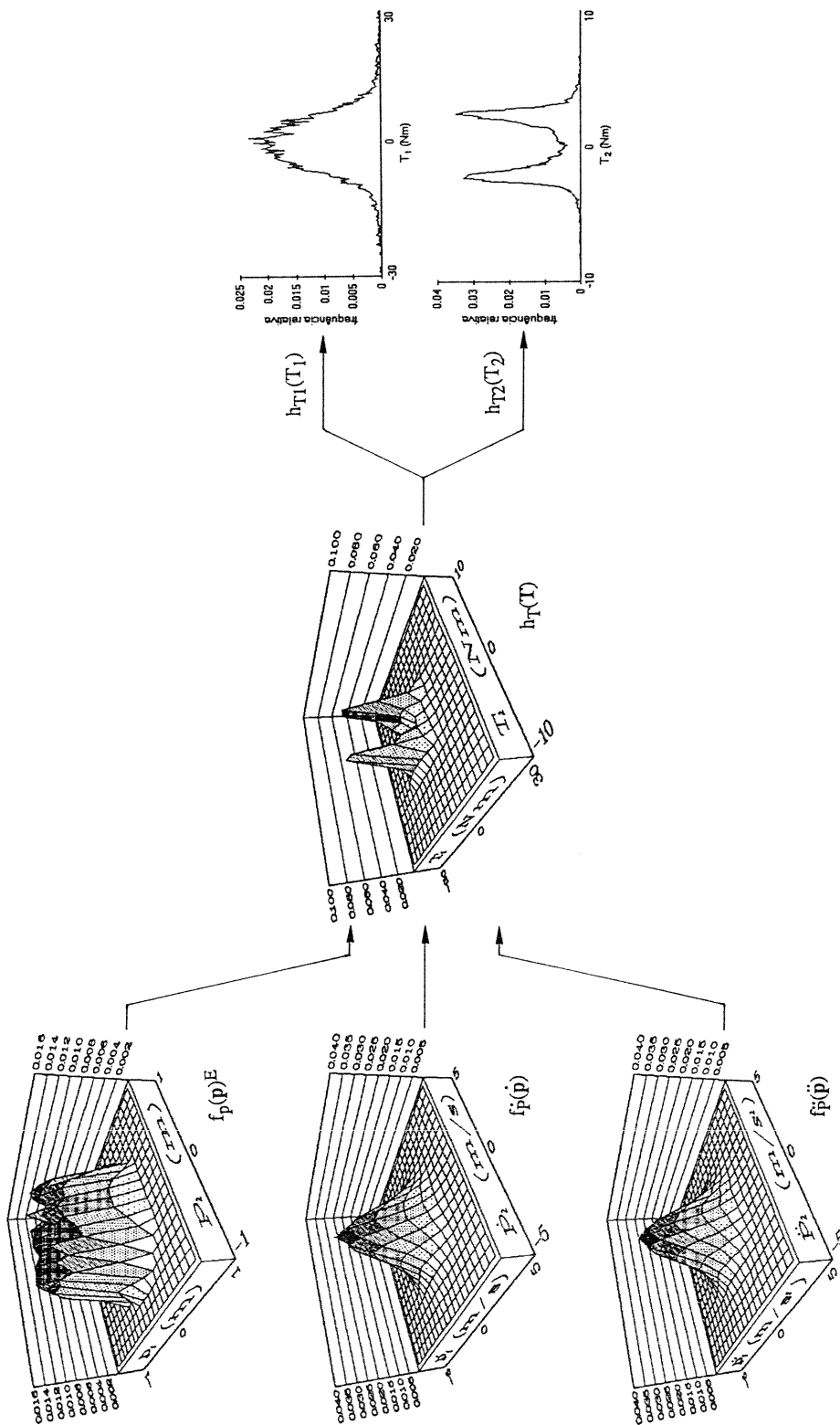


d)

Fig. 3.9 d) Diagrama sinóptico da modelização do sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s:

$$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\dot{\mathbf{p}}} = 1 \text{ ms}^{-1})$$

$$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\ddot{\mathbf{p}}} = 1 \text{ ms}^{-2})$$



e)

Fig. 3.9 e) Diagrama sinóptico da modelização do sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s :

$f_p(\mathbf{p})^E$

$$f_{\dot{p}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{p}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{p}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\dot{p}} = 1 \text{ ms}^{-1})$$

$$f_{\ddot{p}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{p}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{p}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\ddot{p}} = 1 \text{ ms}^{-2})$$

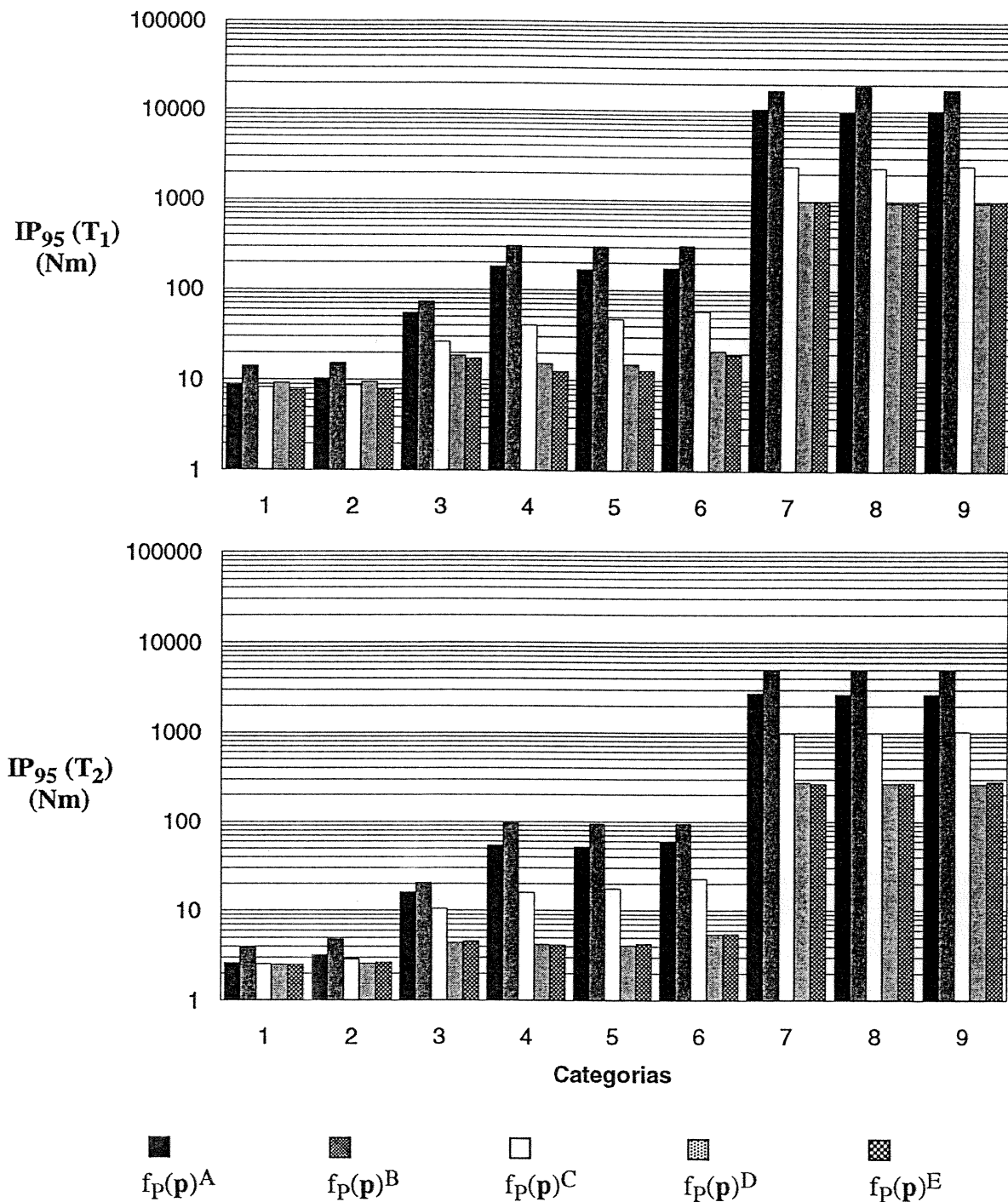


Fig. 3.10 Comparação do  $IP_{95}$  de  $T_1$  e  $T_2$  para o sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s:

$\{f_p(\mathbf{p})^A, f_p(\mathbf{p})^B, f_p(\mathbf{p})^C, f_p(\mathbf{p})^D, f_p(\mathbf{p})^E\}$

$$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \right\}$$

$$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \right\}$$

de acordo com as nove categorias de exigências indicadas na Tabela 3.3.

Em conclusão, pode-se dizer que o estudo estatístico revela o peso relativo dos fenómenos cinemáticos e dinâmicos, nomeadamente demonstrando a preponderância da cinemática. Além disso, clarifica a problemática concernente ao peso relativo dos vários fenómenos em jogo. Verifica-se que os fenómenos gravitacionais estão sempre presentes e constituem uma parcela assinalável das exigências colocadas aos actuadores, enquanto que os fenómenos Coriolis/centrípetos e inerciais só adquirem relevância na medida em que a cinemática "amplifica" solicitações de  $\dot{p}$ . Por outro lado, mostra-se que os manipuladores são sistemas que, intrinsecamente, têm um funcionamento transitório onde existem solicitações de acelerações/desacelerações. Assim, a realização de tarefas no espaço operacional é tanto mais exigente (isto é, requerendo binários elevados) quanto mais frequentemente solicitar altas velocidades. Deste modo, podemos dizer que um manipulador é um sistema de "posicionamento através de transitórios com acelerações/desacelerações" e não um sistema adaptado a "velocidades em regime permanente".

### 3.5. Conclusões

A dinâmica de manipuladores robóticos descreve fenómenos relativamente aos quais existe um conhecimento científico restrito. As limitações verificadas devem-se não somente à dificuldade de obtenção do modelo mas, sobretudo, à complexidade da sua análise. De facto, ultrapassada que foi, através do cálculo automático por computador, a barreira dos cálculos laboriosos – praticamente impossíveis de realizar manualmente para um robot industrial – conducentes às equações diferenciais da dinâmica, restam as tarefas de estimar os valores numéricos dos múltiplos parâmetros e a posterior análise das equações. Para um manipulador com  $n$  g.d.l.'s estão envolvidas  $3n$  variáveis independentes e  $n$  variáveis dependentes; conseqüentemente, a análise das equações da dinâmica tem-se revelado difícil e as conclusões preliminares apontadas por alguns investigadores são contraditórias e ambíguas. O estudo efectuado ultrapassa estes problemas através da adopção de uma estratégia "experimentalista". Esta perspectiva baseia-se no desenvolvimento de um modelo estatístico, o qual se revela eficaz no tratamento de dados provenientes de um fenómeno com natureza multidimensional. Assim, a observação de histogramas correspondentes a f.d.p.'s marginais conduz a conclusões claras e inequívocas mantendo, todavia, a sua generalidade. Deste

modo, demonstra-se que os manipuladores robóticos são sistemas bem adaptados a posicionamento envolvendo transitórios com elevadas acelerações e desacelerações. Por outro lado, a consideração de operações perspectivadas para velocidades elevadas em regime permanente manifesta-se desadequada para este tipo de sistemas requerendo, conseqüentemente, a utilização de máquinas concebidas segundo uma filosofia diferente. Estas conclusões têm implicações não somente na especificação das tarefas a atribuir ao robot, mas também no desenvolvimento de algoritmos de planeamento de trajectórias e na concepção de novas estruturas mecânicas e respectivos actuadores.

### 3.6. Referências

- [3.1] H. Asada, "A Geometrical Representation of Manipulator Dynamics and its Application to Arm Design", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 105, pp. 131-142, Sept. 1983.
- [3.2] J. K. Salisbury e J. D. Abramowitz, "Design and Control of a Redundant Mechanism for Small Motion," IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, St. Louis, USA 1985.
- [3.3] T. Yoshikawa, "Dynamic Manipulability of Articulated Robot Arms", Proc. 15<sup>th</sup> ISIR, pp. 879-886, Tokyo, Japan, 1985.
- [3.4] T. Yoshikawa, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators", Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, St. Louis, USA, 1985.
- [3.5] T. Yoshikawa, "Analysis and Design of Articulated Robot Arms from the Viewpoint of Dynamic Manipulability", Robotics Research, The Third Int. Symp., pp. 273-279, 1986.
- [3.6] Oussama Khatib, "The Operational Space Formulation in the Analysis, Design and Control of Robot Manipulators", Robotics Research, The Third Int. Symp., pp. 273-279, 1986.
- [3.7] D.C.H. Yang e S.W. Tzeng, "Simplification and Linearization of Manipulator Dynamics by the Design of Inertia Distribution", The Int. J. Robotics Research, vol. 5, pp. 120-128, Fall 1986.
- [3.8] K. Youcef-Toumi e H. Asada, "The Design of Open-Loop Manipulator Arms with Decoupled and Configuration-Invariant Inertia Tensors", Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, San Francisco, USA, 1986.

- [3.9] K. Youcef-Toumi e H. Asada, "The Design and Control of Manipulators with Decoupled and Configuration-Invariant Inertia Tensors", Proc. American Control Conference, Seattle, USA, 1986.
- [3.10] K. Youcef-Toumi e H. Asada, "The Design of Open-Loop Manipulator Arms with Decoupled and Configuration-Invariant Inertia Tensors", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 109, pp. 268-275, Sept. 1987.
- [3.11] W. Homsup e J. N. Anderson, "Performance Evaluation of Robotic Mechanisms," Proc. American Control Conference, Seattle, USA, 1986.
- [3.12] A. Peltomaa e H. N. Koivo, "Compensation of Nonlinearities and Interactions in Robotic Manipulators," Proc. IFAC 1<sup>st</sup> Symp. on Robot Control, pp. 419-424, Barcelona, Spain, 1985.
- [3.13] A. Peltomaa e H. N. Koivo, "A Method for the Dynamic Analysis of Industrial Robots," Proc. 10th IFAC World Congress on Automatic Control, Munich, F.R.G., 1987.
- [3.14] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "Statistical Modelling of Robot Manipulators," IEEE International Workshop on Intelligent Motion Control, Istambul, Turquia, 1990.
- [3.15] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L. Martins de Carvalho e J.A. Tenreiro Machado, "On the Statistical Modelling of Robot Manipulators," 33rd Midwest Symposium on Circuits and Systems, Calgary, Alberta, Canadá, 1990.
- [3.16] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "Towards the Statistical Modelling of Robotic Manipulators", IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference MELECON'91, Ljubljana, Yugoslávia, 1991.
- [3.17] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L. Martins de Carvalho e J.A. Tenreiro Machado, "On the Statistical Analysis of Mechanical Manipulators", convidado para o 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, Dublin, Irlanda, 1991.
- [3.18] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "On the Statistical Modelling of Mechanical Manipulators", IFAC Symposium on Robot Control SYROCO'91, Viena, Áustria, 1991.
- [3.19] V. Scheinman e B. Roth, "On the Optimal Selection and Placement of Manipulators," Proc. RoManSy, Udine, Italy, 1984.
- [3.20] J.M. Hollerbach, "Dynamic Scaling of Manipulator Trajectories", ASME J. Dynamic Syst. Meas. Contr., vol. 106, pp. 102-106, March, 1984.

- [3.21] Gideon Sahar e John M. Hollerbach, "Planning of Minimum-Time Trajectories for Robot Arms", Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, St. Louis, USA, 1985.
- [3.22] Gideon Sahar e John M. Hollerbach, "Planning of Minimum-Time Trajectories for Robot Arms", The Int. J. Robotics Research, vol. 5, n° 3 Fall, pp. 90-99, 1986.



## **4. Novas Estruturas para Manipuladores Robóticos**

*"Acaso é o pseudónimo de Deus quando Ele não quis assinar."  
(Anatole France)*

## **4. Novas Estruturas para Manipuladores Robóticos**

### **4.1. Introdução**

A nível industrial o sistema robótico adoptado mais frequentemente consiste, simplesmente, num manipulador mecânico que pretende realizar uma cópia do braço humano. Ainda assim, um manipulador robótico, mero subsistema de um "verdadeiro" robot, coloca problemas complexos quanto ao desenvolvimento da estrutura mecânica, dos actuadores e do controlo. Na realidade, os manipuladores mecânicos actuais são mais o resultado da aplicação de regras elementares de engenharia e do bom senso, do que o produto de um estudo sistemático dos diversos factores em jogo. O estudo das propriedades cinemáticas e dinâmicas evidenciadas por esses sistemas mecânicos indica que um desempenho superior passa pelo desenvolvimento de estruturas baseadas em novos conceitos. Nesta ordem de ideias, estão em curso diversos estudos envolvendo métodos de projecto e análise das propriedades dos manipuladores [4.1-4.5] e a formulação de novas estruturas de manipuladores mecânicos [4.6-4.9].

Tendo por inspiração o braço humano, o presente capítulo relata a investigação que tem vindo a ser realizada nesta área bem como as perspectivas de desenvolvimento futuro. Assim, o estudo está organizado em cinco secções. A secção 4.2 debruça-se sobre as vantagens e inconvenientes de várias estruturas mecânicas de manipuladores. Motivada por esta análise, a secção 4.3 apresenta a formulação de uma estrutura alternativa que reflecte as capacidades evidenciadas pelos sistemas biomecânicos. Na secção 4.4 analisa-se, estatisticamente, a cinemática e a dinâmica de manipuladores com actuadores similares a músculos. Finalmente, na secção 4.5, tiram-se as conclusões que decorrem do estudo efectuado e apontam-se pistas possíveis para o trabalho futuro.

### **4.2. Algumas Considerações Sobre a Estrutura dos Manipuladores Robóticos**

O manipulador robótico representa uma ferramenta mecânica que se assemelha ao braço humano. Esta caracterização leva a questionar até que ponto a ferramenta é eficiente e quais as técnicas a adoptar com vista à sua optimização. A resposta científica a esta questão consiste na formulação de modelos baseados na

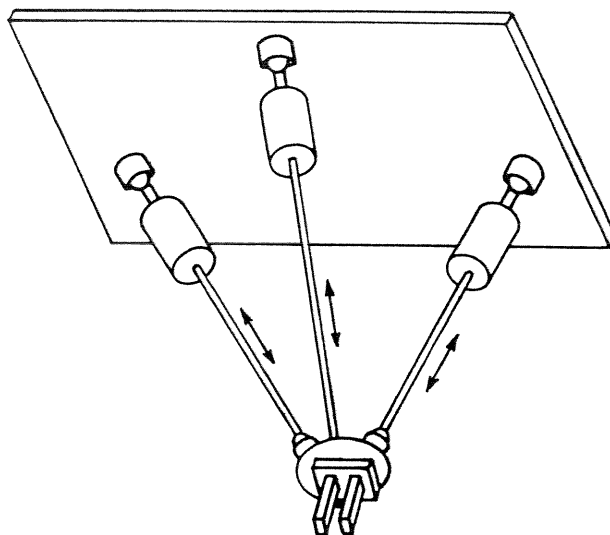


Fig. 4.1 Manipulador robótico com estrutura paralela.

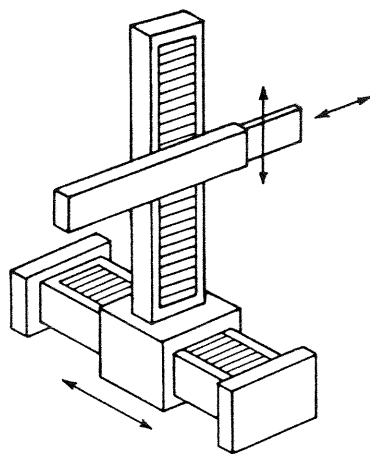
física e na matemática e na análise das suas propriedades. Tendo em vista estas considerações, no parágrafo 4.2.1 faz-se um levantamento, caracterizando geometricamente as estruturas de manipuladores que faz sentido considerar. Com base neste levantamento, nos parágrafos 4.2.2 e 4.2.3 estuda-se a cinemática e dinâmica das estruturas mais relevantes e tecem-se algumas conclusões sobre as limitações encontradas, respectivamente.

#### 4.2.1. Caracterização Geométrica dos Manipuladores Robóticos

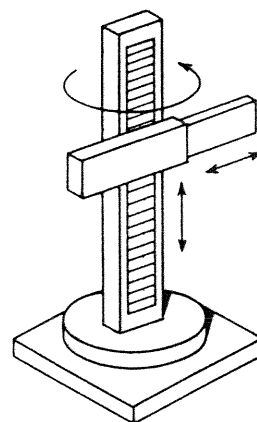
Os manipuladores robóticos são constituídos por diversos elos mecânicos, supostos rígidos, interligados por articulações rotacionais (R) e lineares ou prismáticas (P). O número e tipo de articulações e a estrutura mecânica adoptada para cada manipulador dão origem a características e desempenhos distintos. No tocante ao número de articulações é frequente encontrarem-se estruturas que integram seis eixos através de dois subsistemas principais: o braço (os três primeiros eixos) e o punho (os três eixos finais). Neste caso, o braço permite aceder a qualquer ponto do espaço operacional (definido por três coordenadas), enquanto

que o punho dá a possibilidade de orientar a mão (o que requer três, outras, coordenadas). Nos robots mecanicamente mais evoluídos o punho é constituído por três articulações rotacionais cujos eixos se intersectam num único ponto e que, conseqüentemente, funciona como uma rótula. Assim, as características do manipulador robótico vêm influenciadas, sobretudo, pelo tipo de estrutura do braço. Desde logo deve notar-se que é possível adoptar um braço ou com estrutura paralela (Fig. 4.1), solução assim designada porque os três elos e respectivos actuadores contribuem independentemente para a movimentação do punho [4.10], ou com estrutura série (Fig. 4.2), realização na qual os elos se apoiam sucessivamente uns nos outros. A estrutura paralela conduz a braços capazes de produzirem velocidades, acelerações e forças ou binários elevados à custa de uma forte limitação do respectivo volume de trabalho, isto é, à custa da imposição de restrições quanto aos pontos do espaço operacional a que o braço consegue ter acesso. Os braços com estrutura série revelam propriedades inversas das anteriores e são, na realidade, aqueles que têm maior expressão a nível industrial. Neste caso, é ainda possível encontrar diversos tipos de estruturas correspondentes às várias combinações de articulações R e P [4.11]. Supondo uma situação ideal onde cada articulação R é capaz de rodar  $2\pi$  rad e as articulações P podem realizar uma translação L igual ao comprimento de cada elo, a Figura 4.3 mostra que as estruturas PPP e RRR conduzem a volumes de trabalho mínimo e máximo, respectivamente. Observe-se que a articulação da base (isto é, o tronco) adopta, sempre, uma postura vertical tendente a aliviar o respectivo motor de esforços gravitacionais. Deste modo, a estrutura RRR, por vezes chamada de "antropomórfica" por ser aquela que mais se assemelha ao braço humano, é a que se revela com maiores potencialidades e, em consequência, é analisada com mais detalhe no parágrafo seguinte.

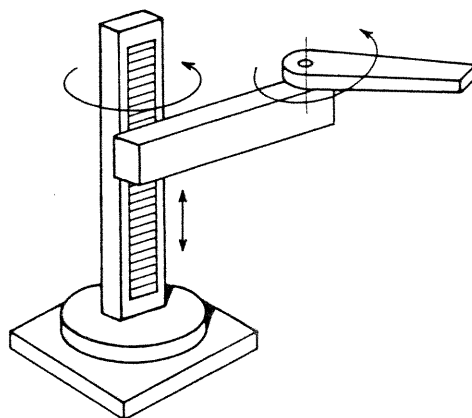
Devido ao facto da articulação da base se encontrar sempre na vertical é usual, e sem perda de generalidade, efectuar-se, somente, o estudo das segunda e terceira articulações, isto é, o estudo do ombro e do cotovelo, respectivamente. Mais uma vez, à semelhança do que ocorre para o braço humano, onde as distâncias ombro-cotovelo e cotovelo-palma da mão são aproximadamente iguais, demonstra-se [4.1, 4.3-4.5] que, para um manipulador com estrutura RR, elos de comprimentos idênticos conduzem a uma área de trabalho máxima. Contudo, para além da área de trabalho verificam-se outras propriedades que é necessário avaliar. Assim, vão-se analisar os fenómenos cinemáticos e dinâmicos que ocorrem nos manipuladores com estrutura de base RR.



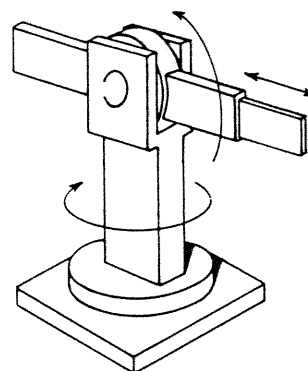
Estrutura PPP



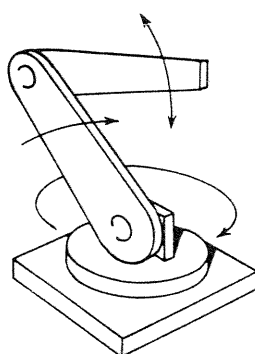
Estrutura RPP



Estrutura RPR

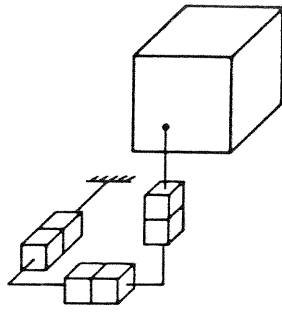


Estrutura RRP

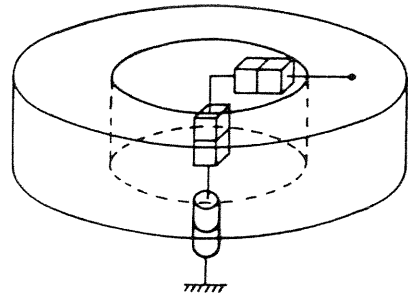


Estrutura RRR

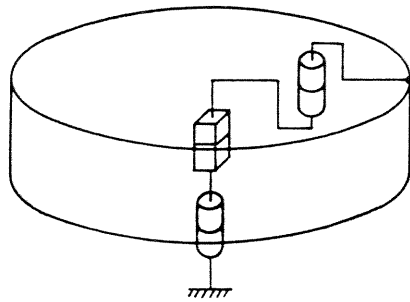
Fig. 4.2 Manipuladores robóticos com estrutura série.



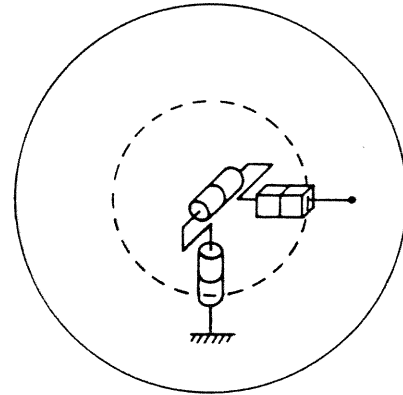
Estrutura PPP, Volume= $L^3$



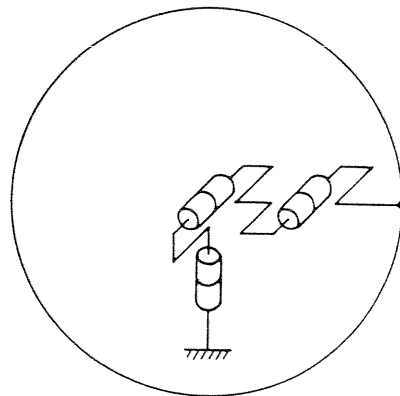
Estrutura RPP, Volume= $\approx 9L^3$



Estrutura RPR, Volume= $\approx 13L^3$



Estrutura RRP, Volume= $\approx 29L^3$



Estrutura RRR, Volume= $\approx 34L^3$

Fig. 4.3 Volume de trabalho de vários tipos de manipuladores robóticos.

#### 4.2.2. Cinemática e Dinâmica dos Manipuladores Robóticos com Estrutura RR

A cinemática trata das relações geométricas envolvendo descrições por coordenadas no espaço operacional  $\mathbf{p}=[p_1, \dots, p_m]^T$  ou, alternativamente, por coordenadas no espaço das articulações  $\mathbf{q}=[q_1, \dots, q_n]^T$ . As relações matemáticas que se podem estabelecer entre os dois sistemas tomam os nomes de cinemática directa e cinemática inversa, consoante o sentido da transformação de coordenadas. A cinemática directa corresponde a uma transformação não-linear do tipo:

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (4.1)$$

a qual tem sempre uma solução, e conduz às relações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{p}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.2)$$

$$\ddot{\mathbf{p}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right) \ddot{\mathbf{q}} + \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.3)$$

onde  $[\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{q}]$  representa o jacobiano da equação (4.1). Por outro lado, a cinemática inversa consiste no estabelecimento das relações inversas que são da forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}) \quad (4.4)$$

Esta equação pode ter ou não solução e, no caso afirmativo, existem ainda três possibilidades, ou seja, uma única solução, várias soluções e uma infinidade de soluções. As relações diferenciais são também mais complexas que no caso anterior e resultam:

$$\dot{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \dot{\mathbf{p}} \quad (4.5)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \ddot{\mathbf{p}} + \Psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.6)$$

A dinâmica (inversa) relaciona os vectores coluna,  $n$ -dimensionais, das forças/binários  $\mathbf{T}$ , fornecidos pelos actuadores, com  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$ . A equação diferencial correspondente é da forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  é a matriz quadrada, de ordem  $n$ , dos coeficientes inerciais e  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  são os vectores coluna,  $n$ -dimensionais, das forças Coriolis/centrípetas e gravitacionais, respectivamente.

Nos manipuladores robóticos que têm por base a estrutura RR (Fig. 4.4) temos  $n=m=2$  e vem  $\mathbf{p}=[p_1, p_2]^T$  e  $\mathbf{q}=[q_1, q_2]^T$ . Neste caso, as relações cinemáticas directa e inversa são apresentadas nos pontos 4.2.2.1 a 4.2.2.3.

#### 4.2.2.1. Manipulador RR com Accionamento Directo nas Articulações

O manipulador RR com accionamento directo nas articulações ("direct-drive") constitui a estrutura mecânica mais simples (Fig. 4.4a). Não obstante, o seu estudo é importante pois constitui uma referência básica na análise das restantes estruturas. Fazendo:

$$S_1 = \text{Sen}(q_1), S_2 = \text{Sen}(q_2) \text{ e } S_{12} = \text{Sen}(q_1 + q_2) \quad (4.8)$$

$$C_1 = \text{Cos}(q_1), C_2 = \text{Cos}(q_2) \text{ e } C_{12} = \text{Cos}(q_1 + q_2) \quad (4.9)$$

então as relações cinemáticas vêm dadas pelas expressões seguintes [4.12].

#### Cinemática Directa

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{pmatrix} \quad (4.10a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (4.10b)$$



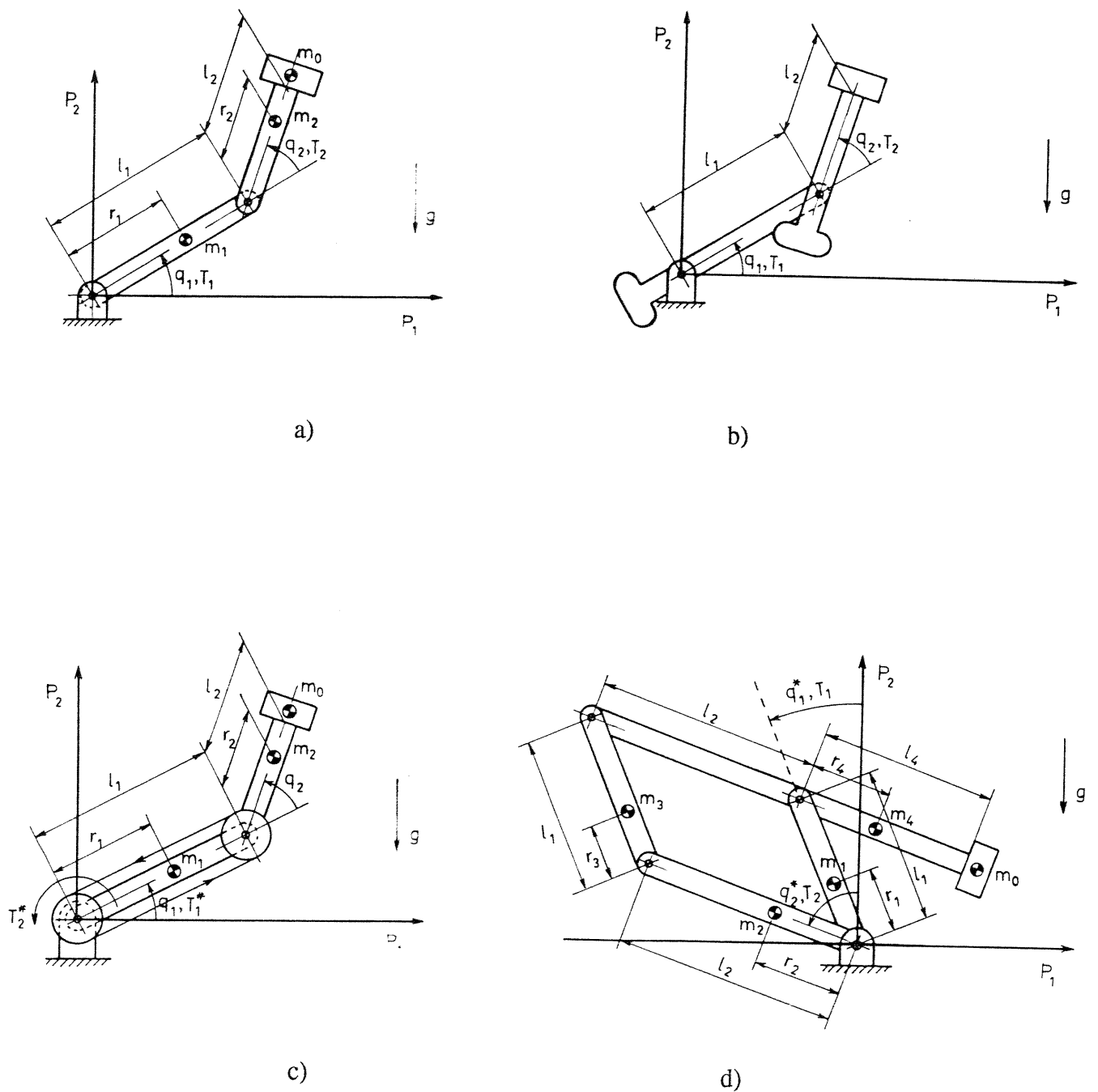


Fig. 4.4 Manipuladores robóticos com estrutura RR e:  
 a) Accionamento directo nas articulações.  
 b) Accionamento directo nas articulações e compensação por contrapesos.  
 c) Accionamento centralizado na base.  
 d) Estrutura em paralelogramo.

$$\begin{pmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 S_1 & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 & l_2 C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 C_1 & l_2 C_{12} \\ l_1 S_1 & l_2 S_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (4.10c)$$

### Cinemática Inversa

$$C_2 = \frac{p_1^2 + p_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad q_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{l_2 S_2}{l_1 + l_2 C_2}\right) \quad (4.11a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{pmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 - l_2 C_{12} & -l_1 S_1 - l_2 S_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} \quad (4.11b)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{pmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 & -l_1 S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{pmatrix} l_1 l_2 C_2 & l_2^2 \\ -l_1^2 & -l_1 l_2 C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (4.11c)$$

Com base nestas equações podemos concluir que:

- A transformação cinemática directa  $f: [q_1, q_2]^T \rightarrow [p_1, p_2]^T$  tem sempre uma, e uma só, solução.
- A solução do problema inverso, isto é, a transformação  $f^{-1}: [p_1, p_2]^T \rightarrow [q_1, q_2]^T$ , só tem uma solução geometricamente possível quando  $[p_1, p_2]^T$  se encontra na área de trabalho definida pela expressão:

$$(l_1 - l_2)^2 \leq p_1^2 + p_2^2 \leq (l_1 + l_2)^2 \quad (4.12)$$

- Quando possível, a equação (4.11a) tem duas soluções, nomeadamente, "cotovelo para cima" e "cotovelo para baixo".
- As equações (4.11) revelam que existem singularidades quando:

$$q_2 = 0 \text{ ou } q_2 = \pi \quad (4.13)$$

isto é, quando  $[p_1, p_2]^T$  está sobre a fronteira que delimita a área de trabalho.

Por outras palavras, na vizinhança de (4.13) para solicitações finitas de  $\dot{p}_1$  e  $\dot{p}_2$  ( $\ddot{p}_1$  e  $\ddot{p}_2$ ) são requeridos valores a  $\dot{q}_1$  e  $\dot{q}_2$  ( $\ddot{q}_1$  e  $\ddot{q}_2$ ) que tendem para infinito.

- No caso particular de  $l_1=l_2$  e  $[p_1, p_2]^T=[0,0]^T$ , as equações (4.11a) têm uma infinidade de soluções se bem que permaneça a singularidade em (4.11b) e (4.11c).
- Podem ocorrer restrições adicionais, isto é, uma diminuição da área de trabalho, devido às interferências dos elos da estrutura mecânica.

### Dinâmica Inversa

Fazendo-se:

$$J_i = I_i + m_i r_i^2, \quad i=1, 2 \quad (4.14)$$

então as equações dinâmicas vêm:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 + (m_0 + m_2)l_1^2 + m_0 l_2^2 + 2l_1 A_2 C_2 & J_2 + m_0 l_2^2 + l_1 A_2 C_2 \\ J_2 + m_0 l_2^2 + l_1 A_2 C_2 & J_2 + m_0 l_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} -l_1 A_2 S_2 (2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ l_1 A_2 S_2 \dot{q}_1^2 \end{pmatrix} \quad (4.15b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} g \{ [m_1 r_1 + (m_0 + m_2) l_1] C_1 + A_2 C_{12} \} \\ g A_2 C_{12} \end{pmatrix} \quad (4.15c)$$

onde  $A_2$  é o momento estático do segundo elo e vem dado pela expressão:

$$A_2 = m_2 r_2 + m_0 l_2 \quad (4.16)$$

Com base nas equações dinâmicas podemos concluir que:

- Se  $A_2=0$  então  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  tem coeficientes constantes e os termos Coriolis/centrípetos são eliminados. Além disso, os termos gravitacionais são compensados parcialmente.
- O cancelamento dos termos gravitacionais restantes requer uma compensação do primeiro elo, nomeadamente, fazendo-se:

$$m_1 r_1 + (m_0 + m_2) l_1 = 0 \quad (4.17)$$

O método de compensação usado mais frequentemente consiste na integração de contrapesos na estrutura mecânica do manipulador (Fig. 4.4b). Todavia, esta técnica tem inconvenientes já que:

- A compensação dos dois elos, conforme (4.16) e (4.17), depende da massa da carga  $m_0$  e, conseqüentemente, é incompleta para cargas variáveis.
- A compensação aumenta as inércias  $m_i, J_i$  ( $i=1,2$ ).

#### 4.2.2.2. Manipulador RR com Accionamento Centralizado na Base

Este tipo de manipulador (Fig. 4.4c) resulta, directamente, do caso anterior trasladando o actuador da segunda articulação para a base. Assim, o motor passa a accionar a segunda articulação através de uma cadeia de transmissão e não sobrecarrega o actuador do primeiro elo. Isto quer dizer que as equações cinemáticas são idênticas às (4.8)-(4.13) havendo somente modificações ao nível da dinâmica.

#### Dinâmica Inversa

A localização do segundo actuador leva a que o binário de reacção se transmita à base, ao invés do caso anterior onde esta reacção incidia sobre o primeiro elo. Deste modo, chamando  $T_1^\#$  e  $T_2^\#$  aos binários solicitados aos actuadores nesta estrutura, verifica-se que eles estão relacionados com os binários  $T_1$  e  $T_2$  da estrutura anterior através das equações [4.13]:

$$T_1 = T_1^\# + T_2^\# \quad (4.18a)$$

$$T_2 = T_2^\# \quad (4.18b)$$

resultando:

$$D(q) = \begin{pmatrix} J_1 + (m_0 + m_2)l_1^2 + l_1 A_2 C_2 & l_1 A_2 C_2 \\ J_2 + m_0 l_2^2 + l_1 A_2 C_2 & J_2 + m_0 l_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.19a)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -l_1 A_2 S_2 \dot{q}_1^2 \\ l_1 A_2 S_2 \dot{q}_1^2 \end{pmatrix} \quad (4.19b)$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} g\{[m_1 r_1 + (m_0 + m_2) l_1] C_1\} \\ g A_2 C_{12} \end{pmatrix} \quad (4.19c)$$

Conclui-se que há uma diminuição dos termos inerciais e gravitacionais enquanto que a expressão para a compensação se mantém.

#### 4.2.2.3. Manipulador RR com Estrutura em Paralelogramo

No caso de um manipulador RR com estrutura em paralelogramo (Fig. 4.4d) as relações cinemáticas entre  $[p_1, p_2]^T$  e  $[q_1, q_2]^T$  são, também, idênticas às anteriores. Todavia, neste caso, dada a localização dos actuadores, interessam-nos as equações cinemáticas e dinâmicas em função do novo sistema de coordenadas das articulações  $(q_1^*, q_2^*)^T$ . No que concerne as relações cinemáticas, estas resultam, directamente, das encontradas para o manipulador RR com accionamento directo fazendo, simplesmente:

$$q_1^* = q_1 - \pi/2 \quad (4.20a)$$

$$q_2^* = q_{12} + \pi/2 \quad (4.20b)$$

Assim, por exemplo, as singularidades (4.13) quando referidas a  $q_1^*$  e  $q_2^*$  transformam-se na expressão:

$$q_2^* - q_1^* = 0 \text{ ou } q_2^* - q_1^* = \pi \quad (4.21)$$

o que indica que os problemas cinemáticos encontrados no manipulador RR com accionamento directo se mantêm.

#### Dinâmica Inversa

Ao contrário do que acontece com a cinemática, a estrutura em paralelogramo tem uma influência notável sobre a dinâmica. Considerando:

$$S_1^* = \text{Sen}(q_1^*), S_2^* = \text{Sen}(q_2^*) \text{ e } C_{12}^* = \text{Cos}(q_1^* - q_2^*) \quad (4.22)$$

então as expressões da dinâmica desta estrutura resultam:

$$D(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} J_1 + J_3 + (m_0 + m_4)l_1^2 & BC_{12}^* \\ BC_{12}^* & J_2 + J_4 + m_3l_2^2 + m_0l_4^2 \end{pmatrix} \quad (4.23a)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} BS_{12}^* \dot{q}_2^2 \\ -BS_{12}^* \dot{q}_1^2 \end{pmatrix} \quad (4.23b)$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} gS_1^*[m_1r_1 + m_3r_3 + (m_0 + m_4)l_1] \\ gS_2^*[m_2r_2 + m_3l_2 - m_4r_4 - m_0l_4] \end{pmatrix} \quad (4.23c)$$

onde:

$$J_i = m_i r_i^2 + I_i, \quad i=1, \dots, 4 \quad (4.24a)$$

$$B = m_3 l_2 r_3 - m_4 l_1 r_4 - m_0 l_1 l_4 \quad (4.24b)$$

Verifica-se para este tipo de estrutura que:

- Não existem termos Coriolis
- Podem eliminar-se todos os termos de acoplamento dinâmico se  $B=0$
- Uma compensação dos termos gravitacionais, por exemplo através de contrapesos, impõe condições suplementares a  $r_1$  e  $r_2$ .
- Os termos inerciais são relativamente baixos já que os motores estão estacionários.
- O espaço de trabalho pode ficar severamente limitado devido às interferências dos diversos elos da estrutura do paralelogramo.

#### 4.2.3. Limitações dos Manipuladores Robóticos com Estrutura RR

A análise efectuada no parágrafo anterior revelou as propriedades cinemáticas e dinâmicas de várias estruturas de manipuladores mecânicos. Em termos globais, os factores mais salientes são:

- As propriedades cinemáticas são idênticas para todas as estruturas mantendo, nomeadamente, as mesmas singularidades.
- As compensações eventualmente a introduzir incidem, em todos os casos, ao nível da dinâmica. Por outro lado, esta metodologia é imperfeita pois é incapaz de compensar cargas variáveis.

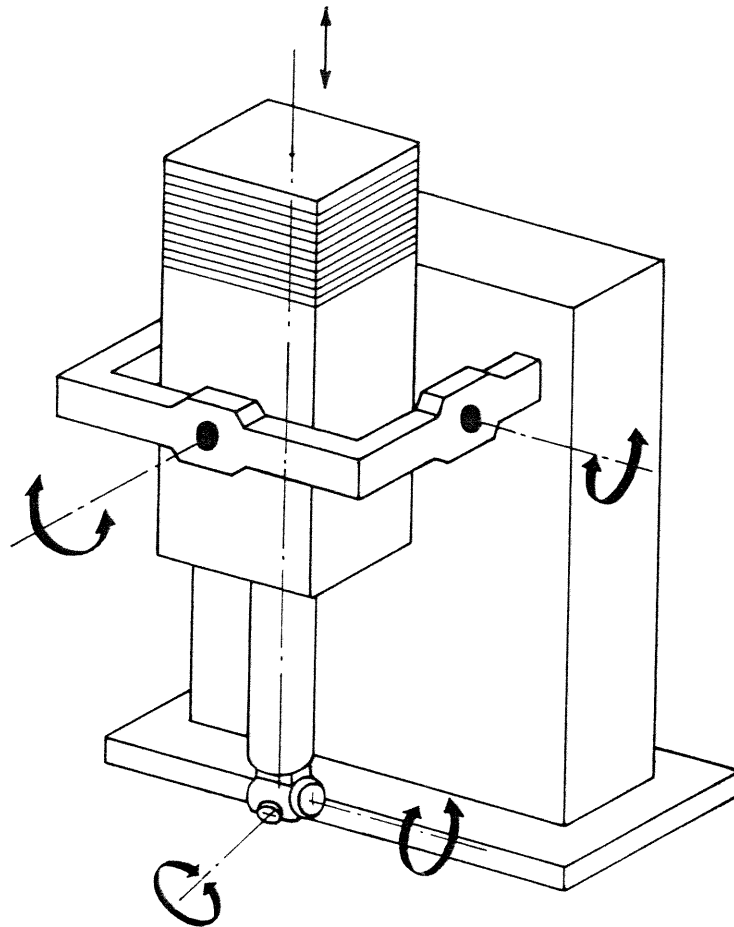


Fig. 4.5 Robot pendular.

No sentido de procurar uma estratégia que vise melhorar o desempenho dos manipuladores, pode, ainda, mencionar-se o robot pendular (Fig. 4.5) [4.14-4.15]. Trata-se de braço com estrutura RRP que trabalha segundo o sentido da aceleração da gravidade. Esta configuração permite, mais uma vez, melhorar o desempenho do manipulador ao nível da estabilidade dinâmica [4.16], se bem que à custa de uma forte limitação do espaço de trabalho.

A consideração dos efeitos dinâmicos é, com certeza, importante. Para tal, basta notar as diferentes posturas que o braço humano adopta quando, por exemplo, está em repouso, a escrever ou a usar um martelo. Se observarmos que os fenómenos envolvidos têm uma sequência de relações e complexidade de acordo com o esquema:

então concluímos que a estratégia de compensação da dinâmica, e a um nível mais avançado a optimização do controlo, se revela incompleta pois esquece os fenómenos cinemáticos. Por outras palavras, uma estratégia global de optimização do desempenho dos braços manipuladores deve englobar os três níveis de descrição dos fenómenos envolvidos o que, na realidade, tem sido algo menosprezado.

#### **4.3. Estrutura Biomecânica do Braço Humano e sua Influência na Formulação de Manipuladores Mecânicos**

A comparação dos desempenhos de um manipulador robótico e de um braço humano revela que o segundo é superior na maioria dos aspectos tais como: maior relação capacidade de carga/peso, maior precisão e rapidez e melhor manipulabilidade, isto é, maior facilidade de aceder a um ponto do espaço de trabalho. Estas características são, evidentemente, o resultado da conjugação de numerosos factores; todavia, nesta secção consideramos, essencialmente, o desempenho cinemático do braço humano. Nesta ordem de ideias, vamos estudar no parágrafo 4.3.1 as propriedades cinemáticas do braço humano referidas a uma estrutura RR planar vertical. A partir deste estudo, no parágrafo 4.3.2 desenvolve-se um modelo geométrico equivalente e comparam-se as capacidades resultantes face às dos manipuladores convencionais.

##### **4.3.1. Estrutura Biomecânica do Braço Humano**

A análise biomecânica do braço humano mostra que o seu movimento envolve uma estrutura muscular complexa e um controlo neurológico sofisticado [4.17-4.29]. Na realidade, não foi ainda possível atingir-se uma compreensão da totalidade dos fenómenos que ocorrem e muitos dos estudos situam-se no campo das hipóteses. No que concerne este parágrafo, limitamo-nos ao exame dos músculos e estruturas mecânicas mais relevantes na movimentação do braço no plano vertical anteroposterior (plano sagital), pois é aquele que tem uma relação directa com os manipuladores RR estudados anteriormente.



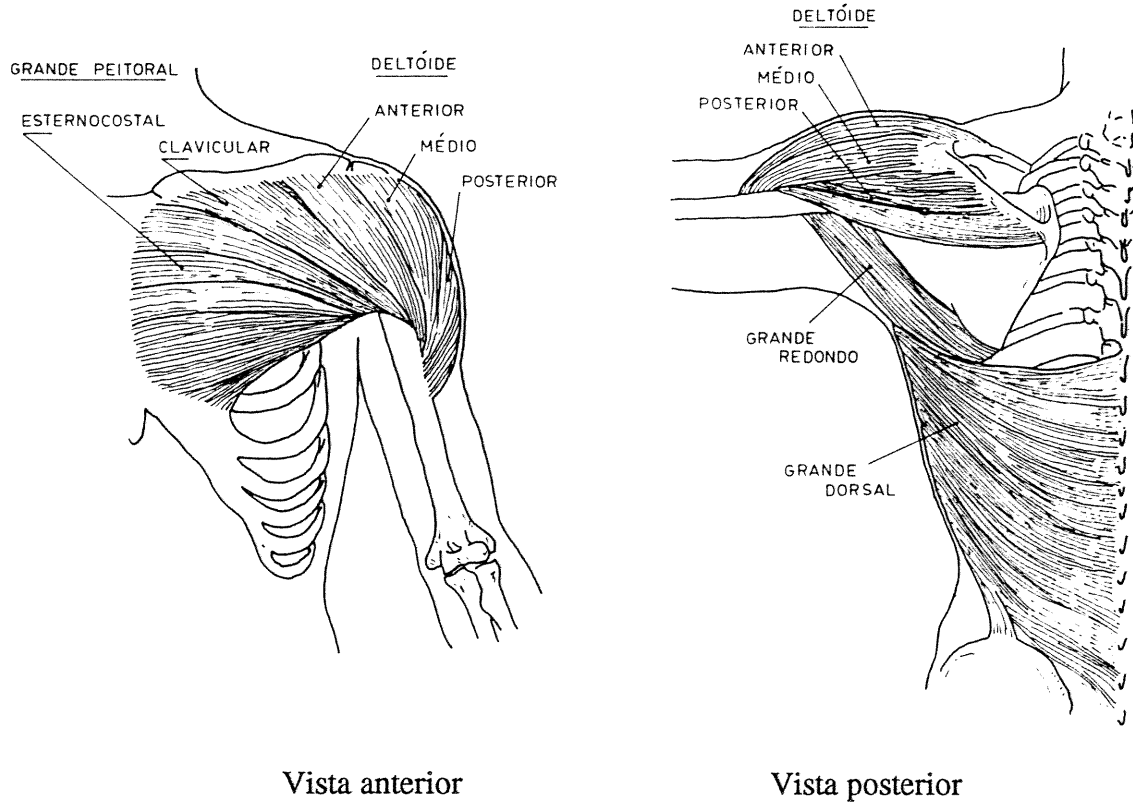


Fig. 4.6 Músculos da cintura escápulo-umeral da articulação do ombro.

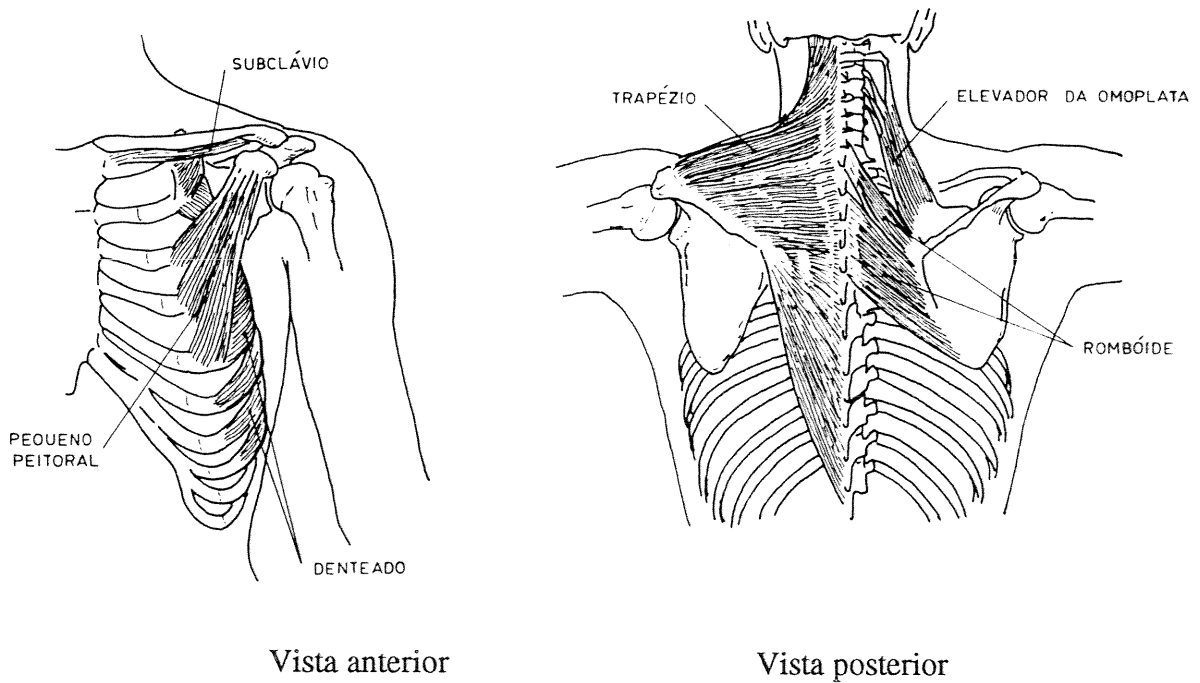


Fig. 4.7 Músculos da cintura escápulo-torácica da articulação do ombro.

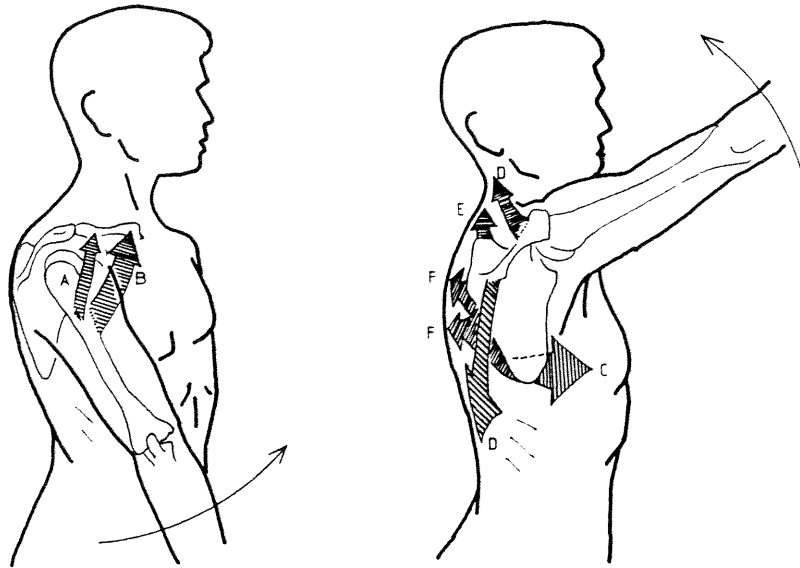


Fig. 4.8 Sistema de forças que ocorre no ombro durante a flexão no plano sagital.  
 A - Deltóide anterior, B - Grande peitoral (porção clavicular),  
 C - Denteado, D - Trapézio, E - Elevador da omoplata,  
 F - Rombóide.

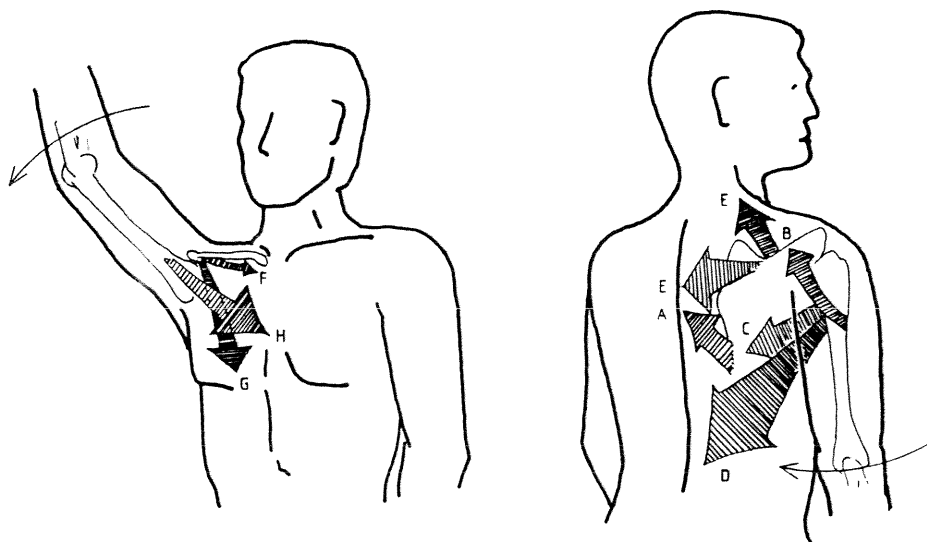
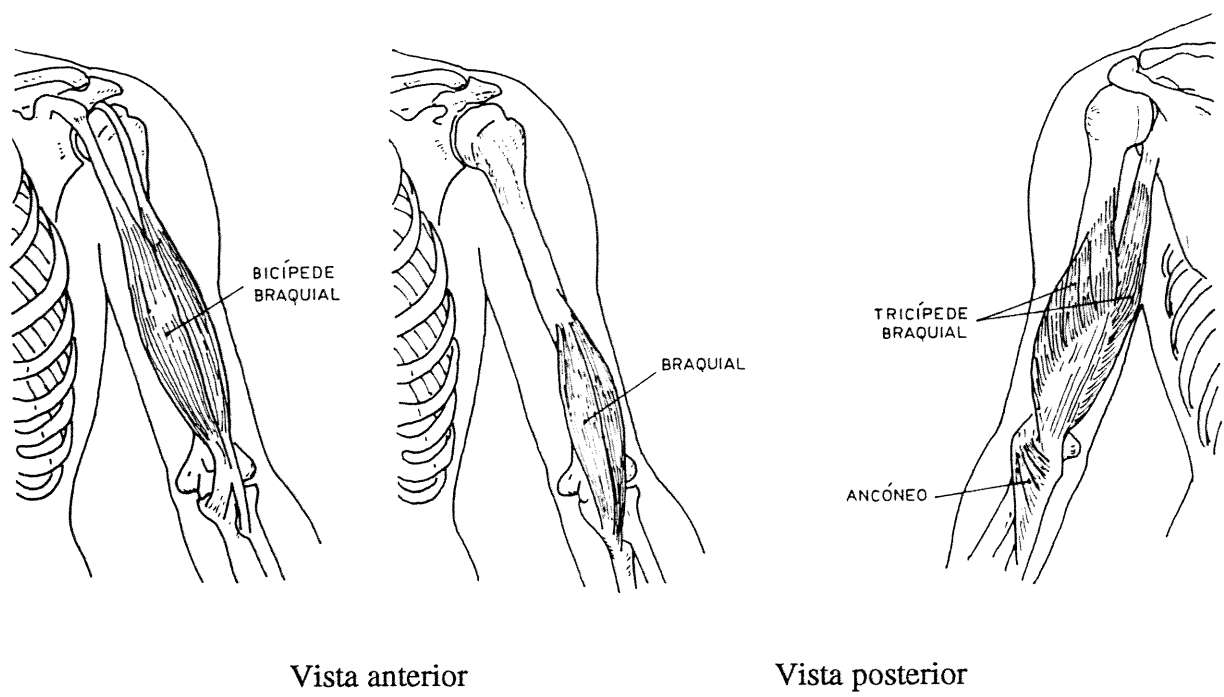


Fig. 4.9 Sistema de forças que ocorre no ombro durante a extensão no plano sagital.  
 A - Rombóide, B - Deltóide posterior, C - Grande redondo,  
 D - Grande dorsal, E - Trapézio, F - Subclávio,  
 G - Pequeno peitoral, H - Grande peitoral (porção esternocostal).



Vista anterior

Vista posterior

Fig. 4.10 Músculos da articulação do cotovelo.

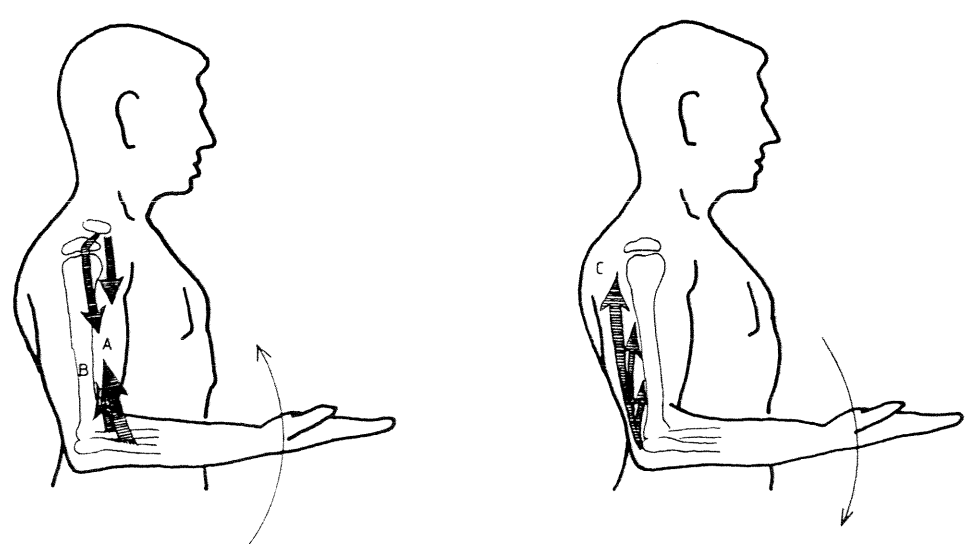


Fig. 4.11 Sistema de forças que ocorre no cotovelo durante a flexão e a extensão no plano sagital.  
 A - Bicípíte braquial, B - Braquial, C - Tricípíte braquial.

**Tabela 4.1. Músculos Principais de Accionamento do Ombro no Plano Sagital**

	Cintura Escápulo-Umeral	Cintura Escápulo-Torácica
Flexão	Deltóide Anterior Grande Peitoral (porção clavicular)	Denteado, Trapézio, Elevador da Omoplata, Rombóide
Extensão	Deltóide Posterior, Grande Dorsal, Grande Redondo, Grande Peitoral (porção esternocostal)	Pequeno Peitoral, Trapézio, Rombóide, Subclávio

O deslocamento do braço humano no plano sagital recorre à activação das articulações do ombro e do cotovelo. Em ambos os casos, dado que os músculos são actuadores unidireccionais, existem músculos que são activados para deslocamentos num sentido (flexão) e outros para deslocamentos no sentido oposto (extensão). Por outro lado, o ombro (Figs. 4.6 a 4.9) é mais complexo que o cotovelo (Figs. 4.10 e 4.11), o que se traduz na existência de duas estruturas biomecânicas: as cinturas escápulo-umeral e escápulo-torácica. Nesta ordem de ideias, as Tabelas 4.1 e 4.2 indicam os principais músculos activados durante a flexão ou a extensão do ombro e do cotovelo, respectivamente.

A observação anatómica das estruturas ósseas e musculares envolvidas no accionamento do ombro e do cotovelo mostra, desde logo, que o braço humano é um sistema muito mais sofisticado que os manipuladores robóticos mencionados no parágrafo anterior, e que o seu desempenho superior é devido, entre outras razões, aos sistemas de alavancas que adaptam o movimento das articulações aos músculos. Nesta perspectiva, o desenvolvimento de manipuladores robóticos mais eficientes pode inspirar-se nos sistemas biológicos e é, de facto, o tema do parágrafo seguinte.

#### **4.3.2. Modelo Geométrico**

De acordo com as observações anatómicas as articulações do ombro e do cotovelo são accionadas, no plano sagital, por estruturas biomecânicas

**Tabela 4.2. Músculos Principais de Accionamento do Cotovelo no Plano Sagital**

Flexão	Bicípíte Braquial, Braquial
Extensão	Tricípíte Braquial, Ancóneo

consideravelmente diferentes. Nos pontos seguintes vamos estudar os respectivos modelos geométricos e as suas propriedades [4.30-4.35].

#### 4.3.2.1. O Ombro

No ombro são de considerar dois mecanismos fundamentais. O primeiro mecanismo consiste na conjugação das estrutura óssea {omoplata, clavícula, externo, costelas} com a estrutura muscular {denteado, trapézio, subclávio, pequeno peitoral, elevador da omoplata, rombóide}. O modelo geométrico (Fig. 4.12) simula estas estruturas através de uma roldana centrada na primeira articulação capaz quer de permanecer em repouso quer de ter um movimento próprio controlado.

O segundo mecanismo consiste na conjugação da estrutura óssea {úmero} com a estrutura muscular {deltóide anterior, deltóide posterior, grande peitoral (porção clavicular), grande peitoral (porção esternocostal), grande redondo, grande dorsal}. Este mecanismo tem uma posição absoluta  $q_1$  em relação ao referencial de base e uma posição relativa  $q_{01}$  (flexão) ou  $q_{02}$  (extensão) em relação ao primeiro mecanismo, isto é, a roldana. Por outro lado, é ainda de referir que estes músculos podem "enrolar" em torno da roldana dentro de limites a definir.

O controlo da roldana obedece a uma estrutura de decisão do tipo:

$$q_{01} = \begin{cases} 0.528\pi - 0.5q_1 & -2\pi/3 \leq q_1 < -\pi/2 \\ 0.278\pi - q_1 & -\pi/2 \leq q_1 < -\pi/6 \\ 0.361\pi - 0.5q_1 & -\pi/6 \leq q_1 < \pi/6 \\ 0.411\pi - 0.8q_1 & \pi/6 \leq q_1 \leq 4\pi/9 \end{cases} \quad (4.25a)$$



### A.1. Músculos Flexores "Enrolam" na Roldana

$$-\frac{2\pi}{3} \leq q_1 < -\frac{\pi}{18} \quad (4.26a)$$

$$z_{11} = h \left[ q_{01} - \text{arc sen} \left( \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d} \right) \right] + \sqrt{d^2 - h^2} \quad (4.26b)$$

$$\dot{z}_{11} = h \dot{q}_{01} \quad (4.26c)$$

$$\ddot{z}_{11} = h \ddot{q}_{01} \quad (4.26d)$$

$$F_{11} = \frac{T_1}{h} \quad (4.26e)$$

### A.2. Músculos Flexores "Não Enrolam" na Roldana

$$-\frac{\pi}{18} \leq q_1 \leq \frac{4\pi}{9} \quad (4.27a)$$

$$z_{11} = \sqrt{d^2 + h^2 - 2dhC_{01}} \quad (4.27b)$$

$$\dot{z}_{11} = \left( \frac{dhS_{01}}{z_{11}} \right) \dot{q}_{01} \quad (4.27c)$$

$$\ddot{z}_{11} = \frac{dh}{z_{11}} \left[ \left( \frac{z_{11}^2 C_{01} - dhS_{01}^2}{z_{11}^2} \right) \dot{q}_{01}^2 + S_{01} \ddot{q}_{01} \right] \quad (4.27d)$$

$$F_{11} = \left( \frac{z_{11}}{dhS_{01}} \right) T_1 \quad (4.27e)$$

### B. Músculos Extensores "Enrolam" na Roldana

$$-\frac{2\pi}{3} \leq q_1 \leq \frac{4\pi}{9} \quad (4.28a)$$

$$z_{12} = h \left[ 2\pi - q_{02} - \text{arc sen} \left( \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d} \right) \right] + \sqrt{d^2 - h^2} \quad (4.28b)$$

$$\dot{z}_{12} = -h \dot{q}_{02} \quad (4.28c)$$

$$\ddot{z}_{12} = -h \ddot{q}_{02} \quad (4.28d)$$

$$F_{12} = -\frac{T_1}{h} \quad (4.28e)$$

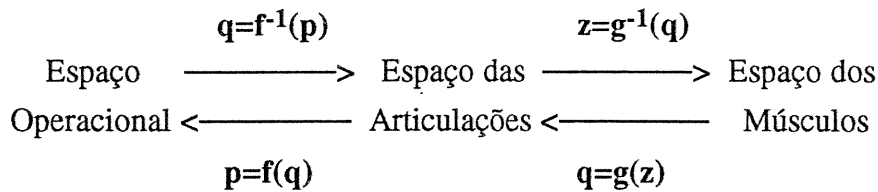
onde  $h$  e  $d$  são parâmetros característicos da roldana (Tabela 4.3). Além disso, deve notar-se que, ao contrário do que acontece com os músculos flexores, os músculos extensores mantêm-se sempre "enrolados" em torno da roldana.

As equações (4.25)-(4.28) mostram que os fenômenos cinemáticos estão agora descritos no "espaço dos músculos"  $z=[z_1, \dots, z_n]^T$ , o que constitui uma

**Tabela 4.3. Parâmetros do manipulador com actuadores biomecânicos**

$d=0.126$ m		$b_1=0.034$ m
$h=0.043$ m		$b_2=-0.02$ m
$r_1=0.3$ m	$m_1=2.16$ Kg	$I_1=0.0176$ Kgm <sup>2</sup>
$r_2=0.25$ m	$m_2=1.2$ Kg	$I_2=0.0067$ Kgm <sup>2</sup>
$r_3=0.05$ m	$m_3=0.48$ Kg	$I_3=0.00028$ Kgm <sup>2</sup>

alternativa às representações clássicas no espaço operacional ou no espaço das articulações, conforme o esquema:



Assim, o efeito das singularidades e as eventuais compensações a introduzir podem, agora, ser estudadas num espaço com características próprias.

Por último, há que notar que o esquema de controlo cinemático (4.25)-(4.28), envolvendo deslocamentos concertados da roldana e do úmero, representa um compromisso no que toca à imposição de exigências dos músculos das cinturas escápulo-torácica e escápulo-umeral.

#### 4.3.2.2. O Cotovelo

A movimentação do cotovelo (Fig. 4.12) no plano sagital deve-se à interacção da estrutura óssea {úmero, cúbito, rádio} com a estrutura muscular {bicípite braquial, braquial, tricípite braquial, ancóneo}. Neste caso as equações cinemáticas são consideravelmente mais simples do que para o ombro. Assim, para o bicípite braquial ( $i=1$ ) e o tricípite braquial ( $i=2$ ) resultam as expressões para a amplitude do movimento, a dimensão ( $z_{2i}$ ), a velocidade ( $\dot{z}_{2i}$ ), a aceleração ( $\ddot{z}_{2i}$ ) e a força ( $F_{2i}$ ) desenvolvidas:

$$0 \leq q_2 \leq \pi \tag{4.29a}$$



$$z_{2i} = \sqrt{r_1^2 + b_i^2 + 2r_1 b_i C_2} \quad (4.29b)$$

$$\dot{z}_{2i} = - \left( \frac{r_1 b_i S_2}{z_{2i}} \right) \dot{q}_2 \quad (4.29c)$$

$$\ddot{z}_{2i} = - \frac{r_1 b_i}{z_{2i}} \left\{ \left[ C_2 + r_1 b_i \left( \frac{S_2}{z_{2i}} \right)^2 \right] \dot{q}_2^2 + S_2 \ddot{q}_2 \right\} \quad (4.29d)$$

$$F_{2i} = \left( \frac{\sqrt{r_1^2 + b_i^2 + 2r_1 b_i C_2}}{r_1 b_i S_2} \right) T_2 \quad (4.29e)$$

onde  $b_i$  ( $i=1,2$ ) são parâmetros característicos da estrutura (Tabela 4.3).

Na equação (4.29c) verifica-se a ocorrência do factor  $S_2$ . Isto quer dizer que a transformação cinemática diferencial inversa (4.11b) é compensada das singularidades que ocorrem devido ao factor  $S_2^{-1}$ . Assim, podem tirar-se as importantes conclusões:

- A compensação do factor  $S_2^{-1}$  encontrado na cinemática inversa só se verifica para o cotovelo. O ombro não é beneficiado por este tipo de compensação e, a fim de limitar as exigências colocadas aos actuadores, tem que se recorrer a um esquema de controlo cinemático (4.25)-(4.28) mais complexo e, todavia, menos eficiente. Esta observação é coerente com os dados biológicos já que se constata que os músculos do ombro são mais robustos que os músculos do cotovelo.
- A existência de compensação somente no cotovelo indica que, para um manipulador recorrendo a actuadores musculares, a optimização de trajectórias no espaço operacional implica a transferência de imposições de velocidade ou aceleração, do ombro para o cotovelo. Esta conclusão está, mais uma vez, de acordo com a nossa experiência que tende associar ao braço uma menor "largura de banda" do que ao antebraço.
- A compensação do factor  $S_2^{-1}$  revelada pelo sistema biológico mostra que as estruturas mecânicas estudadas na secção 4.2 são, desde logo, inferiores uma vez que são incapazes de produzir uma compensação semelhante.

#### 4.4. Análise Estatística de Manipuladores com Actuadores Musculares

Nesta secção analisa-se, estatisticamente, a cinemática e a dinâmica de manipuladores com actuadores similares a músculos. Deve, desde logo, notar-se que não se pretende modelizar os músculos em si mesmos, mas sim caracterizar as propriedades de um braço com actuadores lineares dispostos segundo a estrutura

proposta na Figura 4.12. Assim, pressupõe-se que as hipotéticas propriedades dos actuadores estejam adaptadas às exigências colocadas pelas tarefas a realizar.

No tratamento subsequente procede-se de um modo semelhante ao realizado nos capítulos anteriores. Desta maneira, considera-se um conjunto de f.d.p.'s que caracteriza as operações a efectuar pelo manipulador, de seguida "excita-se" numericamente o sistema através das v.a.e.'s e, por último, analisam-se as v.a.s.'s por meio dos respectivos histogramas. As v.a.e.'s constituem o conjunto  $\{\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}\}$  e decidiu-se descrevê-las pelas f.d.p.'s:

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \left| \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{p}} \right| g_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) \quad (4.30a)$$

$$g_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) = g_{Q_1}(q_1) g_{Q_2}(q_2) \quad (4.30b)$$

$$g_{Q_1}(q_1) = \begin{cases} 1.094q_1 + 2.292 & \text{se } -2\pi/3 \leq q_1 \leq -\pi/2 \\ -0.193q_1 + 0.27 & \text{se } -\pi/2 < q_1 \leq 4\pi/9 \end{cases} \quad (4.30c)$$

$$g_{Q_2}(q_2) = \chi |S_2|^3 \quad 0 \leq q_2 \leq \pi \quad (4.30d)$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } K = 1 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 2; 4; 6 \dots \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots K}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{4} & \text{se } K = 3; 5; 7 \dots \end{cases} \quad (4.30e)$$

$$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (4.31)$$

$$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \right\} \quad (4.32)$$

Tal como nos capítulos anteriores, consideram-se as nove categorias de exigências de  $\dot{\mathbf{p}}$  e de  $\ddot{\mathbf{p}}$  referidas na Tabela 4.4. Assim, a expressão (4.30c), relativa à caracterização de  $q_1$ , constitui a única adaptação à estrutura agora em estudo e visa descrever a postura do braço humano que, quer em descanso quer em manipulações de precisão, adopta frequentemente  $q_1 = -\pi/2$ . A Figura 4.13 mostra o diagrama sinóptico da cinemática. As v.a.s.'s  $\{\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}\}$  correspondem aos comprimentos,

Tabela 4.4. Exigências de  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\ddot{\mathbf{p}}$ .

Categorias	$\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}$	$\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}$
1	0.1	0.1
2	0.1	1
3	0.1	10
4	1	0.1
5	1	1
6	1	10
7	10	0.1
8	10	1
9	10	10

velocidades e acelerações dos actuadores musculares e as respectivas f.d.p.'s estão representadas por  $u_Z(\mathbf{z})$ ,  $u_{ZZ}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$  e  $u_{ZZZ}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}})$ , respectivamente. Dado que os actuadores são unidireccionais  $z_{11}$  ( $z_{21}$ ) dá uma informação similar a  $z_{12}$  ( $z_{22}$ ), pelo que existem quatro possibilidades de construção dos respectivos histogramas. As Figuras 4.14 e 4.15 mostram o desempenho cinemático do sistema condensado através do interpercentil de 95% (IP<sub>95</sub>). A partir dos gráficos observa-se que:

- $\dot{\mathbf{p}}$  tem uma influência sobre  $\dot{z}_{ij}$  e  $\ddot{z}_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ) muito superior à influência de  $\ddot{\mathbf{p}}$ .
- Os histogramas de  $\ddot{z}_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ) podem tomar formas muito assimétricas, particularmente para valores elevados de  $\dot{\mathbf{p}}$ .
- Os valores limites de  $\dot{z}_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ) são próximos uns dos outros.
- Os valores limites de  $\ddot{z}_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ) podem apresentar variações significativas para  $\dot{\mathbf{p}}$  elevado.

Deste modo conclui-se que, sob o ponto de vista cinemático, a exigência de valores elevados de  $\dot{\mathbf{p}}$  é de evitar pois conduz a situações "anormais", dado que impõe solicitações muito pesadas aos actuadores. No tocante à comparação das estruturas do ombro e do cotovelo verifica-se que, apesar de diferentes, conduzem a desempenhos cinemáticos somente um pouco superiores para o ombro.

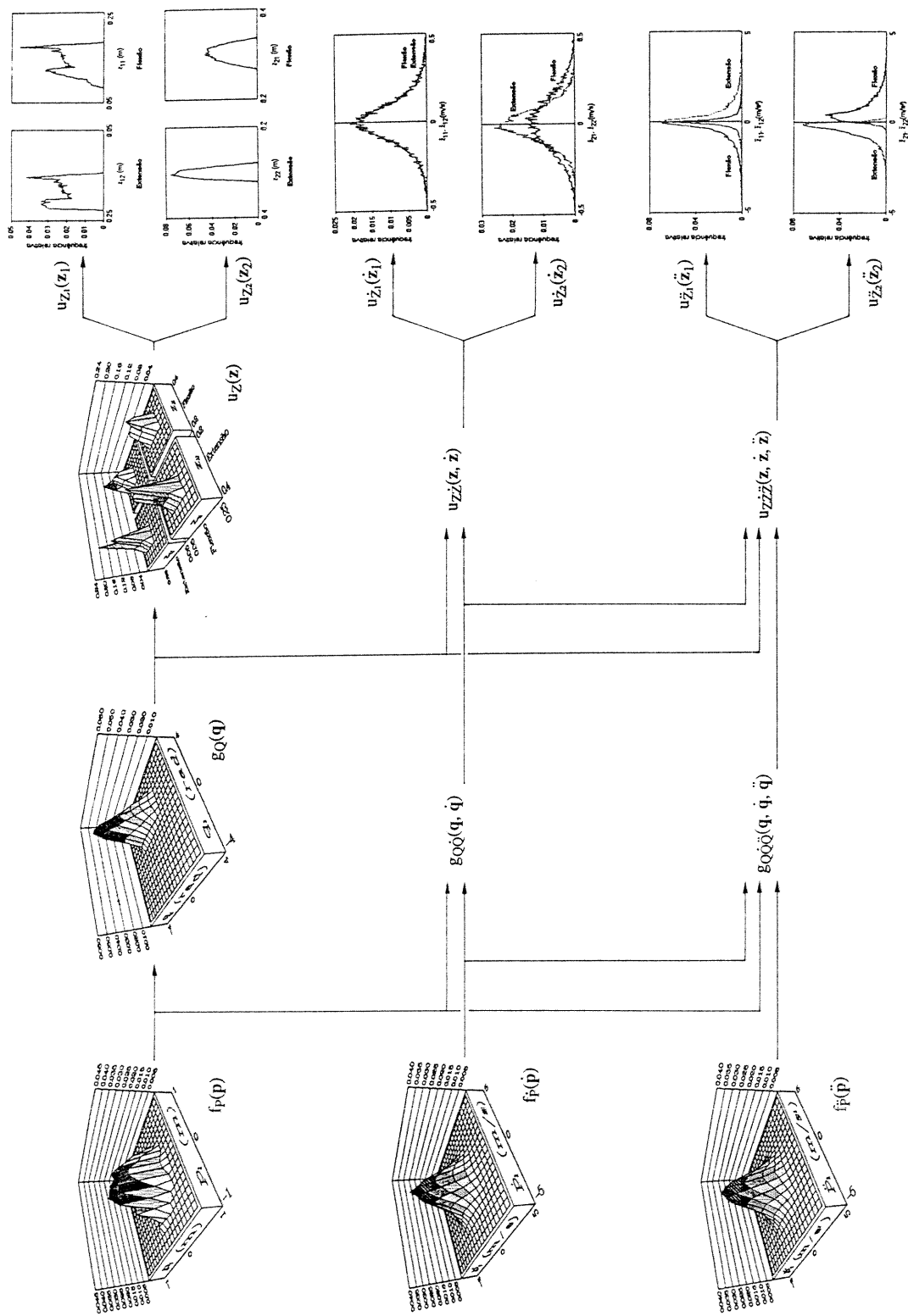


Fig. 4.13 Diagrama sinóptico da modelização do sistema cinemático  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{z}$ , com as v.a.s.'s obedecendo às f.d.p.'s (4.30) - (4.32) para os valores de  $\sigma_{\dot{p}} = 1 \text{ ms}^{-1}$  e de  $\sigma_{\ddot{p}} = 1 \text{ ms}^{-2}$ .

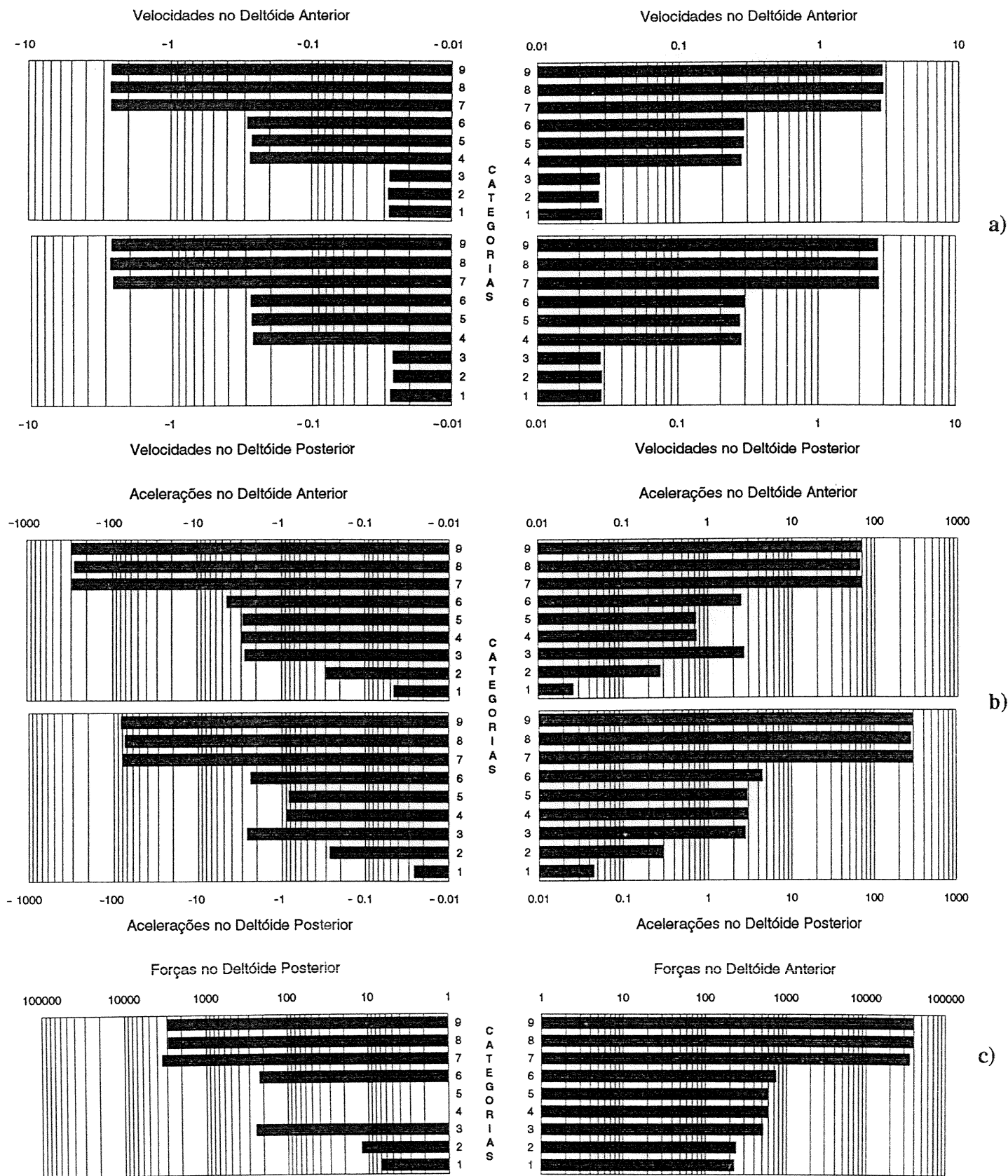


Fig. 4.14 Comparação do IP<sub>95</sub> dos actuadores da flexão e da extensão do ombro quando "excitados" pelas f.d.p.'s (4.30)-(4.32) de acordo com as nove categorias de exigências indicadas na Tabela 4.3.

- a) Velocidades.
- b) Acelerações.
- c) Forças.

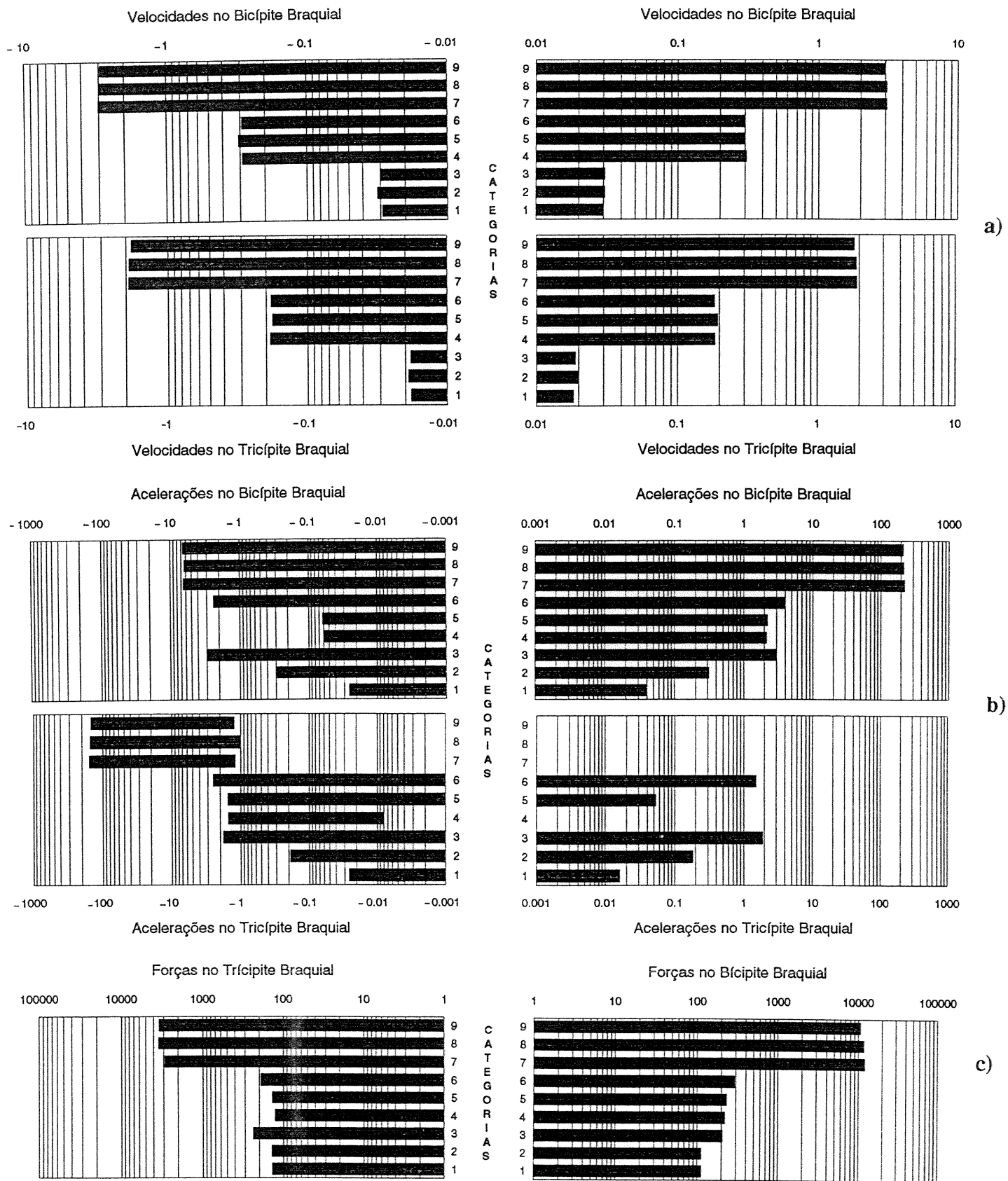


Fig. 4.15 Comparação do IP<sub>95</sub> dos actuadores da flexão e da extensão do cotovelo quando "excitados" pelas f.d.p.'s (4.30)-(4.32) de acordo com as nove categorias de exigências indicadas na Tabela 4.3.

- a) Velocidades.
- b) Acelerações.
- c) Forças.

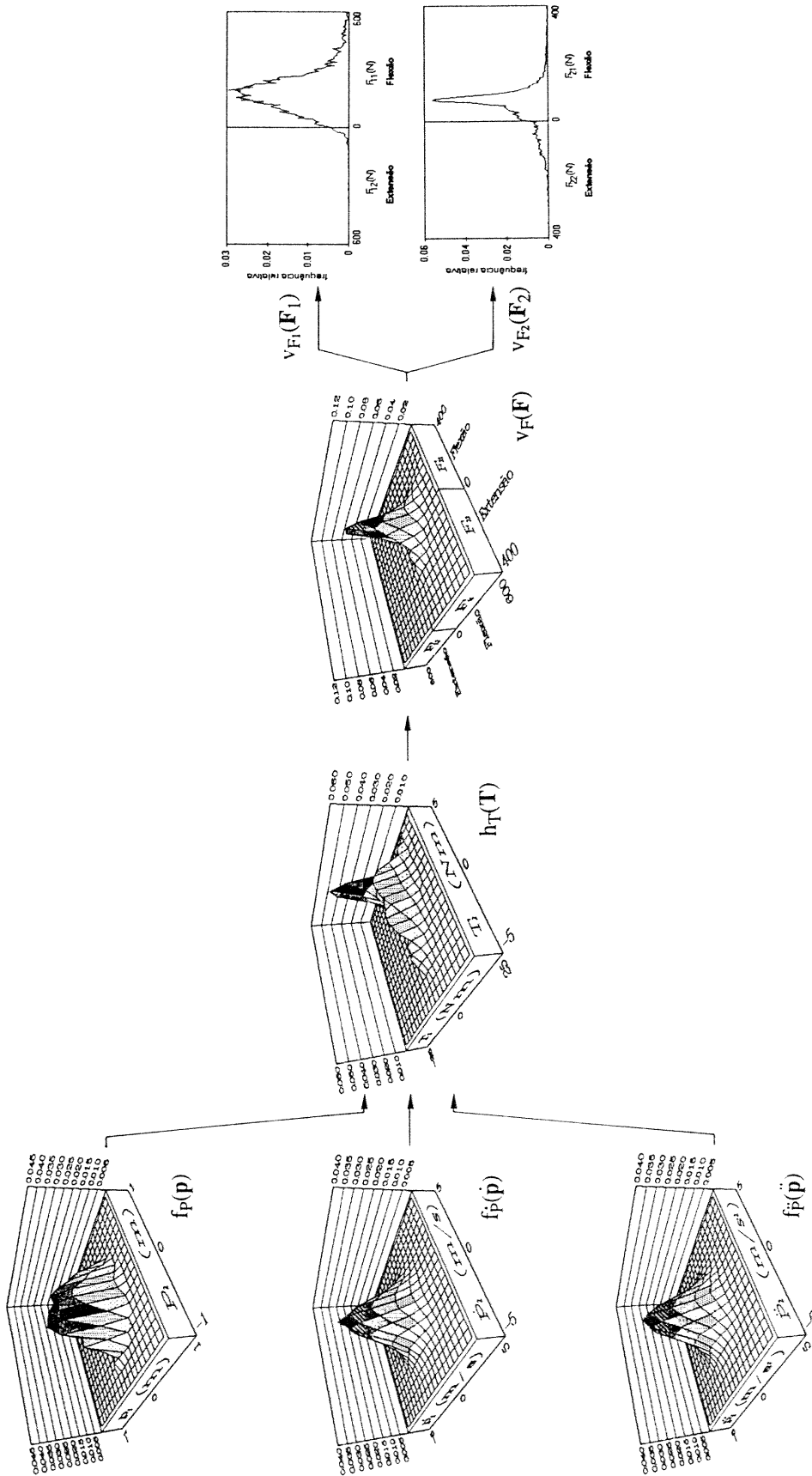


Fig. 4.16 Diagrama sinóptico da modelização do sistema cinemático-dinâmico  $\{p, \dot{p}, \ddot{p}\} \rightarrow \{F\}$ , com as v.a.s.'s obedecendo às f.d.p.'s (4.30) - (4.32) para os valores de  $\sigma_{\dot{p}} = 1 \text{ ms}^{-1}$  e de  $\sigma_{\ddot{p}} = 1 \text{ ms}^{-2}$ .

Uma segunda fase do estudo deste sistema consistiria na análise separada da dinâmica, isto é, da relação  $\{z, \dot{z}, \ddot{z}\} \rightarrow \{F\}$ . Contudo, a "redundância" dos actuadores flectores/extensores conduz a uma complexidade acrescida que, conforme se verificará, é desnecessário percorrer. Assim, decidiu-se estudar o sistema cinemático-dinâmico conforme representado no diagrama sinóptico da Figura 4.16. Excitando o sistema no espaço operacional com as f.d.p.'s já referidas (4.30)-(4.32) e condensando os histogramas das v.a.s.'s através do IP<sub>95</sub> observa-se que (Fig. 4.15):

- Para valores baixos de  $\dot{\mathbf{p}}$  os efeitos gravitacionais são predominantes.
- Para valores elevados de  $\ddot{\mathbf{p}}$  as forças  $F_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ) tornam-se significativamente superiores.
- Exigências sobre  $\dot{\mathbf{p}}$  têm um efeito em  $F_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ) muito superior a exigências sobre  $\ddot{\mathbf{p}}$ .

Estas conclusões estão em concordância com os resultados obtidos no capítulo anterior e mostram, mais uma vez, que um manipulador é uma máquina com funcionamento, intrinsecamente, transitório com baixas velocidades e elevadas acelerações/desacelerações.

#### 4.5. Conclusões

Os manipuladores robóticos são máquinas capazes de substituir o homem no manuseamento, transporte e montagem de peças, bem como noutras tarefas de índole repetitiva. Contudo, uma comparação do desempenho dos sistemas artificiais e dos sistemas biológicos mostra que a ciência e a técnica actuais estão ainda longe de alcançar a natureza. De facto, os manipuladores robóticos em uso são incapazes de providenciar as compensações introduzidas pelos sistemas de "roldanas e alavancas" existentes a nível biomecânico. Assim, torna-se evidente que a referência, com vista à concepção, de uma nova geração de manipuladores robóticos passa pela "cópia" dos sistemas biológicos e dos respectivos mecanismos. Esta estratégia requer não só o estudo dos aspectos biomecânicos do braço humano, mas também o desenvolvimento de estruturas e materiais, actuadores e algoritmos de controlo que se assemelhem aos sistemas ósseo, muscular e neuromotor, respectivamente. Neste sentido estão em curso vários projectos que visam construir manipuladores robóticos com propriedades semelhantes às do braço humano.



#### 4.5. Referências

- [4.1] Y.C. Tsai e A.H. Soni, "Accessible Region and Synthesis of Robot Arms", ASME J. Mechanical Design, vol. 103, pg. 803-811, Oct. 1981.
- [4.2] H. Asada, "A Geometrical Representation of Manipulator Dynamics and its Application to Arm Design", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 105, pg. 131-142, Sept. 1983.
- [4.3] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms", The Int. J. of Robotics Research, vol. 4, pg. 3-9, Summer 1985.
- [4.4] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A.Tenreiro Machado e J.L.Martins de Carvalho, "On the Analysis and Design of Robot Manipulators: A Statistical Approach", 11th IFAC World Congress, Tallin, URSS, 1990.
- [4.5] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A.Tenreiro Machado e J.L.Martins de Carvalho, "A Statistical Model for Robot Manipulators", IEE Int. Conf. Control'91, Edinburgh, UK, 1991.
- [4.6] D.C.H. Yang e S.W. Tzeng, "Simplification and Linearization of Manipulator Dynamics by the Design of Inertia Distribution", The Int. J. of Robotics Research, vol. 5, pg. 120-128, Fall 1986.
- [4.7] K. Youcef-Toumi e H. Asada, "The Design of Open-Loop Manipulator Arms with Decoupled and Configuration-Invariant Inertia Tensors", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 109, pg. 268-275, Sept. 1987.
- [4.8] W.-K. Chung e H.S. Cho, "On the Dynamic Characteristics of a Balanced PUMA-760 Robot", IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. IE-35, n. 2, pg. 222-230, May 1988.
- [4.9] H. Kazerooni, "Statically Balanced Direct Drive Manipulator", Robotica, vol. 7, pg. 143-149, April-June 1989.
- [4.10] M. Geradin, "Elements de Robotique: Aspects Mecaniques", Université de Liège, 1985.
- [4.11] Eugene I. Rivin, "Mechanical Design of Robots", McGraw-Hill Book Company, 1988.
- [4.12] Michael Bradey, John M. Hollerbach, Timothy L. Johnson, Tomas Lozano-Perez e Matthew T. Mason, "Robot Motion: Planning and Control", The MIT Press, 1982.
- [4.13] H. Asada e J.-J. E. Slotine, "Robot Analysis and Control", John Wiley and Sons, 1986.

- [4.14] I. Ostman, C.-A. Allared e U. Holmqvist, "Pendulum Robot: Six Degrees of Freedom Without Any Backlash for Fast and Precise Assembly", *Asea Journal*, vol. 58, pg. 12-17, 1985.
- [4.15] B. Dwolatzky e G.S. Thornton, "The GEC Tetrabot: A Serial-Parallel Topology Robot: Control Design Aspects", *IEE Int. Conf. Control'88*, Oxford, UK, 1988.
- [4.16] J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "Dynamics and Control of Robot Manipulators", *INESC Relatório Interno RI/55/87*, 1987.
- [4.17] K. F. Wells e K. Luttgens, "Kinesiology - Scientific Basis of Human Motion", W. B. Saunders Company, 1976.
- [4.18] N. Ito, R. Suzuki, K. Ishimura e H. Kuwahara, "Electromyographic Study of Shoulder Joint", 4th Congress of I.S.E.K., Boston, USA, 1979,.
- [4.19] L.P. Fischer, J.P. Carret, G.P. Gonon e J. Dimnet, "Étude cinématique des mouvements de l'articulation scapulo-humérale (articulatio humeri)", *Rev. Chir. Orthop.*, vol. 63, pg. 108-112, 1977.
- [4.20] K. N. An, F. C. Hui, B. F. Morrey, R. L. Linscheid e E. Y. Chao, "Muscles Across the Elbow Joint: A Biomechanical Analysis", *J. Biomechanics*, vol. 14, n. 10, pg. 659-669, 1981.
- [4.21] G. L. Kinzel, "Reduction of Instrumental Linkage Data for Simple Anatomical Joint Models", *ASME J. Mechanical Design*, vol. 104, pg. 218-226, Jan. 1982.
- [4.22] H. van Mameren e J. Drukker, "Attachment and Composition of Skeletal Muscles in Relation to their Function", *J. Biomechanics*, vol. 12, n. 11, pg. 859-867, 1979.
- [4.23] I. Kapandji, "Physiologie Articulaires - Schémas Commentés de Mécanique Humaine - Tome 1, Membre Supérieur", Maloine S. A. Editeur, 1983.
- [4.24] N. Hogan, "Adaptive Control of Mechanical Impedance by Coactivation of the Antagonist Muscles", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, n. 8, pg. 681-690, Aug. 1984.
- [4.25] J.V. Basmajian e C.J. De Luca, "Muscles Alive - Their Functions Revealed by Electromyography", Williams & Wilkins, 1985.
- [4.26] C. G. Atkeson e J. M. Hollerbach, "Kinematic Features of Unrestrained Vertical Arm Movements," *J. Neuroscience*, vol. 5, n. 9, pg. 2319-2330, Sept. 1985.
- [4.27] K. Akazawa e K. Fujii, "Theory of Muscle Contraction and Motor Control", *Advanced Robotics*, vol. 1, pg. 379-390, 1986.

- [4.28] M. Kawato, "Adaptation and Learning in Control of Voluntary Movement by the Central Nervous System", *Advanced Robotics*, vol. 3, n. 3, pg. 229-249, 1989.
- [4.29] D. Russell e N. Hogan, "How Humans Perform Constrained Motions", *Issues in the Modeling and Control of Biomechanical Systems*, DSC-vol. 17, pg. 13-17, 1989.
- [4.30] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A.Tenreiro Machado e J.L.Martins de Carvalho, "On the Analysis and Design of Robot Manipulators: A Statistical Perspective", *IEEE Int. Workshop on Advanced Motion Control*, Yokohama, Japão, 1990.
- [4.31] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L.Martins de Carvalho e J.A.Tenreiro Machado, "The Statistical Study of Biomechanical Arms", *Fifth IEEE Int. Symp. on Intelligent Control*, Philadelphia, USA, 1990.
- [4.32] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A.Tenreiro Machado e J.L.Martins de Carvalho, "On the Analysis of Muscle-Actuated Manipulators", *Fifth International Conference on Advanced Robotics*, Pisa, Itália, 1991.
- [4.33] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L.Martins de Carvalho e J.A.Tenreiro Machado, "On the Statistical Analysis of Biological Arms", *13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics*, Dublin, Irlanda, 1991.
- [4.34] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "Statistical Analysis of Muscle-Actuated Manipulators", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, França, 1992.
- [4.35] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L. Martins de Carvalho e J.A. Tenreiro Machado, "On the Statistical Analysis of Biomechanical Arms", *IFAC Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications SICICA'92*, Málaga, Espanha, 1992.

## 5. Conclusão

*"Deus não só joga aos dados, como de vez em quando os atira para onde não se podem ver."*  
(Stephen Hawking)

## 5. Conclusão

### 5.1. Modelos Matemáticos e Manipuladores Robóticos

A modelização de sistemas resulta da simbiose entre a física e a matemática. O produto dessa associação - o modelo matemático - reflecte as leis da física adoptadas e as ferramentas matemáticas que levam à respectiva formulação. O paradigma científico vigente resulta desta metodologia e os seus resultados têm-se revelado correctos e significativos. Neste sentido parece não existirem razões que apontem a necessidade de se repensar todo o processo. Tomemos como exemplo a modelização de manipuladores robóticos. A sua modelização requer as conhecidas leis da física clássica pelo que se trata de um problema bem dominado. No entanto, a análise do modelo resultante e a sua utilização, quer no controlo quer em simulação, revelam problemas práticos inesperados. Estas dificuldades podem ser interpretadas como um sinal. O sinal não alerta, necessariamente, para algo de *errado*, antes sugere que existe algo *desadaptado*. De facto, é comum considerar-se a evolução científica como um processo contínuo onde o paradigma em vigor se vê substituído por um novo quando a experiência demonstra ser necessário incluir novos conhecimentos, não compatíveis com os anteriores. Consequentemente, a abordagem clássica pressupõe que um paradigma ou está *certo* ou está *errado*.

O trabalho apresentado adopta uma filosofia diferente. Assim, considera-se que a existência de um "paradigma oficial" não exclui a possibilidade de existirem, simultaneamente, outros paradigmas apoiados em perspectivas diferentes. A modelização através de conceitos estatísticos demonstra a existência de uma perspectiva alternativa e complementar da metodologia usual. De facto, a aplicação do novo modelo no estudo da cinemática e da dinâmica de manipuladores robóticos comprovou as possibilidades do método estatístico. O modelo estatístico possibilita o tratamento analítico, numérico e experimental o que se traduz na existência de um maior leque de ferramentas de ataque dos problemas. Esta riqueza de meios ficou bem patente no estudo dos sistemas dinâmico e cinemático-dinâmico. Nestes casos a modelização clássica tem-se revelado pouco prometedora ao passo que a metodologia proposta conduz rapidamente a conclusões importantes.

Numa segunda parte do trabalho abordou-se o estudo e desenvolvimento de manipuladores com arquitectura semelhante à do braço humano. A observação dos processos biológicos induziu o desenvolvimento de uma estrutura cinemática que

emula alguns dos sistemas biomecânicos encontrados. A análise clássica do novo sistema indica desempenhos superiores, particularmente na vizinhança das singularidades. Além disso, as características da estrutura proposta revelam-se mais facilmente quando analisadas à luz do método estatístico.

A natureza do trabalho empreendido leva a que, a par das respostas encontradas, se abram novas interrogações e se desponham vias de investigação futura. Nesta ordem de ideias é possível referir, por exemplo, temas como a caracterização estatística de algoritmos de planeamento de trajectória, o estudo mais aprofundado da estrutura óssea do braço ou o controlo neuromotor do braço humano. Alguns aspectos destes temas são descritos, muito brevemente, de seguida.

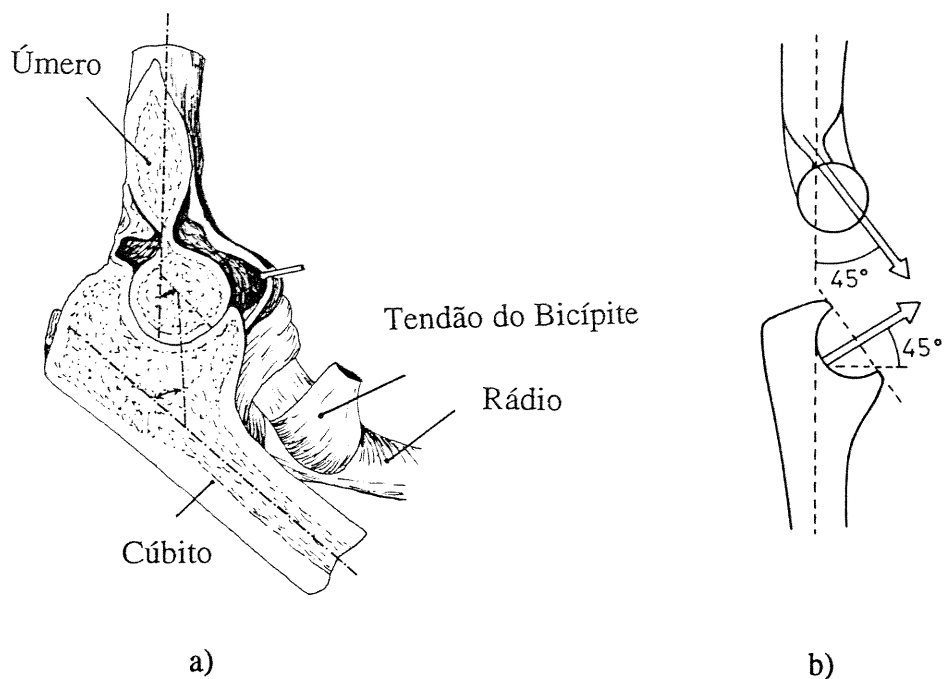
## **5.2. Perspectivas de Desenvolvimento**

### **5.2.1. Descrição Estatística de Algoritmos de Planeamento de Trajectórias**

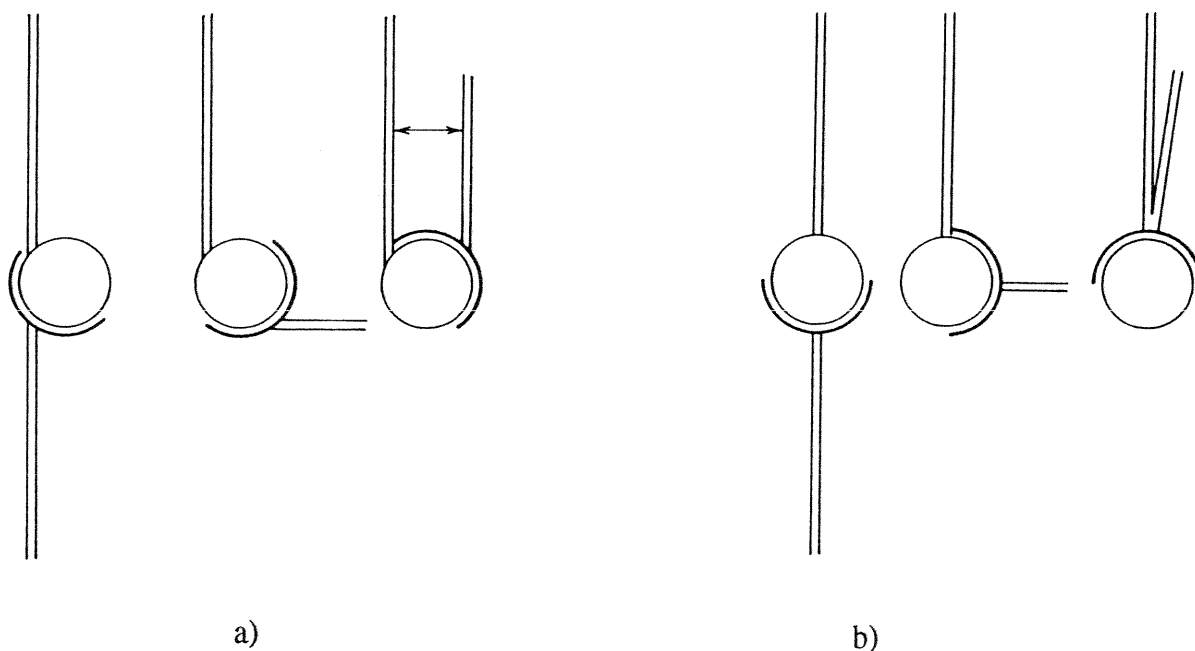
No estudo da cinemática e da dinâmica adoptaram-se f.d.p.'s de excitação que correspondem a expressões analíticas simples e fáceis de simular computacionalmente. Além disso, no tocante às velocidades e acelerações consideraram-se f.d.p.'s gaussianas independentes, o que proporcionou um preenchimento de todo o espaço das v.a.e.'s. No entanto, estas f.d.p.'s não correspondem a resultados que derivem de um, qualquer, algoritmo de planeamento de trajectórias. Assim, o estudo destes algoritmos pode levar à definição de critérios de optimização, baseados em conceitos estatísticos, que estejam bem adaptados às exigências do sistema cinemático-dinâmico.

### **5.2.2. Estrutura Óssea do Cotovelo**

A anatomia do braço humano inspirou o desenvolvimento de uma estrutura para manipuladores robóticos com propriedades semelhantes. Todavia, a estrutura proposta limita-se a copiar alguns processos biomecânicos básicos, permanecendo inexplorados muitos outros sistemas. Nesta ordem de ideias, o estudo mais aprofundado dos processos biológicos levará ao desenvolvimento de estruturas mais eficientes. Refira-se, a título de exemplo, a movimentação do cotovelo no



**Fig. 5.1** Estrutura do cotovelo.  
 a) Elementos anatómicos principais.  
 b) Modelo geométrico da articulação úmero/cúbito.



**Fig. 5.2** Articulação do cotovelo.  
 a) Estrutura ótima existente no braço humano.  
 b) Estrutura sub-ótima.

plano sagital envolvendo a deslocação relativa do úmero e do cúbito (Fig. 5.1 a). As extremidades destes ossos, que formam a articulação (epífises distal do úmero e proximal do cúbito), têm uma orientação de aproximadamente  $\pi/4$  rad face aos eixos principais (Fig. 5.1 b) [5.1-5.3]. Durante a flexão, esta estrutura permite uma variação angular de perto de  $\pi$  rad sem "esmagamento" do braquial e do bicípite braquial (Fig. 5.2 a). Consequentemente, a inexistência desta estrutura (Fig. 5.2 b) levaria à diminuição da amplitude de variação angular devido ao atravancamento dos músculos flectores pelo que deve ser tomada em atenção aquando do projecto de novas estruturas para manipuladores robóticos.

### 5.2.3. Controlo Neuromotor do Braço

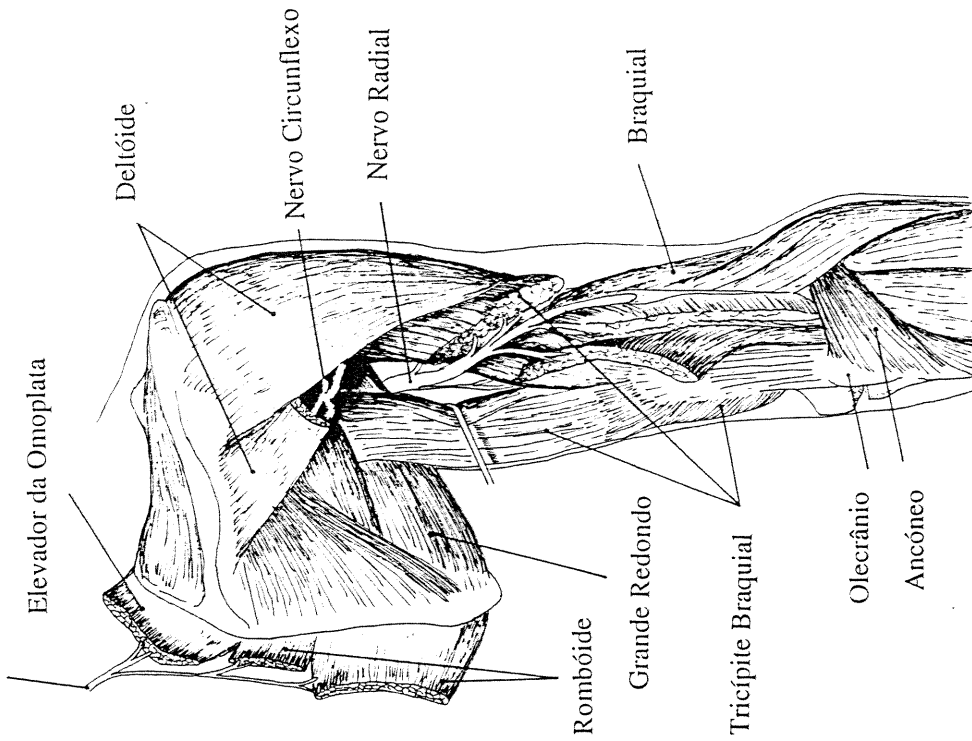
O controlo neuromotor do braço humano obedece a comandos do cérebro e do cerebelo. Os sinais enviados a partir destes centros nervosos são encaminhados para os músculos através do sistema nervoso periférico. No caso do braço assume especial importância o plexo braquial (Fig. 5.3) como ponto de "agulhagem" desses sinais. O estudo da enervação dos músculos responsáveis pela movimentação no plano sagital (Tabela 5.1) [5.4-5.7] mostra-se relativamente simples para o cotovelo, mas muito complexo para o caso do ombro. De facto, enquanto que para o cotovelo se observa uma clara dicotomia de enervação para os músculos flectores e extensores, para o ombro encontram-se casos "mistos", isto é, verifica-se a existência de um único nervo para músculos com funções quer flectoras quer extensoras. Esta situação sugere que o plano sagital poderá não ser o mais indicado para efectuar o estudo, sendo, sob o ponto de vista dos músculos, de considerar uma outra superfície. Em abono desta hipótese, refira-se que no tratamento de fracturas do úmero se imobiliza o braço do paciente na posição de equilíbrio dos músculos do ombro, o que corresponde a um posicionamento fora do plano sagital. Nesta linha de raciocínio, o estudo destes fenómenos poderá proporcionar informação relevante para a concepção de sistemas mais eficientes.

### 5.3. Comentário final

Em conclusão, pode afirmar-se que a robótica coloca problemas científicos tanto mais complexos quanto mais próximo se está da concepção de uma "cópia"

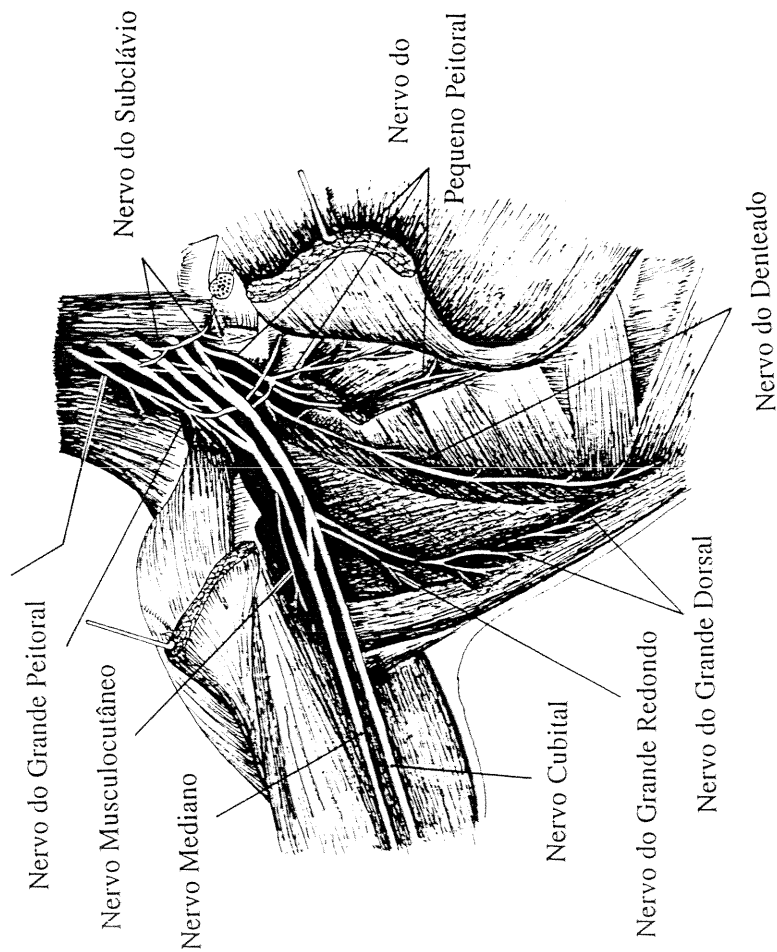


Nervo do Elevador da Omoplata  
e do Rombóide



Vista Posterior

Nervo do Elevador da Omoplata  
e do Rombóide



Vista Anterior

Fig. 5.3 Plexo braquial.

**Tabela 5.1. Enervação dos Músculos Principais de Accionamento do Braço Humano no Plano Sagital**

Plexo Cervical	Nervo do Trapézio (C <sup>3</sup> , C <sup>4</sup> )	Trapézio (F/E)
	Nervo do Elevador da Omoplata (C <sup>3</sup> , C <sup>4</sup> )	Elevador da Omoplata (F)
	Nervo do Rombóide (C <sup>3</sup> , C <sup>4</sup> )	Rombóide (F/E)
	Nervo do Elevador da Omoplata (C <sup>5</sup> )	Elevador da Omoplata (F)
Plexo Braquial	Nervo do Rombóide (C <sup>5</sup> )	Rombóide (F/E)
	Nervo do Denteado (C <sup>5</sup> , C <sup>6</sup> , C <sup>7</sup> )	Denteado (F)
	Nervo do Pequeno Peitoral (C <sup>7</sup> , C <sup>8</sup> , D <sup>1</sup> )	Pequeno Peitoral (E)
	Nervo do Subclávio (C <sup>5</sup> , C <sup>6</sup> )	Subclávio (E)
	Nervo Circunflexo (C <sup>5</sup> , C <sup>6</sup> )	Deltóide Anterior (F)
		Deltóide Posterior (E)
	Nervo do Grande Peitoral (C <sup>5</sup> , C <sup>6</sup> , C <sup>7</sup> , C <sup>8</sup> , D <sup>1</sup> )	Grande Peitoral (F/E)
	Nervo do Grande Dorsal (C <sup>6</sup> , C <sup>7</sup> , C <sup>8</sup> )	Grande Dorsal (E)
	Nervo do Grande Redondo (C <sup>5</sup> , C <sup>6</sup> , C <sup>7</sup> )	Grande Redondo (E)
	Nervo Musculocutâneo (C <sup>5</sup> , C <sup>6</sup> )	Bicípide Braquial (F)
		Braquial (F)
	Nervo Radial (C <sup>6</sup> , C <sup>7</sup> , C <sup>8</sup> , D <sup>1</sup> )	Tricípide Braquial (E)
		Ancóneo (E)

**Legenda**

- C<sup>i</sup> i-ésima raiz cervical (i=3, ..., 8)
- D<sup>1</sup> primeira raiz dorsal
- F flexão
- E extensão

do ser humano. A maior dificuldade consiste em vencer as barreiras que tendem a divorciar ciências como a física, a biologia ou a matemática. À medida que se forem superando estes obstáculos será possível conceber sistemas robóticos "à imagem e semelhança" do ser humano. A resposta a este desafio é, em última análise, a razão de ser da robótica.

#### 5.4. Referências

- [5.1] L. Testut e A. Latarjet, "Tratado de Anatomia Humana - Tomo 1, Osteologia, Artrologia e Miologia", Salvat Editores S.A., 1975.
- [5.2] I. Kapandji, "Physiologie Articulaire - Schémas Commentés de Mécanique Humaine - Tome 1, Membre Supérieur", Maloine S. A. Editeur, 1983.
- [5.3] Philip J. Rasch e Roger K. Burke, "Kinesiology and Applied Anatomy - The Science of Human Movement", Lea & Febiger, Philadelphia, USA, 1976.
- [5.4] L. Testut e A. Latarjet "Tratado de Anatomia Humana - Tomo 3, Meninges, Sistema Nervoso Periférico, Orgãos dos Sentidos, Aparelho da Respiração e da Fonação, Glândulas de Secreção Interna", Salvat Editores S.A., 1975.
- [5.5] H.O. Kendall, F.P. Kendall e G.E. Wadsworth, "Muscles - Testing and Function", The Williams & Wilkins Company, Baltimore, USA, 1971.
- [5.6] F.H. Netter, "The Ciba Collection of Medical Illustrations - Volume I, Nervous System", Ciba Pharmaceutical Company, Division of Ciba-Geigy Corporation, 1974.
- [5.7] J. Droulez, "Le Mouvement à l' Origine de l' Intelligence?", Science & Vie, N° 177, pg. 52-60, Dec. 1991.